Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

621.305
AR
v. 4

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Archiv

für

Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben

von

Dr.-Ing. W. Rogowski
Charlottenburg

Schriftleitung: i. V. **Prof. Dr. E. Orlich,** Charlottenburg

IV. Band

Mit zahlreichen Textfiguren

Berlin
Verlag von Julius Springer
1916

Digitized by Google

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Digitized by Google

621.305
AR
v.4

Namenverzeichnis.

Benischke, G., Gibt es geschlossene elektrische Kraftlinien? 366.

Biermanns, J., Der kapazitiv belastete Transformator mit Eigenkapazität 36.

— Über die Vorgänge in Ein- und Mehrphasen-Synchronmaschinen bei der Unterbrechung des Kurzschlusses 193.

— Elektrische Schwingungen in Maschinenwicklungen 211.

Bloch, O., Zur Theorie des Heylandschen Dreiphasen-Repulsionsmotors 394.

Bolliger, A., Grundlagen zur Konstruktion eines neuen Durchführungsisolators 354.

Dreyfuß, L., Zusätzliche Kupferverluste durch Stromverdrängung bei Einankerumformern 42.

— Die Feldverteilung und Wirbelstrombildung in den Ankern von Dynamomaschinen bei Ummagnetisierung durch hochperiodige Wechsel- und Drehfelder 99.

— Über die Erregung eines massiven magnetischen Kreises durch Wechselstrom 314.

Faßbender, H., Die magnetische Leitfähigkeit im Hochfrequenzmaschinenbau 140.

Fleischmann, L., Versuch einer Bestimmung der in Ölschaltern auftretenden Drucke 86.

Jaeger, W., Günstigste Schaltung der Vibrationsgalvanometer 262.

Lorenz, H., Bemerkungen zur Theorie der Eisenverluste in Spulenkernen 66.

— Die Wechselwirkung schräg stehender Solenoide mit Eisenkernen 256.

Müller, P., Einige Selbsterregungserscheinungen bei einphasigen Kollektormotoren 373.

Richter, Rudolf, Über zusätzliche Stromwärme. II. Entwurf von Nutenwicklungen 1.

Rogowski, W., Zur Definition der induzierten elektromotorischen Kraft 56.

— Über den Wechselstromwiderstand von kurzen Spulen aus Litze 61.

— Eine Erweiterung des Reflexionsgesetzes für Wanderwellen 204.

— Die Messung des elektromagnetischen (Poyntingschen) Energieflusses 279.

— Unterteilung und Wechselstromwiderstand 293.

— Kondensatoren als Schutz gegen Ausschaltspannungen bei Gleichstrommaschinen hoher Spannung und bei Drosselspulen 345.

— Gibt es geschlossene elektrische Kraftlinien? Einige Bemerkungen zu dem gleichnamigen Aufsatz des Herrn Benischke 370.

Schwaiger, A., Die graphische Integration von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung 269.

Siegbahn, M., Elektromagnetische Wellen in Spulen mit Windungskapazität 305.

Spielrein, J., Geometrisches zur elektrischen Festigkeitsrechnung 78.

Steinhaus, W., u. Gumlich, E., Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des Ferromagnetismus. I. Anfangssuszeptibilität und Annäherungsgesetz 89.

— Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des Ferromagnetismus. II. Ideale, d. h. hysteresefreie Magnetisierung 149.

Wagner, K. W., Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung, von Einschaltvorgängen. (Mit Anwendungsbeispielen.) 159.

589268

Digitized by Google

Digitized by Google

621.303
AR

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 1. u. 2. Heft. 1915.

Über zusätzliche Stromwärme.

II. Entwurf von Nutenwicklungen.

Von

Rudolf Richter.

Inhalt.

		Seite
1.	Übersicht	1
	A. Wicklungen für kleinsten Wechselstromwiderstand	2
2.	Abstufung der Leiterhöhen	2
3.	Einfluß der Schichtzahl	8
3a.	Parallelschaltung von Wicklungsteilen	10
4.	Quadratischer Leiterquerschnitt	11
4a.	Einfluß des spezifischen Widerstandes	15
5.	Kreisförmiger Leiterquerschnitt	15
5a.	Einfluß des spezifischen Widerstandes	20
	B. Wicklungen für kleinste Temperaturzunahme	20
6.	Günstigste Leiterhöhe	20
6a.	Quadratischer und kreisförmiger Leiterquerschnitt	22
6b.	Abstufung der Leiterhöhen	23
7.	Vergrößerung der wärmeabführenden Oberfläche der Nut	23
8.	Einfluß des spezifischen Widerstandes	25
8a.	Quadratischer und kreisförmiger Leiterquerschnitt	28
9.	Wicklungen mit derselben Stromwärme in jeder Leiterschicht	29

1. Übersicht. Trotz der ausführlichen Untersuchungen von Emde[1]) und Rogowski[2]) über zusätzliche Stromwärme bei Wechselstromwicklungen, die in Nuten eingebettet sind, gibt es doch eine Reihe bisher unbeantwortet gebliebener Fragen, die beim Entwurf von Wechselstromwicklungen von praktischer Bedeutung sind[3]). Mit einigen dieser Fragen soll sich die Arbeit beschäftigen.

Der Entwurf einer Wicklung kann zwei verschiedene Ziele verfolgen; man will unter gewissen Voraussetzungen die Wicklung entweder so entwerfen, daß die Stromwärme ein Minimum wird, die Maschine also mit größtem Wirkungsgrad arbeitet, oder so, daß die Temperaturzunahme der Wicklung ein Minimum wird. Mit beiden Aufgaben hat sich bereits Rogowski beschäftigt und für die erste eine Regel aufgestellt, die für den Maschinenkonstrukteur sehr wertvoll ist[4]).

[1]) Emde, Elektrotechnik und Maschinenbau 1908, S. 703.

[2]) Rogowski, Archiv f. E. Bd. II, S. 81. Weil die Rogowskische Arbeit in dieser Zeitschrift erschienen ist, soll sie bei Quellenangaben hier bevorzugt werden, auch wenn die Quellen auf die ältere Emdesche Arbeit zurückzuführen sind.

[3]) Der Zufall spielte mir nach Drucklegung dieser Arbeit einen Aufsatz von M. B. Field (Journal of the Institution of Electrical Engineers, Vol. 37, S. 83) in die Hände, einem Bruder von A. B. Field, dem wir die ersten Untersuchungen über die Stromwärme in Ankerwicklungen verdanken. Dieser Aufsatz enthält zwar nichts von den hier mitgeteilten Untersuchungen und Ergebnissen, verdient aber angeführt zu werden, weil darin schon zum Ausdruck kommt, daß es eine kritische Kupferhöhe gibt, bei deren Überschreitung die Stromwärme zunimmt, daß die Abstufung der Leiterhöhen zuweilen zweckmäßig ist, daß unter Umständen bei einem Leitermetall von größerem spezifischen Widerstande die Stromwärme geringer werden kann und daß die Stromverdrängung auch bei Gleichstromankerwicklungen in Frage kommt; auch enthält der Aufsatz eine Untersuchung über die Temperaturzunahme von Wicklungen. — Wie mir Herr Dr.-Ing. Rogowski freundlichst mitteilt, hat er in einer Fußnote auf S. 104 des Archivs f. E. Bd. II bereits hervorgehoben, daß die Arbeit von M. B. Field (es ist dort versehentlich C. Field gedruckt) einen Hinweis auf das Widerstandsminimum enthält.

[4]) Rogowski, Archiv f. E. Bd. II, 108.

Digitized by Google

An diese Rogowskische Regel, nach der die Leiterhöhe für eine Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand zu bestimmen ist, knüpft die Arbeit an und behandelt zunächst den Einfluß einer passenden schichtweisen Abstufung der Leiterhöhen auf Wechselstromwiderstand und Kupfergewicht. Es wird dann untersucht, welchen Vorteil die Anordnung der Leiter in möglichst vielen Schichten übereinander und möglichst wenigen nebeneinander gewährt, und als wirksamstes Mittel zur Verringerung der zusätzlichen Stromwärme die Parallelschaltung von möglichst vielen Wicklungsabteilungen gefunden. Auch über den Einfluß der Schichtzahl gibt bereits die Rogowskische Arbeit Aufschluß, doch nicht in einer Form, die eine praktische Anwendung auf den Entwurf von Wicklungen gestattet. Die letzten beiden Abschnitte des Teiles A beschäftigen sich mit dem Entwurf von Wicklungen, deren Leiterquerschnitte quadratisch und kreisförmig sind[1]).

Auch über den Entwurf von Wicklungen für kleinste Temperaturzunahme verdanken wir Rogowski[2]) eine Untersuchung, die er gelegentlich einiger Bemerkungen zu einer Arbeit des Verfassers[3]) über zusätzliche Stromwärme mitteilte. Die Untersuchung dringt aber nicht so tief in den Gegenstand ein, wie es für den Entwurf von Wicklungen erwünscht wäre, sie wird deshalb im Teil B der Arbeit vervollständigt. In den dann folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie sich die wärmeabführende Oberfläche der Nut ohne merkliche Erhöhung der Stromwärme und des Kupfergewichts bei genügend großer Leiterzahl der Nut beliebig vergrößern läßt, und wie man bei Drahtwicklungen die Leiter in der Nut anordnen muß, damit die mittlere Temperaturzunahme in allen Leiterschichten denselben Wert hat, man also bei vorgeschriebener Temperatur mit kleinstem Kupfergewicht auskommt.

In mehreren Abschnitten wird noch untersucht, welchen Einfluß der spezifische Widerstand des Leitermetalls auf Stromwärme und Temperaturzunahme hat, und die Verwendungsmöglichkeit von Aluminiumleitern an Stelle von Kupferleitern diskutiert. In jedem Abschnitt sind die wichtigsten Ergebnisse durch gesperrten Druck hervorgehoben.

Wenn man die in der Arbeit entwickelten Gesichtspunkte für den Entwurf von Wechselstromwicklungen beachtet, braucht man bei nicht zu geringer Leiterzahl in der Nut weder die Stromwärme noch die Temperaturerhöhung zu fürchten; wie man bei wenigen Leitern in der Nut und großer Nuttiefe die zusätzliche Stromwärme auf praktisch genügend kleine Beträge bringen kann, soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

A. Wicklungen für kleinsten Wechselstromwiderstand.

2. Abstufung der Leiterhöhen. Für Wicklungen mit Reihenschaltung der Leiter von gleichem rechteckförmigen Querschnitt hat Rogowski eine Regel aufgestellt, nach der die Leiterhöhe h_0 zu bemessen ist, um den kleinsten möglichen Wechselstromwiderstand der Wicklung zu erhalten. Diese Regel lautet

$$h_0 \alpha = \xi_0 = \sqrt[4]{\frac{3(1+\lambda)}{m^2 - 0{,}2}}\,,\ ^4) \qquad 1)$$

[1]) Bei frei im Raum befindlichen Spulen haben bereits M. Wien, Annalen der Physik, Bd. 14, S. 1, und A. Sommerfeld, Annalen der Physik, Bd. 24, S. 609, kreisförmigen Leiterquerschnitt zugrunde gelegt. Die Ergebnisse dieser Arbeiten lassen sich nicht auf in Nuten eingebettete Wicklungen übertragen; soweit sie hierfür verwertbar wären, beziehen sie sich nur auf Spulen, deren Windungen in einer Lage angeordnet sind.

[2]) Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 526.

[3]) Richter, Archiv f. E., Bd. II, S. 518.

[4]) Herr Dr. ing. Rogowski hat mich auf diese Formel aufmerksam gemacht, die in seiner Arbeit, Archiv f. E., Bd. II, auf S. 108, Anm. 1, (für $\lambda = 0$) angegeben ist. Sie ist genauer als die im Text der Rogowskischen Arbeit enthaltenen Näherungsformeln $\xi \cong \sqrt[4]{\frac{3(1+\lambda)}{m^2 - 1}}$ und $\xi_0 \cong \frac{1{,}3}{m}\sqrt[4]{1+\lambda}$

Digitized by Google

Engineering Library 537.05 A

wenn

$$\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{b}{\rho}\frac{P}{a}}, \qquad 1a)$$

b die Breite sämtlicher (n) in der Nut nebeneinander liegenden Leiter in cm,
ρ der spezifische Widerstand des Leitermetalls in cgs-Einheiten ($\rho = \rho' 10^5$, wenn ρ' in $\frac{\text{Ohm mm}^2}{\text{m}}$),
P die Frequenz des Wechselstromes in der Sekunde,
a die Nutbreite in cm,
m die Zahl der übereinander liegenden Leiterschichten,
λ das Verhältnis der Leiterlängen außerhalb der Nut zu denen innerhalb der Nut.

Die Formel gilt nur für genügend kleine Werte von ξ_0, d. h. bei $\lambda \leqq 3$ sehr genau für $m > 3$, annähernd (mit etwas zu großen Werten) auch für $m = 3$ und $m = 2$, also für alle praktischen Fälle. Für $m = 1$ nimmt bei $\lambda > 0{,}7$ der Wechselstromwiderstand mit wachsender Leiterhöhe ständig ab[1]).

Die Leiterhöhe für kleinsten gesamten Wechselstromwiderstand ist also von dem Verhältnis der Leiterlängen außerhalb der Nut zu denen innerhalb der Nut (im Eisenkörper) abhängig. Es ist nicht statthaft, die Querverbindungen zu vernachlässigen, wie es zuweilen geschieht; die Formel

$$\xi_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{m^2 - 0{,}2}}$$

gibt mit Rücksicht auf kleinsten gesamten Wechselstromwiderstand zu kleine Werte für ξ_0

Die Verwendung von Leitern gleicher Höhe stellt zweifellos den praktisch wichtigsten Fall dar. Die Aufgabe ist aber damit noch nicht vollkommen erledigt, und es drängt sich insbesondere die Frage auf, ob bei Verwendung ungleicher Stabhöhen der Wechselstromwiderstand noch wesentlich verringert werden kann.

Der Wechselstromwiderstand eines Leiters der pten Schicht ist (auf die Leiterlänge 1 bezogen)

$$R_p = n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{1}{\xi}\left\{\varphi(\xi) + (p^2 - p)\psi(\xi) + \lambda\right\}.^{2}) \qquad 2)$$

Er ist natürlich auch abhängig von der Größe der Querverbindungen. Für die wohl am häufigsten vorkommende Wicklung mit $\lambda = 2$ sind in Fig. 1 die Werte $\frac{b}{n\rho\alpha} R_p$ als Funktion von ξ bei veränderlicher Leiterhöhe $h = \frac{\xi}{\alpha}$ und für $p = 1$ bis 20 und $p = 40$ aufgetragen (es sind dies die stärker ausgezogenen Kurven mit den Ziffern 1 bis 20 und 40). Der Wert $\xi = \xi_{p0}$, bei dem der Wechselstromwiderstand der pten (vom Grunde der Nut aus gezählten) Schicht ein Minimum wird, ist um so kleiner, je größer p, die Ordnungszahl der betreffenden Schicht, ist. Die Leiterhöhe sollte also bei einer Wicklung mit kleinstem Widerstand so abgestuft werden, daß sie, vom Grunde der Nut ausgehend, von Schicht zu Schicht kleiner wird.

---

und ergibt sich, wenn in der Formel für das Verhältnis von Wechselstromwiderstand (R) zu Gleichstromwiderstand (Rg),

$$\frac{R}{Rg} = \varphi(\xi) + \frac{m^2 - 1}{3}\psi(\xi),$$

$\varphi(\xi) = 1 + \frac{4}{45}\xi^4$ und $\psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}$ gesetzt wird, d. h. wenn $-\frac{m^2 - 0{,}247}{222}\xi^8$ gegen $1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9}\xi^4$ vernachlässigt wird.

[1]) Vgl. Richter, Archiv f. E., Bd. III S. 182 unten. Bei $h = \infty$ ist der Wechselstromwiderstand nicht null sondern $n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{1+\lambda}$ für die Längeneinheit des Leiters.

[2]) Vgl. z. B. Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 97 (Gl. (18)), S. 105 und 109 und den letzten Satz in Anmerkung 2 S. 5.

Digitized by Google

Für kleine Werte von ξ (etwa $\xi \leq 0{,}8$) darf man bekanntlich setzen

$$\varphi(\xi) = 1 \quad \text{und} \quad \psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}\,.^1) \qquad 2\,a)$$

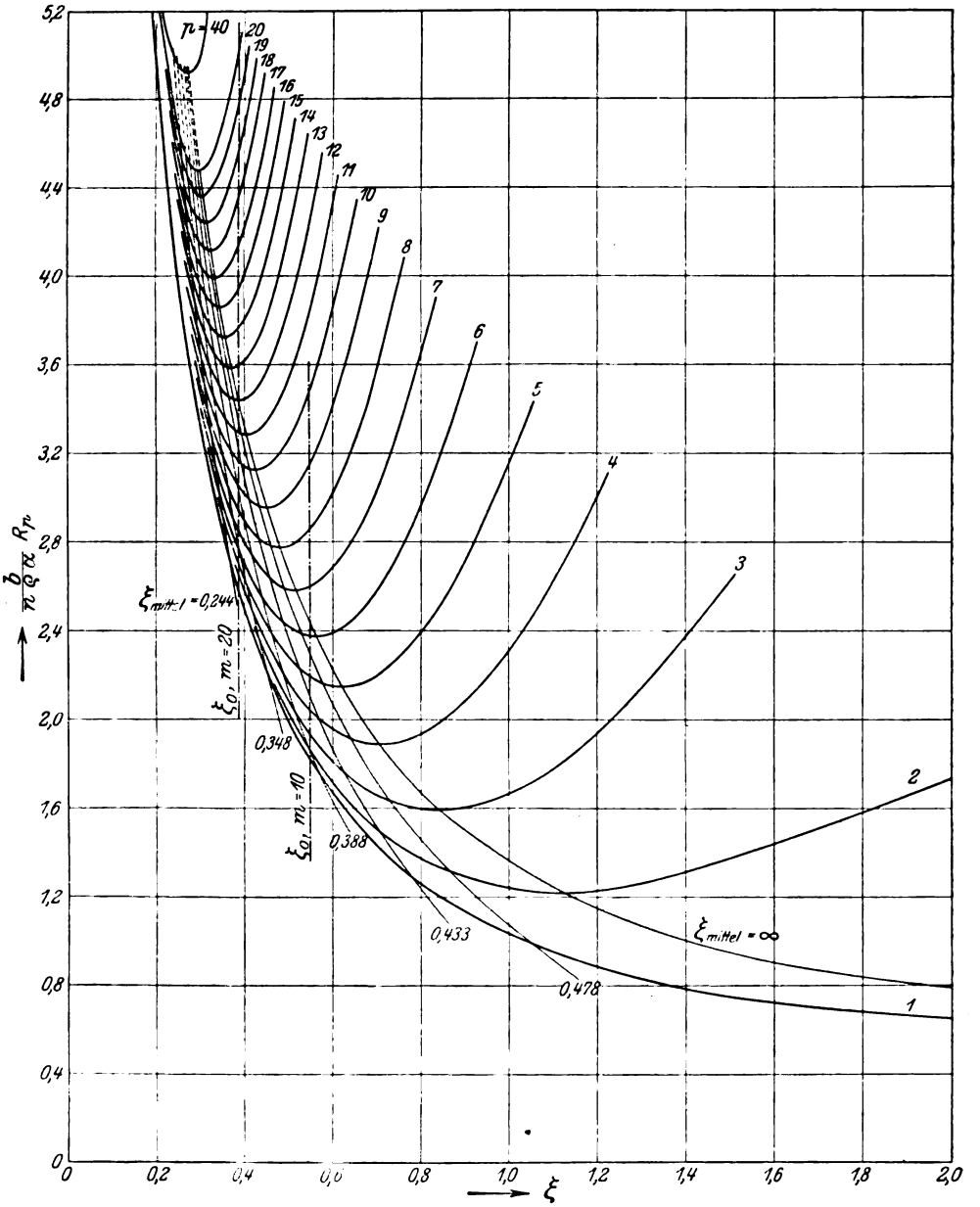


Fig. 1. Wechselstromwiderstand in den einzelnen Schichten (p) einer Wicklung, deren in Nuten eingebetteten Leiterlängen halb so groß sind wie die außerhalb des Eisens. Die Schnittpunkte mit den dünneren Kurven bestimmen für gewisse mittlere Leiterhöhen die günstigste Abstufung der Leiterhöhen $\left(h = \frac{\xi}{a}\right)$ für die einzelnen Schichten.

---

1) Vgl. z. B. Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 99, Gl. (20) und (21). Der Ansatz ist nicht ganz konsequent, denn er vernachlässigt in $\varphi(\xi)$ auch das Glied mit der 4. Potenz von ξ, während in $\psi(\xi)$ die 4. Potenz von ξ noch Berücksichtigung findet. Die Formeln werden aber hierbei übersichtlicher und die Genauigkeit wird nicht wesentlich beeinträchtigt, wie aus Gl. (2) und Anmerkung 4, S. 2, folgt.

Digitized by Google

Engineering Library
62.1.055
A R

Die Minimumbedingung für den Wechselstromwiderstand in der p ten Schicht liefert dann für die Leiterhöhe h_{p0} die Gleichung

$$h_{p0}\,\alpha = \xi_{p0} = \sqrt[4]{\frac{1+\lambda}{p^2-p}}, \qquad 3)$$

gültig für $p > 2$, annähernd auch für $p = 2$. In der untersten Leiterschicht ($p = 1$) ist $\xi_{p0} = \xi_{10}$ nur dann unendlich, wenn $\lambda > 0{,}7$ ist[1]). Mit $\lambda > 0{,}7$ gilt also Gl. (3) praktisch für alle Leiterschichten.

Bei Wicklungen mit derselben Leiterhöhe in allen Leiterschichten ist der Wert $\xi_0 = \alpha h_0$, der dem Minimum des gesamten Wechselstromwiderstandes entspricht, größer als ξ_{p0} für die oberen, und kleiner als ξ_{p0} für die unteren Schichten. Wir erhalten für jede Leiterschicht einen größeren Wechselstromwiderstand als dem Widerstandsminimum der betreffenden Schicht entspricht. Für Wicklungen mit z. B. $m = 10$ und $m = 20$ sind in Fig. 1 die Ordinaten $\xi_{0,\,m=10}$ und $\xi_{0,\,m=20}$ durch strichpunktierte Linien hervorgehoben. Für $m = 10$ ist die Wärmeentwicklung in der obersten Schicht 1,117 mal, in der untersten Schicht 5,47 mal größer als den Widerstandsminima der obersten und der untersten Schicht entspricht; für $m = 20$ sind diese Verhältniszahlen 1,125 und 7,75.

Das Verhältnis der kleinsten mittleren Wechselstromwiderstände einer Wicklung mit gleichen Leiterhöhen (entsprechend $\xi = \xi_0$) und einer Wicklung mit richtig abgestuften Leiterhöhen (entsprechend $\xi_p = \xi_{p0}$) ist

$$\frac{R_0}{\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} R_{p0}},$$

worin R_0 nach bekannter Formel[2]) zu berechnen ist, und $\frac{1}{m}\Sigma R_{p0}$ den Kurven der Fig. 1 entnommen werden kann[3]). Das jedem m zugeordnete Widerstandsverhältnis ist durch die

---

[1]) Vgl. Anmerkung 1, S. 3.

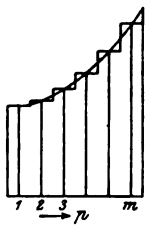
[2]) Vgl. z. B. Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 109, Formel für R_w mit ξ_0 nach Gl. (31) und $c = n\frac{\rho}{b}\alpha$. Rogowski setzt nach S. 105, $c = m\frac{\rho}{b}\alpha$; er nimmt also an, daß $n = 1$, und bezieht R_w auf m in Reihe geschaltete Leiter von je der Länge 1.

[3]) Man kann das Widerstandsverhältnis auch analytisch bestimmen, wenn man ΣR_{p0} durch ein Integral, d. h. den treppenförmigen Linienzug in der nebenstehenden Figur durch die stetige Kurve ersetzt. Um den hierdurch entstehenden kleinen Fehler wieder auszugleichen, wird man die Summe des Widerstandes R_0 auch durch ein Integral ersetzen.

Man erhält zunächst für den mittleren Wechselstromwiderstand

$$R \cong n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{\xi}\frac{1}{m}\int_{p=\frac{1}{2}}^{p=m+\frac{1}{2}}\left\{\varphi(\xi) + (p^2-p)\,\psi(\xi) + \lambda\right\}dp$$

$$= n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{\xi}\left\{\varphi(\xi) + \frac{m^2-0{,}75}{3}\psi(\xi) + \lambda\right\},$$



während die Summation

$$R = n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{\xi}\left\{\varphi(\xi) + \frac{m^2-1}{3}\psi(\xi) + \lambda\right\}$$

ergibt. Der größte Fehler tritt bei $m = 2$ mit 2% auf und verschwindet praktisch ganz für größere Werte von m. Für $\xi \leq 0{,}8$ setzen wir (vgl. Gl. (2a))

$$R \cong n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{m^2-0{,}75}{9(1+\lambda)}\xi^4\right)$$

und erhalten

$$R_0 \cong n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{m^2-0{,}75}{3(1+\lambda)}} = n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{4}{3\sqrt[4]{1+\lambda}}\sqrt[4]{\frac{m^2-0{,}75}{3}}. \qquad a)$$

Digitized by Google

voll ausgezogene Kurve in Fig. 2 dargestellt; die gestrichelten Kurven sind nach der Näherungsformel (c) der Anmerkung für $\lambda = 1$, 2 und 3 berechnet.

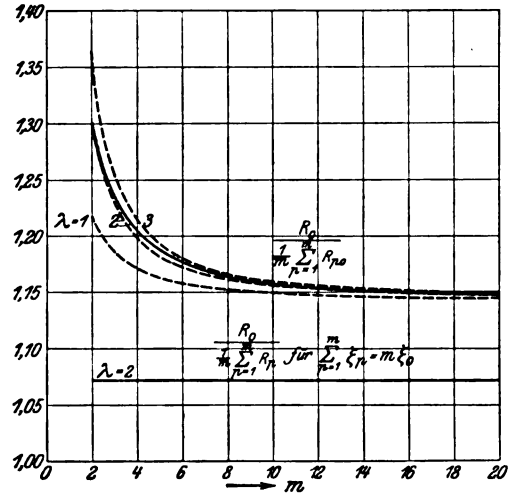


Fig. 2. Verhältnis der Widerstandsminima zwischen gleichen und abgestuften Leiterhöhen.

Die Wicklung mit $\xi_p = \xi_{p0}$ hat natürlich keine praktische Bedeutung, weil sie $\xi_1 = \infty$, also einen unendlich hohen Leiter voraussetzt; sie verdient aber insofern Beachtung, als sie den theoretischen Grenzfall für das Widerstandsminimum darstellt. Wir erkennen schon hieraus, daß durch Abstufung der Leiterhöhen nur bei einer Zweischichtwicklung eine bedeutende Verringerung des kleinsten Wechselstromwiderstandes erreicht werden kann. Für die am häufigsten vorkommende Wicklung mit $\lambda = 2$ ist bei gleichen Leiterhöhen der kleinste Wechselstromwiderstand bei 2 Leiterschichten 30%, bei 10 Leiterschichten nur 15,6% höher als der des theoretischen Grenzfalles.

Für große Leiterschichtzahlen kommt hiernach eine Abstufung von Schicht zu Schicht praktisch kaum in Frage, weil die kleine Verringerung des Wechselstromwiderstandes gegenüber der Wicklung mit gleichen Leiterhöhen nicht die umständlichere Herstellung der Wicklung rechtfertigt. Für kleinere Leiterschichtzahlen kann es dagegen zuweilen lohnend sein, die Leiterhöhen abzustufen, besonders für die

---

Für den kleinsten mittleren Wechselstromwiderstand bei richtig abgestuften Leiterhöhen erhalten wir

$$\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} R_{p0} \cong \frac{1}{m}\int_{p=\frac{1}{2}}^{p=m+\frac{1}{2}} R_{p0}\,dp \cong \frac{1}{m}\left\{R_{10} + n\frac{\rho}{b}\alpha\frac{4}{3}\int_{p=1\frac{1}{2}}^{p=m+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{p^2-p}{1+\lambda}}\,dp\right\}$$

$$\cong \frac{1}{m} n \frac{\rho}{b}\alpha\left\{\frac{1}{1+\lambda} + \frac{4}{3\sqrt[4]{1+\lambda}}\int_{p=1\frac{1}{2}}^{p=m+\frac{1}{2}}\left(p^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}p^{-\frac{1}{2}}\right)dp\right\}$$

$$\cong \frac{1}{m} n \frac{\rho}{b}\alpha\frac{4}{3\sqrt[4]{1+\lambda}}\left(\frac{4m-1}{6}\sqrt{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{(1+\lambda)^3}}\right). \qquad b)$$

Das Widerstandsverhältnis wird

$$\frac{R_0}{\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} R_{p0}} \cong \frac{m\sqrt[4]{m^2-0{,}75}}{0{,}219\,(4m-1)\sqrt{m+0{,}5} + 0{,}987\,\frac{1}{\sqrt[4]{(1+\lambda)^3}} - 0{,}806} \qquad c)$$

und für $\lambda = 2$

$$\frac{R_0}{\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} R_{p0}} \cong \frac{m\sqrt[4]{m^2-0{,}75}}{0{,}219\,(4m-1)\sqrt{m+0{,}5} - 0{,}373}.$$

Die hiernach berechneten Widerstandsverhältnisse stimmen mit den genaueren in Fig. 2 aufgetragenen Werten für $\lambda = 2$ fast überein. Die Kurven für $\lambda = 1$ und $\lambda = 3$ in Fig. 2 sind, wie die gestrichelte Kurve für $\lambda = 2$, nach Gl. (c) berechnet.

Digitized by Google

Zweischichtwicklung, die durch Abstufung der Leiterhöhen kaum verteuert wird. Die Frage der zweckmäßigsten Abstufung der Leiterschichten hat deshalb auch praktische Bedeutung.

Der theoretische Grenzfall kann nicht verwirklicht werden, weil er — wie schon früher bemerkt — in der untersten Schicht unendlich hohe Leiter voraussetzt. Die Aufgabe, die wir uns stellen müssen, lautet: Gegeben ist die Summe der Leiterschichthöhen (oder das Kupfergewicht); wie muß man die Höhen der einzelnen Leiterschichten abstufen, damit der Wechselstromwiderstand ein Minimum wird? Mathematisch gesprochen:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_m = \text{const} = H,$$
$$R_1(h_1) + R_2(h_2) + \ldots + R_m(h_m) = \min.$$

In geschlossener Form ist die Aufgabe nicht lösbar. Wir betrachten deshalb zunächst den Fall, wo nur zwei Stabschichten vorhanden sind:

$$h_1 + h_2 = H; \quad R_1(h_1) + R_2(h_2) = \min.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial R_1(h_1)}{\partial h_1} + \frac{\partial R_2(H-h_1)}{\partial h_1} = \frac{\partial R_1(h_1)}{\partial h_1} - \frac{\partial R_2(H-h_1)}{\partial(H-h_1)} = 0,$$
$$\frac{\partial R_1(h_1)}{\partial h_1} = \frac{\partial R_2(h_2)}{\partial h_2}.$$

Die Lösung der Aufgabe ist hiernach auch für beliebige Schichtzahlen gegeben. Man geht von der Höhe irgend einer Schicht, z. B. der ersten Schicht (h_1) aus und bestimmt die Höhen der übrigen Schichten so, daß der Differentialquotient $\frac{\partial R_p(h_p)}{\partial h_p}$ für alle Schichten denselben Wert hat. Die Rechnung ist so oft mit verschiedenen h_1 zu wiederholen, bis die Summe der Stabschichten den gewünschten Wert $\sum_{p=1}^{m} h_p = H$ hat. Durch Interpolation kommt man sehr schnell zum Ziel.

Es sind also die Punkte der Kurven $R_p = f(\xi)$ zu suchen, bei denen die Tangenten gegen die Abszissenachse dieselbe Neigung haben. Die so zugeordneten Punkte der (stärkeren) Widerstandskurven in Fig. 1, die als Funktion der den h proportionalen ξ aufgetragen sind, sind durch dünnere Kurven miteinander verbunden. Das jeder Kurve entsprechende mittlere ξ

$$\xi_{\text{mittel}} = \alpha\, h_{\text{mittel}}$$
$$= \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} \xi_p = \frac{1}{20}\sum_{p=1}^{20} \xi_p$$

ist angeschrieben.

Der mittlere Widerstand

$$\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} R_p$$

der m Leiterschichten ist in Fig. 3 als Funktion von ξ_{mittel} für verschiedene m darge-

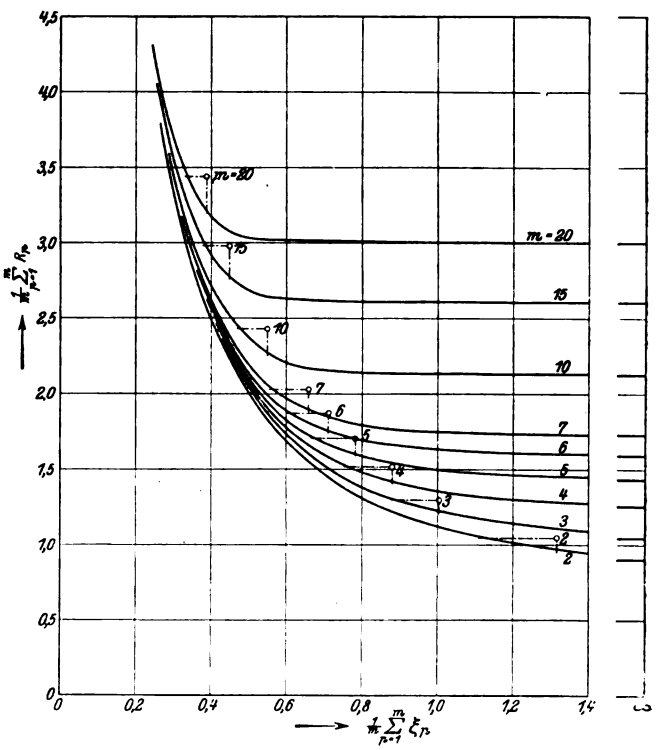


Fig. 3. Wechselstromwiderstand als Funktion der mittleren Leiterhöhe bei günstigster Abstufung der Leiterhöhen.

Digitized by Google

stellt; freie Punkte bezeichnen die Werte von ξ_0 und R_0, die kleinstem Wechselstromwiderstand bei gleichen Leiterhöhen $\frac{\xi_0}{\alpha}$ entsprechen.

Wir entnehmen der Fig. 3:
erstens das Verhältnis

$$\frac{\xi_0}{\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}\xi_p},$$

der für alle Schichten gleichen Leiterhöhe einer Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand zu der mittleren Leiterhöhe einer Wicklung mit abgestuften Leiterhöhen, wenn diese Wicklung denselben Wechselstromwiderstand hat wie die Wicklung mit gleichen Leiterhöhen (vgl. die Schnittpunkte mit den Horizontalen durch die freien Punkte);

zweitens: das Verhältnis der mittleren Wechselstromwiderstände, wenn die mittlere Stabhöhe der Wicklung mit abgestuften Schichten gleich der bei gleichen Leiterhöhen ist:

$$\frac{R_0}{\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}R_p}; \quad \sum_{p=1}^{m}\xi_p = m\,\xi_0$$

(vgl. die Schnittpunkte mit den Vertikalen durch die freien Punkte).

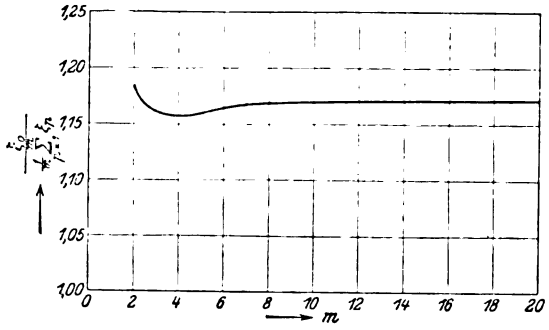


Fig. 4. Verhältnis von Leiterhöhe einer Wicklung mit gleich hohen Leitern zur mittleren Leiterhöhe bei zweckmäßig abgestuften Schichthöhen, wenn der Widerstand beider Wicklungen gleich dem Minimum bei gleich hohen Leitern ist.

Das Höhenverhältnis ist in Fig. 4 für $\lambda = 2$ dargestellt. Durch zweckmäßige Abstufung der Leiterhöhen einer Wicklung, deren Querverbindungen doppelt so lang sind wie die in Nuten eingebetteten Wicklungsteile, wird man also etwa 17% an Kupfer sparen, wenn der Wechselstromwiderstand gleich dem Widerstandsminimum bei gleich hohen Leitern ist.

Das Widerstandsverhältnis ist in Fig. 2 für $\lambda = 2$ eingetragen. Es hat für jede Schichtzahl denselben Wert, nämlich 1,07. Bei demselben Kupferaufwand erreicht man also durch zweckmäßigste Abstufung der Leiterhöhen eine Verringerung des Widerstandsminimums um nur 7%.

3. Einfluß der Schichtzahl. Die von Rogowski angegebene Regel (Gl. (1)) zur Bemessung der Leiterhöhe für kleinsten gesamten Wechselstromwiderstand setzt die Zahl der übereinander liegenden Leiterschichten als gegeben voraus. In der Praxis sind aber gewöhnlich nur die Zahl der gesamten Leiter einer Nut und die Nutbreite[1]) oder die gesamte Leiterbreite b (die Metallausfüllung) quer zur Nut gegeben. Die Zahl der Schichten kann noch willkürlich gewählt werden. Es entsteht somit die Frage, wie groß bei angenommenem Leiterquerschnitt die Zahl der Schichten zu wählen ist, damit der Wechselstromwiderstand ein Minimum wird.

Für kleine Werte von ξ (etwa $\xi \leqq 0{,}8$), die für $m > 2$ praktisch allein in Frage kommen, ist der Wechselstromwiderstand der ganzen Wicklung, bezogen auf die Leiterlänge 1,

[1]) Um die Leiterzahl einer Nut bestimmen zu können, muß der Induktionsfluß und die Nutenzahl gegeben sein. Aus Ankerlänge und größter zulässiger Zahninduktion ergibt sich dann die Nutbreite.

Digitized by Google

$$R = n \frac{\rho}{h\,b} \left\{ 1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)} \xi^4 \right\}. \quad [1] \qquad 4)$$

Wir setzen für alle Leiter denselben konstanten Querschnitt

$$q = h \frac{b}{n} \qquad 5a)$$

und eine vorgeschriebene Leiterzahl N in der Nut voraus,

$$N = n\,m, \qquad 5b)$$

und erhalten mit

$$h = \frac{q\,n}{b} = \frac{q\,N}{b\,m}$$

$$R = \frac{\rho}{q} \left\{ 1 + \frac{1}{9\,(1+\lambda)} \left(\frac{q\,N\,\alpha}{b} \right)^4 \frac{m^2 - 0{,}2}{m^4} \right\}. \qquad 5)$$

Wir erkennen ohne weiteres, daß der Wechselstromwiderstand um so kleiner wird, je größer die Schichtzahl m ist. Die Funktion $\frac{m^2 - 0{,}2}{m^4}$ ist in Fig. 5 über m aufgetragen; die zusätzliche Stromwärme ist bei konstantem Leiterquerschnitt dieser Funktion proportional. Mit Rücksicht auf geringe zusätzliche Stromwärme sind daher möglichst wenige Leiter in der Nut nebeneinander, möglichst viele übereinander anzuordnen[2]).

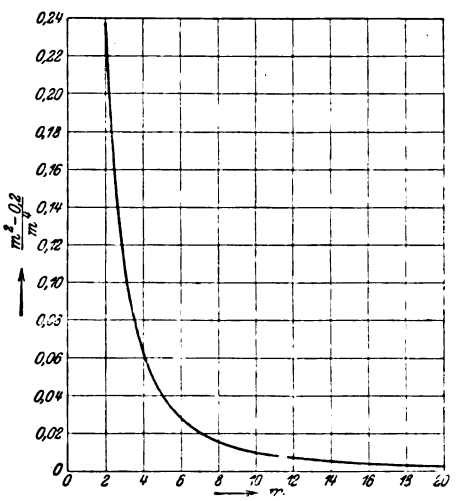


Fig. 5. Abhängigkeit der gesamten zusätzlichen Stromwärme von der Schichtzahl.

Dieses Ergebnis wird zunächst überraschen, weil nach den bekannten Formeln die zusätzliche Stromwärme ungefähr proportional dem Quadrat der Schichtzahl ist, bei unserer Annahme eines konstanten Querschnitts nimmt aber ξ umgekehrt proportional der Schichtzahl ab, und die zusätzliche Stromwärme ist der 4. Potenz von ξ proportional.

In Fig. 6 sind z. B. 5 verschiedene Nutenquerschnitte — alle mit derselben Leiterzahl und derselben Größe des Leiterquerschnitts, aber für verschiedene Querschnittsformen und Schichtzahlen — gezeichnet; die beigeschriebenen Zahlen sind ein Maß für die zusätzliche Stromwärme. Sie gelten unter der Bedingung, die wir bei unserer Ableitung voraussetzten, nämlich $\xi \leq 0{,}8$. Der Vorteil, bei gegebener Leiterzahl möglichst viele Leiter übereinander anzuordnen, ist also sehr bedeutend.

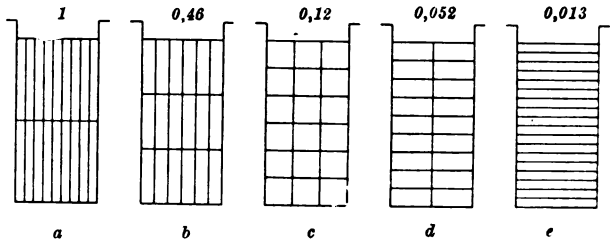


Fig. 6. Zusätzliche Stromwärme bei gleich großen Leiterquerschnitten, aber verschiedener Querschnittsform.

Es ist hier allerdings zu beachten, daß wir nur die zusätzliche Stromwärme berücksichtigt haben, die dem Quadrat des Stromes proportional ist und vom Nutenquerfelde, vom Streufelde, her-

[1]) Vgl. z. B. Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 109 und die Anmerkungen 4, S. 2 und 2 S. 5.

[2]) Rogowski hat schon auf S. 101 des Archivs, Bd. II, gezeigt, daß bei genügend kleinen Nuttiefen und Vernachlässigung der Querverbindungen das Widerstandsverhältnis mit der Schichtzahl abnimmt, nur ist er auf die große praktische Bedeutung dieser Tatsache für den Entwurf von Wechselstromwicklungen nicht näher eingegangen.

Digitized by Google

rührt. Es werden aber bei elektrischen Maschinen im allgemeinen auch vom Hauptfelde Wirbelströme in den Leitern induziert. Die Stromwärme dieser Wirbelströme wird praktisch nicht vom Belastungsstrom beeinflußt und ist von der Art der Nutung, dem Luftspalt und der Polschuhform abhängig. Sie ist um so größer, je breiter der Leiter ist. Die Anordnung nach Fig. 6e ist also in dieser Hinsicht am ungünstigsten. Diese vom Leiterstrom unabhängige Stromwärme beschränkt sich gewöhnlich auf die oberste Leiterschicht; bei halb geschlossenen Nuten ist sie gering.

Nachdem die Schichtzahl der Wicklung unter Berücksichtigung der vom Hauptfelde herrührenden Stromwärme und der Herstellungskosten festgelegt ist, kann der Leiterquerschnitt q oder die Höhe h nach der Regel (1) von Rogowski bestimmt werden.

3a. Parallelschaltung von Wicklungsteilen. Wir können der hier abgeleiteten Regel noch allgemeinere Bedeutung verleihen. Wir hatten zuletzt angenommen, daß die Zahl der Leiter einer Nut gegeben sei. Die Berechnung einer Maschine führt aber zunächst auf die gesamte Zahl der in Reihe geschalteten Leiter oder Windungen der ganzen Wicklung, und es steht dem Konstrukteur frei, passende, verschiedenen Nuten angehörige Teile der Wicklung parallel zu schalten. Es kommen hierfür hauptsächlich solche Wicklungsabteilungen in Frage, die um ganze Polteilungen am Ankerumfang gegeneinander versetzt sind und dieselbe Windungszahl haben (Parallelschaltung von „Polen").

Bezeichnen wir mit M die Zahl der Leiter einer Nut bei Reihenschaltung sämtlicher Spulen, so ist die Zahl der Leiter einer Nut bei u parallel geschalteten Spulen

$$N = u\,M = n\,m. \tag{6a}$$

Wir setzen ferner das Kupfergewicht oder den gesamten Kupferquerschnitt Q einer Nut als gegeben voraus, es ist

$$Q = h\,b\,m. \tag{6b}$$

Mit

$$h = \frac{Q}{b\,m}$$

und

$$n = \frac{u\,M}{m}$$

finden wir den gesamten Wechselstromwiderstand der Wicklung, der aus u parallelen Wicklungsabteilungen besteht, zu (vgl. (4))

$$R = \frac{1}{u}\,n\,\frac{\rho}{h\,b}\left\{1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\,\xi^4\right\}$$

$$R = \rho\,\frac{M}{Q}\left\{1 + \frac{1}{9\,(1+\lambda)}\left(\frac{\alpha\,Q}{b}\right)^4\frac{m^2 - 0{,}2}{m^4}\right\}. \tag{6}$$

Dieser Widerstand bezieht sich wieder auf die Leiterlänge 1. Die gesamte Länge der in Reihe geschalteten Leiter ist aber unabhängig von der Zahl der parallel geschalteten Spulen und gleich dem Produkte aus mittlerer Länge eines Leiters und Zahl der in Reihe geschalteten Leiter.

Wir lesen aus Gl. (6) die allgemeine Gültigkeit unseres Satzes: Bei gegebenem Kupfergewicht einer Wicklung wird der Wechselstromwiderstand um so kleiner, je größer die Schichtzahl ist. Da in (6) die Zahl (n) der nebeneinander liegenden Leiter nicht vorkommt, gilt auch hier, daß die Wicklung mit nur einem Leiter quer zur Nut immer den kleinsten Wechselstromwiderstand ergibt[1]).

Nach (6a) ist die Zahl der parallel geschalteten Spulen bei gegebener Zahl (n) der nebeneinander liegenden Leiter proportional der Schichtzahl. Der Wechselstromwiderstand wird also um so kleiner, je größer die Zahl (u) der parallel geschalteten Wicklungsabteilungen ist.

[1]) Aber nicht immer die kleinste gesamte Stromwärme, weil im allgemeinen auch das Hauptfeld in der obersten Leiterschicht Wirbelströme induziert.

Digitized by Google

Engineering Library

Die Abhängigkeit der zusätzlichen Stromwärme von der Schichtzahl m oder der Zahl $u = \frac{n}{M} m$ der parallel geschalteten Wicklungsteile wird wieder durch die Kurve in Fig. 5 dargestellt. Wir erkennen den außerordentlich großen Vorteil, den die Parallelschaltung von Wicklungsabteilungen gewährt, wenn es sich darum handelt, geringe zusätzliche Stromwärme zu erreichen. Bei einer Wicklung, die z. B. bei Reihenschaltung ($u = 1$) drei Leiterschichten verlangt, verringert sich der Wechselstromwiderstand durch Parallelschalten von zwei Spulengruppen ($u = 2$, entsprechend 6 Leiterschichten in der Nut) auf 27%, von 6 Spulengruppen ($u = 6$) auf nur 3% des Wertes bei Reihenschaltung sämtlicher Wicklungsteile. Da sich hierbei die Zahl der nebeneinander liegenden Leiter, also auch die Breite eines Leiters nicht ändert, so wird die Wirbelstromwärme, die vom Hauptfelde herrührt, mit der Vergrößerung der Zahl der Leiterschichten durch Parallelschalten von Wicklungsabteilungen nicht erhöht.

Beachtet man also die Vorschrift, nach der mit Rücksicht auf kleinsten Wechselstromwiderstand möglichst viele Leiterschichten in einer Nut übereinander anzuordnen sind, und verwirklicht sie durch Anordnung von genügend wenigen Leitern nebeneinander in einer Nut, und zwar vornehmlich durch Parallelschalten von genügend vielen Wicklungsabteilungen, so wird man selten, d. h. nur bei Wicklungen für verhältnismäßig niedrige Spannungen mit geringer Leiterzahl, die zusätzliche Stromwärme zu fürchten haben.

4. Quadratischer Leiterquerschnitt. Einen Sonderfall, der uns gleich auf kreisförmige Leiter führen wird, bilden Leiter von quadratischem Querschnitt.

Wir haben hier

$$\frac{b}{n} = h; \tag{7a}$$

außerdem setzen wir, wie im vorigen Abschnitt, die Zahl N der Leiter in der Nut als gegeben voraus;

$$N = n\,m. \tag{7b}$$

Der Wechselstromwiderstand ist jetzt (vgl. (4))

$$\left.\begin{aligned} R_q &= \frac{\rho}{h^2}\left\{1 + \left[\left(\frac{N\,h}{b}\right)^2 - 0{,}2\right]\frac{\xi^4}{9\,(1+\lambda)}\right\} \\ R_q &= \rho\,\alpha^2\,\frac{1}{\xi^2}\left\{1 + \left[\left(\frac{N}{b\,\alpha}\right)^2 \xi^2 - 0{,}2\right]\frac{\xi^4}{9\,(1+\lambda)}\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

er wird ein Minimum für

$$\xi = \xi_{q0} \cong \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}}\,\sqrt[3]{\frac{3\,\alpha\,b}{N}} \tag{8a}$$

oder

$$h = h_{q0} \cong \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}}\,\sqrt[3]{\frac{3\,b}{N\,\alpha^2}}, \tag{8b}$$

wenn wir $\frac{0{,}1\,\alpha^2\,b^2}{N^2}\,\frac{1}{\xi^2} = \frac{0{,}1}{m^2}$ gegen 1 in ξ^6 vernachlässigen.

In dieser Ableitung ist nicht die Voraussetzung enthalten, daß die Zahl n der nebeneinander liegenden Leiter und die Zahl m der übereinander liegenden Leiter ganze Zahlen sind. Das Ergebnis kann im allgemeinen nur dann praktisch verwertet werden, wenn man h_{q0} (zweckmäßig nach unten) abrundet, so daß n ganz wird. Das theoretische Minimum kann deshalb nur in Ausnahmefällen erreicht werden, wenn zufällig $n = \frac{b}{h_{q0}}$ eine ganze

Digitized by Google

Zahl wird[1]). Praktisch ist dies aber ganz ohne Belang, da das Minimum verhältnismäßig flach ist und man durch einen etwas kleineren Leiterquerschnitt keine merkbare Widerstandserhöhung erhält.

Bestimmen wir nun nach der Regel (1), welche keine Rücksicht auf die Querschnittsform der rechteckigen Leiter nimmt, die Leiterhöhe h_0 für dieselbe Schichtzahl, die bei quadratischen Leitern dem Widerstandsminimum entspricht $\left(m = \frac{N h_{q0}}{b}\right)$, und bilden das Verhältnis $\frac{h_{q0}}{h_0}$, wobei wir beachten, daß

$$\frac{b}{N} = \frac{h_{q0}}{m},$$

so erhalten wir

$$\frac{h_{q0}}{h_0} = \frac{\xi_{q0}}{\xi_0} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}\,\frac{m^2 - 0{,}2}{m^2}} \cong \sqrt[4]{1{,}5} = 1{,}107\ ^2). \qquad 9)$$

Der kleinste Wechselstromwiderstand ergibt sich also für Wicklungen mit quadratischem Leiterquerschnitt bei etwa 10% höherem ξ als bei Wicklungen mit beliebig rechteckigem Querschnitt[3]).

Beachten wir nun ferner, daß der Wechselstromwiderstand

$$R = n\,\frac{\rho}{b\,h}\left\{1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\,\xi^4\right\} \qquad 4)$$

ist und das erste Glied darin den Gleichstromwiderstand darstellt, so sehen wir durch Vergleich mit (9), daß die zusätzliche Stromwärme bei quadratischem Leiterquerschnitt 50% größer ist als bei rechteckigem Querschnitt (mit derselben Schichtzahl), wenn beide Wicklungen für kleinsten Wechselstromwiderstand entworfen werden. Der Wechselstromwiderstand bei quadratischen Leitern ist, wie wir gleich sehen werden, allerdings nur sehr wenig größer als bei rechteckigen Leitern.

Bei rechteckigem Leiterquerschnitt mit

$$\xi = \xi_0 = \sqrt[4]{\frac{3\,(1+\lambda)}{m^2 - 0{,}2}} \qquad 1)$$

ist der kleinste Wechselstromwiderstand

$$R_0 = n\,\frac{\rho}{b}\,\alpha\,\sqrt[4]{\frac{m^2 - 0{,}2}{3\,(1+\lambda)}}\left\{1 + \frac{1}{3}\right\}. \qquad 10)$$

---

[1]) Bei kreisförmigen Leitern, auf die uns die Untersuchung dieses Abschnittes führen wird, verlangt man gewöhnlich nicht, daß m und n ganze Zahlen sind, sondern man bewickelt die Nut im allgemeinen ohne besondere Rücksicht auf die Lage der einzelnen Drähte. Die Untersuchung des Abschnittes 4 kann auf diesen Fall übertragen werden, denn wir werden später, im Teil B dieser Arbeit (besonders Abschnitt 9), sehen, daß der Wechselstromwiderstand der ganzen Wicklung praktisch unabhängig von der Lage der Leiter ist, wenn die Leiterzahl der Nut und die Querschnittsform nicht geändert werden.

[2]) Ohne die in (8a) und (8b) enthaltene Vernachlässigung von $\frac{0{,}1}{m^2}$ gegen 1 ist der genauere Wert

$$\frac{\xi_{q0}}{\xi_0} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}\,\frac{m^2 - 0{,}2}{m^2 - 0{,}1}};$$

für m = 5 ist

$$\frac{\xi_{q0}}{\xi_0} = 0{,}999\,\sqrt[4]{1{,}5}.$$

[3]) Bei passender Leiterzahl N und passender Zahl n der nebeneinander liegenden Leiter kann das Widerstandsminimum nach Regel (1) auch auf quadratische Leiterquerschnitte führen; es gibt dann aber noch eine Wicklung mit quadratischen Leitern, die bei höherer Schichtzahl eine größere Leiterhöhe und einen kleineren Wechselstromwiderstand hat (vgl. die Beispiele 2a und 2b in Anmerkung 4 S. 13).

Digitized by Google

Für die Wicklung mit quadratischem Leiterquerschnitt erhalten wir nach (9), (4) und (10)

$$R_{q0} = \frac{1}{\sqrt[4]{1{,}5}} n \frac{\rho}{b} \alpha \sqrt[4]{\frac{m^2 - 0{,}2}{3(1+\lambda)}} \left\{1 + \frac{1}{2}\right\}.^{1}) \qquad 11)$$

Das Verhältnis dieser Widerstandsminima wird

$$\frac{R_{q0}}{R_0} = \frac{1{,}356}{1{,}333} = 1{,}017,^{2}) \qquad 12)$$

ist also noch nicht um 2% größer als 1.

Verringern wir die Leiterhöhe einer Wicklung, die bei quadratischem Leiterquerschnitt für kleinsten Wechselstromwiderstand entworfen ist, um etwa 10%, so würde hiernach der Wechselstromwiderstand noch um 1,7% kleiner werden. Verringern wir die Leiterhöhe noch mehr, so daß der Wechselstromwiderstand der Wicklung gleich dem kleinsten Wechselstromwiderstand R_{q0} bei quadratischem Leiterquerschnitt wird, so erhalten wir $\xi' = 0{,}895\,\xi_0$[3]): Eine Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand und quadratischem Leiterquerschnitt verlangt also eine Kupfervergeudung von

$$\frac{\xi_{q0}}{\xi'} - 1 = \frac{1{,}107\,\xi_0}{0{,}895\,\xi_0} - 1 = 24\%.^{4}) \qquad 13)$$

---

[1]) Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir Gl. (8a) in (7) einsetzen und 0,2 gegen m^2, oder bei Verwendung des genauen Wertes von ξ_{q0} 0,1 gegen m^2 vernachlässigen, entsprechend der Vernachlässigung in Gl. (9).

[2]) Die Vernachlässigung in Gl. (9) hat auf dieses Ergebnis keinen merklichen Einfluß.

[3]) Nach (4), (10), (11) und (12) muß sein

$$1{,}017\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\xi_0}{\xi'}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi'}{\xi_0}\right)^2\right\};$$

daraus folgt

$$\frac{\xi'}{\xi_0} = 0{,}8955.$$

[4]) Da die Verhältnisse nicht leicht zu übersehen sind, wollen wir zwei Beispiele zu Hilfe nehmen.

1. Es sei N = 110, b = 5,23, $\alpha = 1$, $\lambda = 1$.
   Wir erhalten
   a) für quadratische Leiter

$$\xi_{q0} = h_{q0} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5{,}23}{110}} = \mathbf{0{,}523},$$

$$n = 10, \quad m = 11,$$

$$R_{q0} = \mathbf{54{,}8}\,\rho,$$

   b) für dieselbe Schichtzahl (m = 11) wie bei a erhalten wir nach Regel (1) für beliebigen rechteckigen Leiterquerschnitt

$$\xi_0 = {}_0h = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{120}} = \mathbf{0{,}474},$$

$$R_0 = \mathbf{53{,}8}\,\rho,$$

   c) mit

$$\xi' = h' = 0{,}895\,\xi = 0{,}895 \cdot 0{,}474 = \mathbf{0{,}424}$$

   wird bei derselben Schicht- und Leiterzahl

$$R' = \mathbf{54{,}8}\,\rho.$$

   Man erkennt die Metallverschwendung bei quadratischen Leitern (1a).

2. Es sei N = 110, b = 5,46, $\alpha = 1$, $\lambda = 1$.
   a) Wir erhalten nach Regel (1) für rechteckigen Leiterquerschnitt und m = 10, n = 11, $\frac{b}{n} = 0{,}496$.

$$\xi_0 = h_0 = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{99}} = 0{,}496.$$

Digitized by Google

Durch Verringerung der Leiterhöhe können ohne Vergrößerung des Wechselstromwiderstandes 24% Kupfer gespart werden. Man sollte also Wicklungen mit quadratischem Leiterquerschnitt vermeiden, wenn man sich dem Widerstandsminimum nähern will.

Diese sehr auffallende Erscheinung erklärt sich dadurch, daß bei Wicklungen mit quadratischem Leiterquerschnitt die Verringerung der Leiterhöhe auch eine Verringerung der Leiterbreite zur Folge hat, so daß der Gleichstromwiderstand umgekehrt proportional dem Quadrat der Leiterhöhe ist, während bei rechteckigem Leiterquerschnitt nur die Leiterhöhe geändert zu werden braucht.

Die praktische Bedeutung dieses Ergebnisses darf jedoch nicht überschätzt werden. Da das Widerstandsminimum sehr flach ist und eine geringe Verkleinerung der Leiterhöhe noch keine bedeutende Widerstandszunahme zur Folge hat, so wird in den meisten praktischen Fällen die Leiterhöhe etwas kleiner bemessen werden als dem Widerstandsminimum entspricht. Die Kupferverschwendung wird dann durch Verwendung von quadratischen Leitern an Stelle von rechteckigen wesentlich kleiner als 24% sein. So findet man z. B. unter der Annahme, daß der Wechselstromwiderstand 10% größer ist als dem Widerstandsminimum mit rechteckigen Leitern entspricht, bei quadratischen Leitern nur noch eine Kupferverschwendung von etwa 9%[1]).

Die gesamte Breite ist hier so gewählt, daß sich ein quadratischer Leiterquerschnitt ergibt $\left(h_0 = \frac{b}{n}\right)$. Der Wechselstromwiderstand wird

$$R_0 = \mathbf{54{,}1}\,\rho.$$

b) Wir erhalten nach den Regeln (8a) und (8b) für quadratischen Leiterquerschnitt

$$\xi_{q0} = h_{q0} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5.46}{110}} = 0{,}533 \cong 0{,}546,$$

$$m = 11, \qquad n = 10,$$

$$R_{q0} = \mathbf{53{,}5}\,\rho,$$

also trotz der Abrundung von ξ_{q0} einen kleineren Widerstand als bei 2a (vgl. Anmerkung 3, S. 12).

c) Noch kleiner wird der Widerstand, wenn wir für die Wicklung 2b die Leiterhöhe nach Regel (1) bestimmen. Es wird

$$\xi_0 = h_0 = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{120}} = 0{,}474$$

und

$$R_0 = \mathbf{51{,}5}\,\rho.$$

[1]) Es wird für rechteckigen Leiterquerschnitt nach Gl. (4) und (10)

$$1{,}1\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\xi_0}{\xi_r}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi_r}{\xi_0}\right)^4\right\}$$

$$\frac{\xi_r}{\xi_0} = 0{,}758,$$

für quadratischen Leiterquerschnitt nach Gl. (7), (11) und (12)

$$\frac{1{,}100}{1{,}017}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cong \left(\frac{\xi_{q0}}{\xi_q}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_q}{\xi_{q0}}\right)^6\right\},$$

$$\frac{\xi_q}{\xi_{q0}} = 0{,}863,$$

und das Verhältnis der Kupfergewichte bei Beachtung von Gl. (9)

$$\frac{G_q}{G_r} = \frac{0{,}863^2}{0{,}758\,\frac{1}{1{,}107}} = 1{,}088.$$

Digitized by Google

4a. Einfluß des spezifischen Widerstandes. Die Leiterhöhe einer Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand und quadratischem Leiterquerschnitt hatten wir früher zu

$$h_{q0} \cong \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}} \sqrt[3]{\frac{3\,b}{N\,\alpha^2}} \qquad 8b)$$

bestimmt. Mit

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{b}{\rho}\frac{P}{a}}$$

erhalten wir

$$h_{q0} \cong \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{(2\pi)^2}\frac{a}{N\,P}} \cdot \sqrt[3]{\rho}. \qquad 8c)$$

Die Leiterhöhe h_{q0} ist proportional der dritten Wurzel aus dem spezifischen elektrischen Widerstand. Bei einer Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand und quadratischen Leitern verhalten sich also die Leiterquerschnitte wie die dritten Wurzeln aus dem Quadrat der spezifischen Widerstände.

Setzen wir in Gl. (7) den Wert h_{q0} nach (8c) ein und vernachlässigen 0,2 gegenüber $\left(\frac{N\,h_{q0}}{b}\right)^2 = m^2$, so wird der kleinste Wechselstromwiderstand bei quadratischem Leiterquerschnitt

$$R_{q0} \cong \sqrt[3]{\frac{2^5 \cdot \pi^4}{9\,(1+\lambda)}\left(\frac{N\,P}{a}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\rho}\left(1 + \frac{1}{2}\right). \qquad 14)$$

Die eingeklammerten Glieder stellen das Verhältnis von Wechselstromwiderstand zu Gleichstromwiderstand bei quadratischen Leitern vom Querschnitt h_{q0}^2 dar; es ist $^3/_2$, wie wir schon früher gesehen hatten (vgl. Gl. (11)). Der kleinste Wechselstromwiderstand einer Wicklung mit quadratischen Leitern ist also proportional der dritten Wurzel aus dem spezifischen Widerstand (ρ) des Leitermetalls.

Eine Wicklung für kleinsten Wechselstromwiderstand mit quadratischen Leitern aus Aluminium hat deshalb $\sqrt[3]{1,7} = 1,193$ mal größeren Wechselstromwiderstand als eine solche Wicklung aus Kupfer; der Leiterquerschnitt der Aluminiumwicklung ist dabei $\sqrt[3]{1,7^2} = 1,425$ mal so groß, wie der der Kupferwicklung[1]).

5. Kreisförmiger Leiterquerschnitt. Wir denken uns einen Leiter von beliebigem Querschnitt im Nutenfelde, das von Wechselströmen erregt wird, die unter dem betrachteten Leiter fließen (vgl. Fig. 7). Der Leiter befindet sich dann bei parallelen Nutenflanken und Vernachlässigung der Rückwirkung der Strömung in diesem Leiter in einem homogenen Wechselfelde

$$\mathfrak{H}_0 = H_0 \sin \omega t. \qquad 15a)$$

Es gilt nach dem Induktionsgesetz — elektrische Umlaufspannung gleich magnetischem Schwund[2]) — für die Strömung (Stromdichte) i_0

$$\rho \frac{\partial i_0}{\partial x}\,dx = -\omega H_0 \cos \omega t \cdot dx$$

$$i_0 = C - \frac{\omega}{\rho} H_0 \cos \omega t \cdot x \qquad 16)$$

und zwar unabhängig von der Querschnittsform. C ist die Integrationskonstante.

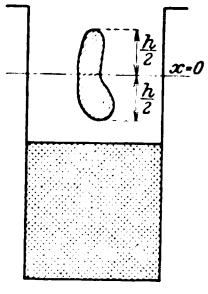


Fig. 7.

[1]) Über Temperaturzunahme und Preis von solchen Wicklungen vgl. Abschnitt 8a und Anmerkung 1, S. 29.

[2]) Mit magnetischem Schwund bezeichnet man nach einem Vorschlage von Emde die zeitliche Abnahme des Induktionsflusses.

Digitized by Google

Für Leiter, deren Querschnittsfläche zur Koordinate $x = o$ symmetrisch ist, muß

$$i_0 = o \text{ für } x = o \qquad 15b)$$

sein, die Integrationskonstante ist also in diesem Falle null und

$$i_0 = -\frac{\omega}{\rho} H_0 \cos \omega t \cdot x^1). \qquad 15)$$

Für rechteckige Leiter mit der Höhe h und der Breite β ist die Wirbelstromwärme im Leiter von der Länge 1

$$Q_r = 2 \rho \beta \int_0^{h/2} i_0^2 \, dx = \frac{\omega^2 \beta}{\rho} H_0^2 \cos^2 \omega t \cdot \frac{h^3}{12}, \qquad 17)$$

für quadratischen Leiterquerschnitt mit $\beta = h$

$$Q_q = \frac{\omega^2}{\rho} H_0^2 \cos^2 \omega t \cdot \frac{h^4}{12}. \qquad 18)$$

Für kreisförmige Leiter mit dem Durchmesser d erhalten wir (vgl. Fig. 8)

$$Q_k = 2 \rho \int_0^{d/2} \beta (x) \, i_0^2 \, dx = 2 \rho \int_0^{d/2} 2 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2} \, i_0^2 \, dx$$

$$Q_k = \frac{\omega^2}{\rho} H_0^2 \cos^2 \omega t \cdot \frac{\pi}{2^6} d^4.^2) \qquad 19)$$

Das Verhältnis der Wirbelstromwärme bei kreisförmigen Leitern zu der bei quadratischen Leitern wird daher

$$\frac{Q_k}{Q_q} = \frac{12 \pi}{2^6} = 0{,}59, \qquad 20)$$

wenn der Querschnitt der quadratischen Leiter gleich dem Quadrat des Durchmessers der kreisförmigen Leiter ist, d. h. wenn die Bedingung besteht,

$$h = d. \qquad 20a)$$

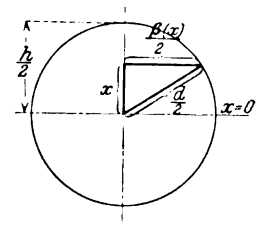


Fig. 8.

Hierbei ist die Rückwirkung der Wirbelströme auf das homogen gedachte Wechselfeld $\mathfrak{H}_0$ vernachlässigt[3]). Bestimmen wir die Wechselströmung zweiter Ordnung, die das von der Strömung i_0 erregte Feld[4]) in

[1]) Dieses gilt für die Strömung erster Ordnung (Vernachlässigung der Rückwirkung) auch bei unsymmetrischer Querschnittsfläche, wenn nur die Koordinate $x = o$ die Querschnittsfläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt.

[2]) Es ist

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x (2 x^2 - a^2)}{8} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{4}{a} \Big|_0^a = \frac{a^4}{8} \frac{\pi}{2},$$

vgl. z. B. G. Petit Bois, Tafeln unbestimmter Integrale S. 44.

[3]) Für die Stromwärme in rechteckigen Leitern ist zwar die strenge Lösung (d. h. mit Berücksichtigung der Rückwirkung) in Form eines geschlossenen Ausdrucks bekannt. Es wird hier aber die Rückwirkung getrennt bestimmt, um den Vergleich mit kreisförmigen Leitern übersichtlicher zu gestalten.

[4]) Nach dem Satz vom Linienintegral der magnetischen Feldstärke — magnetische Umlaufspannung gleich dem 4π-fachen der Durchflutung — bestimmt sich diese Feldstärke zweiter Ordnung aus

$$a \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial x} dx = 4 \pi b \, dx \, i_0$$

zu

$$\mathfrak{H}' = C - \frac{4 \pi b \omega H_0 \cos \omega t}{a \rho} \frac{x^2}{2}.$$

Digitized by Google

einem quadratischen Leiter induziert, so erhalten wir

$$i' = -\frac{\omega}{\rho} H_0 \sin\omega t \cdot x \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \right\} \xi^2$$

und für die Strömung dritter Ordnung, die das von der Strömung i' erregte Feld induziert,

$$i'' = -\frac{\omega}{\rho} H_0 \cos\omega t \cdot x \left\{ -\frac{5}{96} + \frac{1}{48}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 - \frac{1}{480}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \right\} \xi^4.$$

Vernachlässigen wir die Strömungen höherer Ordnung, so ist die resultierende Strömung

$$\begin{aligned} i &= i_0 + i' + i'' \\ &= -\frac{\omega}{\rho} H_0 x \left\{ \cos\omega t \left[1 - \frac{5}{96}\xi^4 + \frac{1}{48}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xi^4 - \frac{1}{480}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \xi^4 \right] \right. \\ &\qquad \left. + \sin\omega t \left[\frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xi^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Glieder gegen 1 vernachlässigen, die

$$\leqq \frac{10}{4608}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xi^8$$

sind,

$$\begin{aligned} i &\cong -\frac{\omega}{\rho} H_0 x \sqrt{1 - \frac{1}{24}\xi^4 + \frac{1}{360}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \xi^4} \sin(\omega t + \varphi) \\ &= i_0 \sqrt{1 - \frac{1}{24}\xi^4 + \frac{1}{360}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \xi^4} \, \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin\omega t \cdot} .^1) \end{aligned}$$

Der größte Wert von $\frac{x}{\frac{h}{2}}$ im dritten Gliede unter der Wurzel ist 1 $\left(\text{für } x = \frac{h}{2}\right)$, so daß mit $\xi = 0{,}8$, dem größten Wert, der für alle Wicklungen mit mehreren Leiterschichten praktisch in Frage kommen könnte,

---

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Bedingung

$$\mathfrak{H}'_{x = \pm\frac{h}{2}} = 0,$$

so daß

$$\mathfrak{H}' = \frac{4\pi b \omega H_0 \cos\omega t}{a\rho}\left(\frac{h^2}{2^3} - \frac{x^2}{2}\right) = H_0 \cos\omega t \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \right\} \frac{\xi^2}{4}.$$

[1]) Es ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \frac{5}{96}\xi^4 + \frac{1}{48}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xi^4 - \frac{1}{480}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \xi^4}{\frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^2 \xi^2},$$

doch hat die Größe des Phasenwinkels φ keinen Einfluß auf die Stromwärme.

Digitized by Google

$$\frac{1}{360}\left(\frac{x}{\frac{h}{2}}\right)^4 \xi^4 \leq 0{,}00114$$

wird. Dasselbe Glied kommt noch viel weniger gegen 1 in Betracht, wenn wir zur Bestimmung der Stromwärme

$$Q = 2\rho\beta \int_0^{h/2} i^2 dx$$

von $x = 0$ bis $x = \frac{h}{2}$ integrieren.

Berücksichtigen wir also bei quadratischen Leitern die Rückwirkung der Strömung auf das von den untern Leitern erregte Feld, so wird die Stromwärme mit $\xi = 0{,}8$, einem Wert, der bei kreisförmigen Leitern wohl niemals erreicht wird,

$$1 - \frac{1}{24}\xi^4 = 0{,}9833$$

mal so groß wie bei Vernachlässigung der Rückwirkung.

Für kreisförmige Leiter ist die Rückwirkung ebenfalls vorhanden, ist aber etwas geringer, weil der kreisförmige Querschnitt kleiner ist als der des umschriebenen Quadrats und nach Gl. (15) die Stromdichte in gleichen Entfernungen von der Koordinate $x = 0$ für beide Querschnittsformen denselben Wert hat. Ohne erst die Größe der Rückwirkung bei kreisförmigen Leitern zu bestimmen, sehen wir, daß der Fehler durch Vernachlässigung der Rückwirkung im Verhältnis $\frac{Q_k}{Q_q}$ (Gl. (20)) verschwindend klein wird. Er betrüge ja in den meisten praktischen Fällen sogar weit weniger als 1,7%, wenn wir die Rückwirkung bei quadratischem Leiterquerschnitt berücksichtigten, bei kreisförmigem aber ganz vernachlässigten.

In Wirklichkeit wird der betrachtete Leiter ebenfalls von außen mit Strom gespeist. Für die hier in Frage kommenden Werte ξ wird aber die zusätzliche Stromwärme durch das Feld, das die von außen eingeleiteten Ströme der Leiterschicht erregen, welcher der betrachtete Leiter angehört, nur wenig geändert; sie ist vernachlässigbar klein, wenn dieses Feld allein vorhanden ist, wie z. B. in der untersten Schicht, für die wir setzen durften $\varphi(\xi) \cong 1$ (vgl. 2a)). Es wird deshalb genügen, auch das Eigenfeld als homogenes Feld von mittlerer Stärke in Rechnung zu setzen. Dann erhält aber Gl. (20) allgemeine Gültigkeit: Für jeden vom Strome durchflossenen Leiter der Nut ist die zusätzliche Stromwärme bei kreisförmigem Leiterquerschnitt 0,59 von der bei quadratischem Leiterquerschnitt, wenn der Durchmesser des kreisförmigen Leiters gleich der Höhe des quadratischen Leiters ist.

Wenn die Zahl der übereinander liegenden Leiterschichten m gegeben ist, so gilt für quadratische Leiter mit dem Querschnitt h^2 nach (4)

$$\left.\begin{aligned} R_q &= \frac{\rho}{h^2}\left\{1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9(1+\lambda)}\xi^4\right\} \\ R_q &= \frac{\rho}{h^2} + \frac{m^2 - 0{,}2}{9(1+\lambda)}\frac{\rho}{h^2}\xi^4, \end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

worin das erste Glied den Gleichstromwiderstand und das zweite den zusätzlichen Wechselstromwiderstand darstellt, der durch Multiplikation mit dem Quadrat des Stromes die zusätzliche Stromwärme Q_q bestimmt.

Für Wicklungen mit kreisförmigen Leitern mit dem Durchmesser

$$d = h \qquad 22a)$$

erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehung (20)

Digitized by Google

Engineering Library

$$R_k = \frac{\rho}{d^2}\frac{4}{\pi} + Q_k = \frac{\rho}{d^2}\frac{4}{\pi} + 0{,}59\,\frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\,\frac{\rho}{d^2}\,\xi^4$$

$$R_k = \frac{\rho}{d^2}\frac{4}{\pi}\left\{1 + 0{,}463\,\frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\,\xi^4\right\}. \qquad (22)$$

Die Werte in den geschweiften Klammern von Gl. (21) und (22) stellen die Verhältnisse von Wechselstromwiderstand zu Gleichstromwiderstand dar, und wir erkennen, daß sich das Widerstandsverhältnis für Wicklungen mit kreisförmigen Leitern mit dem Durchmesser d aus dem Widerstandsverhältnis für Wicklungen mit quadratischen Leitern (21) ergibt, wenn wir setzen

$$\xi_k = \sqrt[4]{0{,}463}\;\xi_{h=d} = 0{,}825\;\xi_{h=d}. \qquad 23)$$

Um den Leiterdurchmesser zu bestimmen, bei dem der Wechselstromwiderstand der Wicklung bei gegebener Leiterzahl N der Nut und gegebener Leiterbreite b = nd quer zur Nut ein Minimum wird, schreiben wir (vgl. Gl. (7))

$$R_k = \frac{\rho}{d^2}\frac{4}{\pi}\left\{1 + 0{,}463\left[\left(\frac{Nd}{b}\right)^2 - 0{,}2\right]\frac{\alpha^4 d^4}{9\,(1+\lambda)}\right\} \qquad 24)$$

und finden, wenn wir $\frac{0{,}1}{m^2}$ gegenüber 1 vernachlässigen,

$$d_0 = \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2\cdot 0{,}463}}\sqrt[3]{\frac{3\,b}{N\alpha^2}} = 1{,}137\sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}}\sqrt[3]{\frac{3\,b}{N\alpha^2}}. \qquad 25)$$

Für quadratische Leiter ergab sich das Minimum des Wechselstromwiderstandes bei

$$h_{q0} = \sqrt[6]{\frac{1+\lambda}{2}}\sqrt[3]{\frac{3\,b}{N\alpha^2}}. \qquad 8\,b)$$

Der Leiterdurchmesser einer Wicklung mit kleinstem Wechselstromwiderstand und kreisförmigen Leitern ist also 1,137 mal so groß wie die Leiterhöhe einer solchen Wicklung mit quadratischem Leiterquerschnitt, wenn in beiden Fällen gleiche Leiterzahlen der Nuten, $N_k = N_q$, und dieselbe Metallbreite quer zur Nut, $b = n_k d = n_q h$, also auch dieselbe Nutbreite vorausgesetzt wird.

Vergleichen wir Gl. (25) mit (8b) und (24) mit (7), so sehen wir bei Berücksichtigung der schon früher für zulässig erkannten Vernachlässigungen, daß das Verhältnis von kleinstem Wechselstromwiderstand zum Gleichstromwiderstand (das durch die geschweiften Klammern in (7) und (24) dargestellt wird) für quadratische und runde Querschnitte denselben Wert hat, nämlich $^3/_2$ (vgl. auch Gl. (26) und (27)).

Wir können jetzt noch das Verhältnis der kleinsten Wechselstromwiderstände bei kreisförmigen und quadratischen Leitern bilden. Es ist für Wicklungen mit quadratischen Leitern nach (7) und (11)

$$R_{q0} = \frac{\rho}{h_0^2}\left\{1 + \left[\left(\frac{N\,h_0}{b}\right)^2 - 0{,}2\right]\frac{\alpha^4 h_0^4}{9\,(1+\lambda)}\right\}$$

$$R_{q0} \cong \frac{\rho}{h_0^2}\cdot\frac{3}{2}. \qquad 26)$$

Für Wicklungen mit kreisförmigen Leitern erhalten wir nach (7) und (24)

$$R_{k0} = \frac{\rho}{d_0^2}\frac{4}{\pi}\left\{1 + 0{,}463\left[\left(\frac{N\,h_0}{b}\right)^2 - 0{,}2\right]\frac{\alpha^4 d_0^4}{9\,(1+\lambda)}\right\}$$

$$R_{k0} \cong \frac{\rho}{1{,}137^2\,h_0^2}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{3}{2}. \qquad 27)$$

Das Verhältnis dieser Widerstände ist

$$\frac{R_{k0}}{R_{q0}} = \frac{4}{1{,}137^2\,\pi} = 0{,}986, \qquad 28)$$

Digitized by Google

beide Widerstandsminima haben also fast denselben Wert. Die Kupfergewichte der beiden Wicklungen verhalten sich wie ihre Querschnitte

$$\frac{d_0^2 \frac{\pi}{4}}{h_0^2} = 1{,}013. \qquad 29)$$

Eine Wicklung mit kreisförmigem Leiterquerschnitt ist also der mit quadratischem Leiterquerschnitt fast gleichwertig, wenn beide Wicklungen für kleinsten Wechselstromwiderstand bemessen sind[1]).

Die kleinsten Wechselstromwiderstände bei rechteckigem, quadratischem und kreisförmigem Leiterquerschnitt verhalten sich wie

$$R_{r0} : R_{q0} : R_{k0} = 1{,}000 : 1{,}017 : 1{,}003,$$

ihre Metallgewichte wie

$$G_{r0} : G_{q0} : G_{k0} = 1{,}000 : 1{,}107 : 1{,}121,$$

wenn die Wicklung mit rechteckigem Leiterquerschnitt dieselbe Schichtzahl wie die mit quadratischen Leitern hat.

Da man bei quadratischen und kreisförmigen Leitern die Schichtzahl nicht mehr willkürlich wählen kann, wenn man sich dem Widerstandsminimum nähern will, so läßt sich die zusätzliche Stromwärme bei gegebenem Leiterquerschnitt nur durch Paralallelschalten von Wicklungsabteilungen wirksam verringern (vgl. Abschnitt 3a).

5a. Der Einfluß des spezifischen Widerstandes ist bei Wicklungen mit kreisförmigem Leiterquerschnitt derselbe wie bei solchen mit quadratischem Querschnitt (Gl. (8c) und (14)). Dies folgt aus den Gl. (24) und (25). Die Leiterdurchmesser von Wicklungen für kleinsten Wechselstromwiderstand verhalten sich also bei gegebener Leiterzahl der Nut und gegebener gesamter Kupferbreite (b = nd) wie die dritten Wurzeln aus den spezifischen Widerständen; in demselben Verhältnis stehen die Wechselstromwiderstände. Die Leiterquerschnitte verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus dem Quadrat der spezifischen Widerstände.

B. Wicklungen für kleinste Temperaturzunahme.

6. Günstigste Leiterhöhe. Im Teil A dieser Arbeit sind die Gesichtspunkte eingehend besprochen worden, die beim Entwurf von Wicklungen mit kleinstem Wechselstromwiderstand unter gewissen Voraussetzungen zu beachten sind. In der Praxis muß jedoch die Forderung nach geringster Stromwärme, also bestem Wirkungsgrad, sehr häufig gegenüber der viel wichtigeren nach geringer Temperaturzunahme der Wicklung zurücktreten.

Die Bedingungen für kleinste Stromwärme einer Wicklung sind nicht dieselben wie für kleinste Temperaturzunahme. Wie schon Rogowski[2]) gezeigt hat, ist die Temperaturzunahme noch von der abkühlenden Oberfläche der Wicklung abhängig; es ist aber auch zu berücksichtigen, daß die Stromwärme bei Wechselstromwicklungen nicht in allen Raumteilen denselben Wert hat, in den obern Leiterschichten z. B. wesentlich größer ist als in den untern. Ich habe auch bereits in einer früheren Arbeit[3]) gezeigt, daß bei Kommutatorankerwicklungen die gesamte Stromwärme mit Rücksicht auf geringe Höchsttemperatur nicht das Widerstandsminimum erreichen darf.

Rogowski hat die Temperaturzunahme umgekehrt proportional der Leiterhöhe gesetzt und unter dieser Annahme abgeleitet, daß die Höhe der Leiter mit Rücksicht auf kleinste Temperaturzunahme größer zu bemessen ist als die Leiterhöhe, die dem Wider-

[1]) Über die Erwärmung vgl. jedoch den Abschnitt 8a, besonders den Schlußsatz.
[2]) Rogowski, Archiv f. E., Bd. II, S. 527.
[3]) Richter, Archiv f. E., Bd. III, S. 184.

Digitized by Google

standsminimum entspricht. Er hat hierbei aber nur mit dem Mittelwert der Stromwärme in den m Leiterschichten gerechnet und die Leiterhöhe für das Temperaturminimum mit der Leiterhöhe verglichen, die bei Vernachlässigung der Querverbindungen ($\lambda = 0$) dem kleinsten Wechselstromwiderstand entspricht. Diese Ansätze sind nicht gerechtfertigt. Für die Betriebssicherheit und die Lebensdauer einer Wicklung ist nicht ihre mittlere, sondern ihre höchste Temperatur maßgebend, und da nur ein geringer Wärmeaustausch zwischen den von einander gut isolierten Leitern stattfinden kann, so sollte die Leiterhöhe so bestimmt werden, daß die Temperaturzunahme in der Leiterschicht ein Minimum wird, wo die höchste Temperatur zu erwarten ist, d. h. in der obersten Leiterschicht. Es wäre also zur Bestimmung des Temperaturminimums nicht die Funktion

$$T' = n\frac{\rho}{b}\alpha^2 \cdot \frac{1}{\xi^2}\left\{\varphi(\xi) + \frac{m^2-1}{3}\psi(\xi)\right\} \cong n\frac{\rho}{b}\alpha^2 \cdot \frac{1}{\xi^2}\left(1 + \frac{m^2-1}{9}\xi^4\right),^{1})$$

sondern die Funktion

$$T = n\frac{\rho}{b}\alpha^2 \cdot \frac{1}{\xi^2}\left\{\varphi(\xi) + (m^2-m)\psi(\xi)\right\} \cong n\frac{\rho}{b}\alpha^2 \cdot \frac{1}{\xi^2}\left(1 + \frac{m^2-m}{3}\xi^4\right) \qquad 30)$$

zu untersuchen. Das Minimum liegt bei

$$\xi = \xi_t \cong \sqrt[4]{\frac{3}{m^2-m}}. \qquad 31)$$

Hiermit ist der Wert von $\xi = \xi_0$ zu vergleichen, der das Widerstandsminimum der Wicklung ergibt:

$$\xi_0 = \sqrt[4]{\frac{3(1+\lambda)}{m^2-0{,}2}}. \qquad 1)$$

Für den theoretischen Grenzfall mit $\lambda = 0$, der sich aber praktisch nicht verwirklichen läßt, treten beide Minima fast bei demselben ξ oder derselben Leiterhöhe auf, für alle praktisch in Frage kommenden Werte λ ist dagegen die Leiterhöhe bei kleinster Temperatur nur etwa $\frac{1}{\sqrt[4]{1+\lambda}}$ mal so groß wie bei kleinstem Wechselstromwiderstand. Man wird also auch mit Rücksicht auf kleinste Höchsttemperatur die Leiterhöhe niemals größer wählen als dem Widerstandsminimum entspricht. Für die sehr häufig vorkommende Wicklung mit $\lambda = 2$ erhalten wir nach Gl. (30) und (1)

$$\xi_t \cong \frac{1}{\sqrt[4]{1+\lambda}}\xi_0 = 0{,}76\,\xi_0. \qquad 32)$$

Es darf allerdings auch die gesamte Stromwärme der Wicklung nicht zu hohe Werte annehmen, weil sie die Temperatur der Umgebung der Leiter beeinflußt; so ist z. B. die Temperaturzunahme der Kühlluft ungefähr proportional der Stromwärme[2]). Man hat hier aber zu unterscheiden zwischen der Stromwärme in den Querverbindungen und der innerhalb des Ankers. Jene ist für die Längeneinheit des Leiters an sich schon geringer als

---

[1]) Vgl. Archiv f. E., Bd. II, S. 528. Der Wert ξ_k ist dort übrigens irrtümlich zu $\frac{2{,}6}{\sqrt[3]{m^2}}$ angegeben, denn die Rechnung ergibt $\sqrt[4]{\frac{9}{m^2-1}}$.

[2]) Bei strenger Behandlung des Problems müßte man unterscheiden zwischen axialer und radialer Kühlung und bei der letzten auch zwischen Wicklungen im innern und solchen im äußern Teil der Maschine. Bei jenen Wicklungen wird die oberste Leiterschicht zuletzt, bei diesen zuerst von der Kühlluft umspült. Auf diese Unterschiede soll hier nicht Rücksicht genommen werden.

Digitized by Google

diese, weil dort die zusätzliche Stromwärme zu vernachlässigen ist; außerdem sind aber auch die Abkühlungsbedingungen für die Querverbindungen viel günstiger als für den in Nuten eingebetteten Wicklungsteil. Die gesamte Stromwärme der in Nuten eingebetteten Teile wird ein Minimum für

$$\xi_0' = \xi_{0\lambda=0} = \sqrt[4]{\frac{3}{m^2 - 0{,}2}}. \qquad 33)$$

Diese Bedingung deckt sich also fast mit (31); so daß auch bei Berücksichtigung der gesamten Stromwärme im Anker die Leiterhöhe einer Wicklung mit kleinster Temperaturzunahme nur etwa $\frac{1}{\sqrt[4]{1+\lambda}}$ mal so groß zu bemessen ist wie mit Rücksicht auf kleinsten Wechselstromwiderstand.

6a. Quadratischer und kreisförmiger Leiterquerschnitt. Auch für quadratische und kreisförmige Leiter führt die Untersuchung zu einem ähnlichen Ergebnis.

Aus Gl. (2) und (2a) erhält man für einen Leiter der obersten Schicht innerhalb der Nut (vgl. auch Gl. (7))

$$R_{q_{m,\lambda=0}} \cong \rho\,\alpha^2 \frac{1}{\xi^2}\left\{1 + \left[\left(\frac{N}{b\alpha}\right)^2 \xi^2 - \left(\frac{N}{b\alpha}\right)\xi\right]\frac{\xi^4}{3}\right\}. \qquad 34)$$

Die Temperaturzunahme setzen wir wieder proportional dem Verhältnis aus Stromwärme der obersten Leiterschicht innerhalb der Nut und Leiterhöhe, also proportional

$$T_q = \frac{\frac{N}{h} R_{q_{m,\lambda=0}}}{h}\ ^{1)} \cong \rho\, N\, \alpha^4 \frac{1}{\xi^4}\left\{1 + \left[\left(\frac{N}{b\alpha}\right)^2 \xi^2 - \left(\frac{N}{b\alpha}\right)\xi\right]\frac{\xi^4}{3}\right\} \qquad 35)$$

und erhalten das Minimum bei

$$\xi_{qt} \cong \sqrt[6]{6\left(\frac{b\alpha}{N}\right)^2}, \qquad 36)$$

wenn wir in dem Ausdruck unter der Wurzel $\frac{1}{2}\frac{b\alpha}{N}\frac{1}{\xi_{qt}} = \frac{1}{2m}$ gegen 1 vernachlässigen. Da es sich bei quadratischen Leitern immer um eine größere Zahl von Leiterschichten handelt, so ist diese Vernachlässigung berechtigt.

Vergleichen wir den Wert ξ_{qt} mit dem Wert von $\xi = \xi_{q0}$, bei dem der Wechselstromwiderstand einer Wicklung mit quadratischen Leitern ein Minimum ist (Gl. (8a)), so finden wir

$$\frac{\xi_{qt}}{\xi_{q0}} = \frac{h_{qt}}{h_{q0}} = \sqrt[6]{\frac{4}{3(1+\lambda)}}. \qquad 37)$$

Dasselbe Verhältnis erhält man bei kreisförmigen Leitern aus Gl. (24) und (25) für die Durchmesser

$$\frac{d_t}{d_0} = \frac{h_{qt}}{h_{q0}} = \sqrt[6]{\frac{4}{3(1+\lambda)}}. \qquad 38)$$

Man wird also auch bei quadratischen und kreisförmigen Leitern die Leiterhöhe niemals größer wählen als dem Widerstandsminimum entspricht. Für eine Wicklung mit $\lambda = 2$ erhalten wir:

$$h_{qt} = 0{,}875\, h_{q0},$$
$$d_t = 0{,}875\, d_0.$$

[1]) Die Zahl der in einer Schicht liegenden Leiter ist $\frac{N}{h}$.

Digitized by Google

6b. Abstufung der Leiterhöhen. Bei vorgeschriebener gesamter Leiterhöhe in der Nut, also vorgeschriebenem Kupfergewicht, erhält man die kleinste Höchsttemperatur, wenn die Wicklung so entworfen wird, daß die mittleren Temperaturen der einzelnen Leiterschichten einander gleich sind. Unter der Voraussetzung, daß jedes Flächenelement der Nutflanken dieselbe Wärme abführt, wird dies durch solche Abstufung erreicht, daß die Funktion (30) für jede Schicht (p = m) denselben Wert annimmt. In Fig. 9 ist die Funktion

$$\frac{1}{\xi^2}\left(1+\frac{p^2-p}{3}\xi^4\right) \qquad 30')$$

über ξ für 10 Leiterschichten aufgetragen. Die Schnittpunkte[1]) dieser Kurven mit Parallelen zur Abszissenachse ergeben die den Leiterhöhen proportionalen ξ bei gleichen (mittleren) Temperaturen in allen Leiterschichten. Die Leiterhöhen sollten also mit der Ordnungszahl der Schicht wachsen[2]), während wir im Abschnitt 2 gefunden hatten, daß mit Rücksicht auf kleinsten Wechselstromwiderstand (günstigsten Wirkungsgrad) die Abstufung der Leiter in umgekehrtem Sinne erfolgen muß. Das ist ein weiterer Grund, auf die Abstufung der Leiterhöhen (wenigstens bei größerer Schichtzahl als zwei) zu verzichten und die billigere Wicklung mit gleichen Leiterhöhen auszuführen.

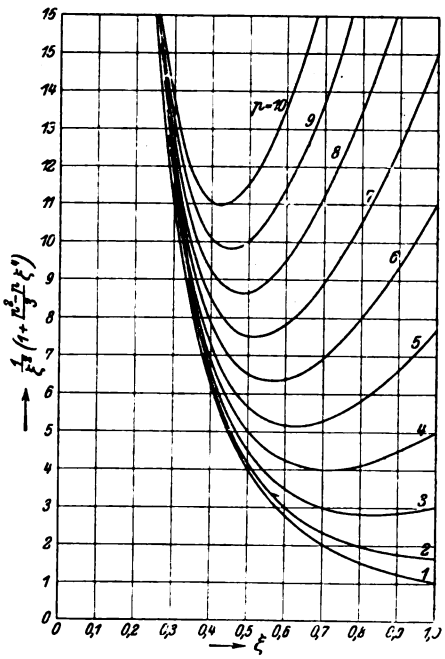


Fig. 9. Temperaturzunahme in den einzelnen Wicklungsschichten als Funktion der Leiterhöhe $h = \frac{\xi}{\alpha}$.

7. Vergrößerung der wärmeabführenden Oberfläche der Nut. Aber auch bei Wicklungen, die nach den Gesichtspunkten des letzten Abschnitts entworfen sind, wird es häufig nur bei einer sehr ausgiebigen künstlichen Kühlung möglich sein, die in den Nuten entwickelte Wärme abzuführen, weil die Leiterhöhe zu niedrig ist und die Oberfläche der Nut nicht ausreicht, um die innerhalb der Nut entwickelte Wärme bei gegebenem Temperaturgefälle abzuleiten. Eine beträchtliche Abführung der Wärme innerhalb der Leiter

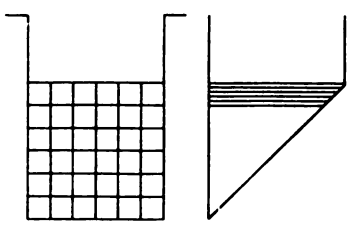


Fig. 10a.

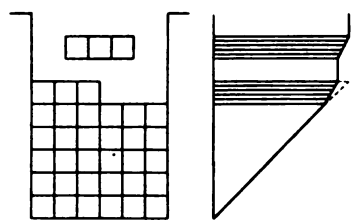


Fig. 10b.

zu den kälteren Querverbindungen tritt erfahrungsgemäß nicht auf, jedenfalls wird der Höchstwert der Wicklungstemperatur (in der Mitte des Blechpakets) dadurch nicht merk-

[1]) Es kommen hierfür natürlich nur die linken Äste der Kurven in Fig. 9 in Frage.

[2]) Wenn die Wärmeabführung im obern Teil der Nut geringer ist als die in den unteren Schichten (Wicklung im innern Teil der Maschine, im Läufer, vgl. Anmerkung 2, S. 21), so ergeben sich noch größere Unterschiede der Leiterhöhen; andrerseits sind die Höhen der oberen Schichten entsprechend zu verringern, wenn die Wärmeabführung im obern Teil der Nut größer ist als im innern Teil (Wicklung im äußern Teil der Maschine, im Ständer).

Digitized by Google

lich beeinflußt. Es entsteht somit die Frage, ob die abkühlende Oberfläche der Nut ohne Erhöhung der Stromwärme vergrößert werden kann. Dieser Frage wollen wir zunächst nähertreten.

Wenn wir aus der oberen Leiterschicht der Nut in Fig. 10a einen Teil der Leiter, z. B. drei Leiter, entfernen und im oberen noch freien Teil der Nut anordnen (Fig. 10b), so wird sich die gesamte Stromwärme nicht wesentlich ändern. Die Feldinduktionen sind neben den Nutenquerschnitten als Funktion der Nuthöhe dargestellt und die hier in Frage kommenden Stellen durch horizontale Schraffur hervorgehoben. Die oberen drei Leiter in Fig. 10b befinden sich also in einem nur wenig stärkeren, die drei Leiter der sechsten Schicht dagegen in einem um ebensoviel schwächeren (mittleren) Felde als die Leiter der sechsten Schicht in Fig. 10a (in Fig. 10b durch gestrichelte Linien angedeutet). Da die zusätzliche Stromwärme ungefähr proportional dem Quadrat der mittleren Induktion ist, so wird die Leiteranordnung Fig. 10b eine größere, aber nur sehr wenig größere Stromwärme entwickeln als die der Fig. 10a; und zwar wird der relative Unterschied um so kleiner sein, je größer die Schichtzahl ist.

Diese Überlegung führt uns dazu, die wärmeabführende Oberfläche der Nut, z. B. für die Leiteranordnung nach Fig. 11, dadurch zu vergrößern, daß wir ohne Änderung des Leiterquerschnitts die Zahl der Leiter quer zur Nut verringern und die Leiter in größerer Schichtzahl anordnen, z. B. nach Fig. 12. Die wärmeabführende Oberfläche der Nut hat sich fast verdoppelt, denn hierfür kommen hauptsächlich die Nutflanken in Betracht.

Für den Wechselstromwiderstand der Wicklung nach Fig. 11 können wir schreiben

$$R = n \frac{\rho}{h\,b}\left(1 + \frac{m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\xi^4\right). \qquad 4)$$

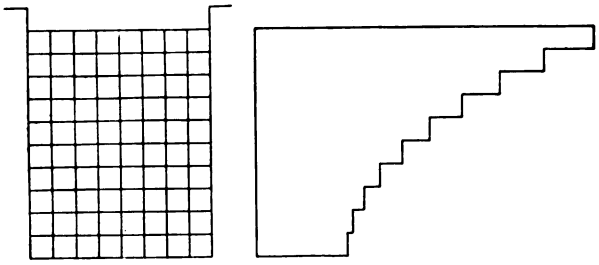


Fig. 11. Stromwärme als Funktion der Nuthöhe bei einer Kupferwicklung mit 10 Leiterschichten.

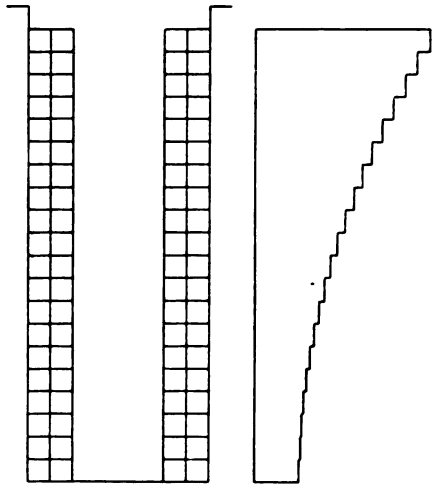


Fig. 12. Stromwärme als Funktion der Nuthöhe für dieselbe Leiterzahl, denselben Leiterquerschnitt und dieselbe Nutweite wie bei der Anordnung Fig. 11, aber bei doppelter Schichtzahl.

Durch die Anordnung der Leiter nach Fig. 12 ist die Schichtzahl doppelt, die gesamte Leiterbreite quer zur Nut dagegen halb so groß geworden wie in Fig. 11. Nehmen wir im allgemeinen an, daß die Schichtzahl auf das v fache vergrößert wird, so wird die gesamte Leiterbreite quer zur Nut $\frac{1}{v}$ mal so groß wie bei der Ausgangswicklung. Wir haben also für die Wicklung mit v facher Nutoberfläche (z. B. nach Fig. 12 mit $v = 2$)

$$m' = v\,m \quad \text{und} \quad \xi' = 2\pi h \sqrt{\frac{b'}{\rho}\frac{P}{a}} = \frac{1}{\sqrt{v}}\xi \qquad 39a)$$

und erhalten für den Wechselstromwiderstand einer solchen Wicklung

$$R' = n \frac{\rho}{h\,b}\left(1 + \frac{v^2 m^2 - 0{,}2}{9\,(1+\lambda)}\frac{\xi^4}{v^2}\right). \qquad 39)$$

Digitized by Google

Das Verhältnis

$$\frac{R'}{R} = \frac{9(1+\lambda)v^2 + (v^2m^2 - 0{,}2)\xi^4}{9(1+\lambda)v^2 + (v^2m^2 - 0{,}2v^2)\xi^4} \qquad 40)$$

nähert sich mit wachsendem m sehr schnell der Einheit, und zwar um so schneller, je größer λ und je kleiner v und ξ sind. Der größte Wert von ξ, der praktisch in Frage kommt, ist der Wert des Widerstandsminimums, also

$$\xi = \xi_0 = \sqrt[4]{\frac{3(1+\lambda)}{m^2 - 0{,}2}}. \qquad 41)$$

Setzen wir diesen Wert in (40) ein, so erhalten wir als höchsten Wert

$$\frac{R'}{R} = \frac{R_0'}{R_0} = \frac{3 + \frac{v^2m^2 - 0{,}2}{v^2m^2 - 0{,}2v^2}}{4} = 1 + \frac{1}{4}\frac{0{,}2 - \frac{0{,}2}{v^2}}{m^2 - 0{,}2} \qquad 41)$$

unabhängig von λ, also unabhängig von der Größe der Querverbindungen.

Für v = 2 wird mit

	m = 2	4	6	10
$1 < \frac{R'}{R} \leqq$	1,0099	1,0024	1,0010	1,0004

Zwischen den Anordnungen Fig. 11 (m = 10) und Fig. 12 (v = 2, m' = 2 m) besteht überhaupt kein merkbarer Unterschied im Wechselstromwiderstande. Für kleinere Werte von v sind die Unterschiede noch geringer als in der vorstehenden Tabelle.

Diese Untersuchung über die Vergrößerung der wärmeabführenden Nutoberfläche gilt unabhängig von der Querschnittsform der Leiter; praktische Bedeutung gewinnt sie aber erst für quadratische, vor allem aber für kreisförmige Leiter, für die nach den Ergebnissen des 5. Abschnitts die letzten Überlegungen ebenfalls gelten müssen.

Neben den Nutenquerschnitten der Fig. 11 und 12 und den später zu behandelnden Wicklungen der Fig. 13 und 16 bis 18 ist als Funktion der Nuthöhe — für alle Figuren in demselben Maßstabe — die Stromwärme in den Leiterschichten innerhalb der Nut aufgetragen. Die Wärmeentwicklung jeder Schicht wird durch ein Rechteck dargestellt, dessen Grundlinie die Schichthöhe ist. Die ganze Diagrammfläche ist proportional der gesamten Stromwärme innerhalb der Nut, die Diagrammflächen der Fig. 11 und 12 müssen also nach unserer Überlegung praktisch denselben Inhalt haben (was auch zutrifft). Bei der Berechnung der Stromwärme wurde vorausgesetzt, daß die Leiterhöhe der Anordnung nach Fig. 11 dem Widerstandsminimum für rechteckigen Leiterquerschnitt entspricht[1]), ferner wurden die Querverbindungen doppelt so lang angenommen wie der Teil der Wicklung innerhalb der Nut, ($\lambda = 2$). Mit $\alpha = 1$ wird dann

$$h_0 = \sqrt[4]{\frac{3(1+\lambda)}{m^2 - 0{,}2}} = \sqrt[4]{\frac{9}{99{,}8}} = 0{,}548.$$

8. Einfluß des spezifischen Widerstandes. Bei der Wicklung Fig. 12 ist die gesamte Leiterbreite quer zur Nut nur halb so groß wie bei der Wicklung Fig. 11. Die Verringerung der gesamten Leiterbreite hat nun denselben Einfluß wie eine prozentisch gleich große Erhöhung des spezifischen Widerstandes[2]). Hat das Leitermetall einen doppelt so großen spezifischen Widerstand wie bei den Wicklungen in den Fig. 11 und 12, so erhalten wir eine Wicklung, die bei derselben Wicklungshöhe wie in Fig. 12 den ganzen zur Verfügung stehenden Nutenraum erfüllt und denselben Wechselstromwiderstand hat wie die Wicklungen in den Fig. 11 und 12.

[1]) Für quadratische Leiter ist also nach Gl. (9) die Leiterhöhe etwa 10% niedriger, als dem Widerstandsminimum entspricht.

[2]) Vgl. Richter, Archiv f. E., Bd. III, S. 180.

Digitized by Google

In Fig. 13 ist eine Wicklung mit derselben Leiterzahl und derselben Leiterhöhe wie in Fig. 11 dargestellt, doch sind nicht 8 Leiter nebeneinander angeordnet, sondern nur 5 von entsprechend größerer Breite und größerem spezifischen Widerstande; in diesem Falle ist also $v = {}^8/_5 = 1{,}6$. Die Wicklung Fig. 13 hat praktisch denselben Wechselstromwiderstand wie die Wicklung Fig. 11, wenn bei derselben Leiterhöhe die Leiterbreite und der spezifische Widerstand des Leitermetalls 1,6 mal so groß sind wie in Fig. 11, Diese Zahl ist ungefähr gleich dem Verhältnis der spezifischen Widerstände von Aluminium und Kupfer von etwa 10% höherer Temperatur. Die Wicklung in Fig. 13 mit Alumi niumleitern hat also denselben Wechselstromwiderstand wie die Wicklung Fig. 11 mit Kupferleitern, bleibt aber bei derselben Ventilation kälter, weil die abkühlende Oberfläche größer ist.

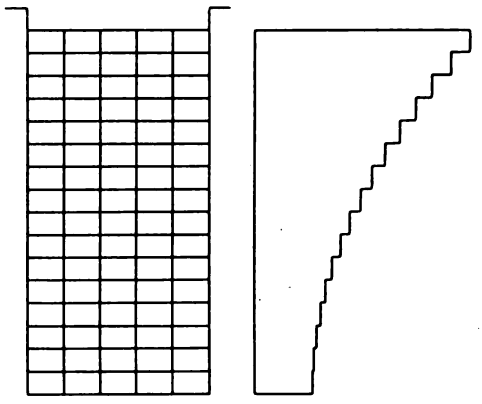


Fig. 13. Stromwärme als Funktion der Nuthöhe für dieselbe Leiterzahl, dieselbe Leiterhöhe und dieselbe Nutweite wie bei den Anordnungen Fig. 11 und 12, aber für Aluminiumleiter.

Wenn wir nur die Nutenflanken als wärmeabführende Oberfläche berücksichtigen, so verhalten sich diese Oberflächen bei Wicklungen mit rechteckigem Leiterquerschnitt und vorgeschriebener Stromwärme, Leiterhöhe und Leiterzahl wie die spezifischen Widerstände der Leitermetalle. In demselben Verhältnis stehen auch die Metallvolumina der Wicklungen.

Die Abkühlungsoberfläche der Wicklung Fig. 13 ist also bei demselben Wechselstromwiderstand etwa 60% größer als bei der Kupferwicklung Fig. 11. Die Metallgewichte verhalten sich wie 1 : 2,14, wenn das spezifische Gewicht der Aluminiumwicklung zu 2,6 und das der Kupferwicklung zu 8,9 angenommen wird. Im umgekehrten Verhältnis stehen etwa die Preise von Aluminium- und Kupferleitern gleichen Gewichts[1]). Der Metallpreis der Aluminiumwicklung (Fig. 13) ist also ungefähr derselbe wie der der Kupferwicklung (Fig. 11).

Bei plötzlicher Überlastung, wobei keine merkliche Ableitung der Wärme stattfindet, ist die Temperaturerhöhung proportional der Funktion

$$t = \frac{J^2 R}{s \gamma q}, \qquad 42)$$

wenn s die spezifische Wärme, γ das spezifische Gewicht des Leitermetalls und q der Leiterquerschnitt ist. Der Leiterquerschnitt ist hier aber proportional dem spezifischen Widerstande, so daß die Temperaturerhöhungen sich umgekehrt verhalten wie die Produkte aus spezifischer Wärme, spezifischem Widerstand und spezifischem Gewicht.

Die Temperaturerhöhung der Aluminiumwicklung (Fig. 13) ist also bei plötzlicher Überlastung nur etwa

$$\frac{0{,}0933 \cdot 8{,}9 \cdot 0{,}017}{0{,}218 \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}0287} = \frac{0{,}01410}{0{,}01625} = 0{,}87\,\text{mal}$$

so groß wie die der Kupferwicklung (Fig. 11).

Die letzten Betrachtungen über Wicklungen aus Metallen von verschiedenem spezifischen Widerstande haben aber nur wenig praktischen Wert, weil bei beliebigem rechteckigen Leiterquerschnitt die Leiterhöhe gewöhnlich nicht vorgeschrieben ist. Wenn aber der Leiterquerschnitt beliebig gewählt werden darf, so wird man gewöhnlich durch Vergrößerung der Schichtzahl und durch Verringerung der Zahl der nebeneinander liegen-

[1]) Dies gilt für die Wirtschaftslage vor Ausbruch des Krieges.

Digitized by Google

den Leiter auch bei Kupferwicklungen mit voller Ausfüllung der Nut ausreichende Abkühlungsoberflächen erhalten, manchmal allerdings nur auf Kosten größerer Kupfergewichte. In der folgenden Tabelle sind z. B. für eine Wicklung mit 80 Leitern in der Nut und bei gegebener gesamter Kupferbreite quer zur Nut für verschiedene Schichtzahlen (m) die gesamte Wicklungshöhe H_0, bei welcher der Wechselstromwiderstand ein Minimum R_0 ist, und das Verhältnis $\frac{R_0}{H_0}$, das in erster Annäherung der Temperaturzunahme proportional gesetzt werden darf, zusammengestellt. Für die Wicklung mit m = 10 und n = 8 (Fig. 11) sind H_0 und R_0 gleich 1 gesetzt. In der letzten Zeile sind die entsprechenden Werte der Aluminiumwicklung (Fig. 13) eingetragen.

	m	n	H_0	R_0	$\frac{R_0}{H_0}$
Kupfer	10	8	1,00	1,00	1,00
	16	5	1,26	0,795	0,630
	20	4	1,40	0,715	0,510
	40	2	1,99	0,502	0,252
	80	1	2,81	0,356	0,127
Aluminium	16	5	1,60	1,00	0,625

Die Kupferwicklung mit 16 Leiterschichten hat hiernach etwa dieselbe Temperaturerhöhung wie die Aluminiumwicklung derselben Schichtzahl, ihr Widerstand ist nur 0,795 mal so groß, dafür ist sie aber auch teurer. Bei plötzlicher Überlastung ist nach Gl. (42) unter Vernachlässigung der Wärmeableitung die Temperaturzunahme der Aluminiumwicklung 45% höher als die der Kupferwicklung.

In der nächsten Tabelle sind dieselben Größen bei unveränderlicher gesamter Kupferhöhe H, also bei gegebenem Kupfergewicht zusammengestellt; die Wicklung für m = 10 sei für kleinsten Wechselstromwiderstand entworfen. Der Preis der Kupferwicklung ist dann etwa derselbe wie der der Aluminiumwicklung; die Kupferwicklung hat für m = 16 zwar nur den 0,85fachen Widerstand, hat dafür aber etwa die $\frac{0{,}850}{0{,}625} = 1{,}36$fache Temperaturerhöhung der Aluminiumwicklung. Bei plötzlicher Überlastung erhält man unter Vernachlässigung der Wärmeableitung für die Aluminiumwicklung eine um 7% höhere Temperaturzunahme.

	m	n	H	R	$\frac{R}{H}$
Kupfer	10	8	1,00	1,00	1,00
	16	5	1,00	0,850	0,850
	20	4	1,00	0,813	0,813
	40	2	1,00	0,765	0,765
	80	1	1,00	0,754	0,754

Am übersichtlichsten wird der Vergleich zwischen Wicklungen von verschiedenem spezifischen Widerstande, wenn bei derselben Schichtzahl und derselben Leiterausfüllung quer zur Nut die Leiterhöhe so bemessen ist, daß die höchste Temperatur der Wicklungen ein Minimum wird.

Die Leiterhöhe wird dann nach Gl. (31) und (1a)

$$h_t = \frac{1}{\alpha}\sqrt[4]{\frac{3}{m^2 - m}}, \text{ also } h_t \text{ proportional } \sqrt{\rho},$$

Digitized by Google

der Wechselstromwiderstand nach Gl. (4)

$$R_t = n \frac{\rho}{b} \alpha \sqrt[4]{\frac{m^2 - m}{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{3(1+\lambda)} \frac{m^2 - 0{,}2}{m^2 - m} \right\},$$

R_t proportional $\sqrt{\rho}$

und die Temperaturzunahme proportional T. Es ist nach Gl. (30) und (31)

$$T = n \frac{\rho}{b} \alpha^2 \sqrt{\frac{m^2 - m}{3}} 2,$$

also unter Berücksichtigung von (1a) unabhängig vom spezifischen Widerstande des Leitermetalls.

Beschränken wir uns beim Vergleich auf die praktisch in Frage kommenden Kupfer- und Aluminiumwicklungen[1]), so können wir sagen: Die Aluminiumwicklung hat dieselbe Temperaturzunahme wie die Kupferwicklung, der Wechselstromwiderstand der Aluminiumwicklung ist aber etwa $\sqrt{1{,}7} = 1{,}30$, das Leitergewicht etwa $\sqrt{1{,}7} \cdot \frac{2{,}6}{8{,}9} = 0{,}38$ und der Metallpreis der Aluminiumwicklung also etwa 0,8 von den entsprechenden Werten der Kupferwicklung. Bei plötzlicher Überlastung wird nach Gl. (42), also unter Vernachlässigung der Wärmeableitung, die Temperaturzunahme der Aluminiumwicklung etwa 36% größer als die der Kupferwicklung.

8a. Quadratischer und kreisförmiger Leiterquerschnitt. Mit der Bedingung (36)

$$h_{qt} = \frac{1}{\alpha} \sqrt[6]{6 \left(\frac{b\alpha}{N} \right)^2}, \quad h_{qt} \text{ proportional } \sqrt[3]{\rho}$$

für kleinste Temperaturzunahme einer Wicklung mit quadratischen Leitern wird nach (7)

$$R_{qt} \cong \rho \alpha^2 \sqrt[3]{\frac{1}{6} \left(\frac{N}{b\alpha} \right)^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3(1+\lambda)} \right\},$$

R_{qt} proportional $\sqrt[3]{\rho}$

und nach Gl. (35) und (36)

$$T_q \cong \rho N \alpha^4 \sqrt[3]{\frac{1}{36} \left(\frac{N}{b\alpha} \right)^4} \cdot 3,$$

$$T_q \text{ proportional } \frac{1}{\sqrt[3]{\rho}}.$$

Dieselben Proportionen bestehen, wie aus Gl. (38) und (24) folgt, auch für kreisförmige Leiter.

Wicklungen mit quadratischem oder kreisförmigem Leiterquerschnitt, die für kleinste Temperaturzunahme entworfen sind, haben mit Aluminiumleitern etwa den $\sqrt[3]{1{,}7} = 1{,}19$ fachen Wechselstromwiderstand, aber nur die 0,84fache Temperaturzunahme, das $\sqrt[3]{1{,}7^2} \frac{2{,}8}{8{,}9} = 0{,}415$fache Leitergewicht, also den ungefähr 0,9fachen Metallpreis einer solchen

[1]) Als drittes praktisch brauchbares Wicklungsmetall ist während des Krieges noch Zink hinzugekommen. Zink hat zwar ungefähr den doppelten spezifischen elektrischen Widerstand wie Aluminium, es ist aber sehr billig und braucht nicht vom Auslande bezogen zu werden. Ich entnehme dem Aufsatze „Über die Aussichten eines Reichs-Kupfermonopols" in der Tageszeitung „Tägliche Rundschau" vom 20. Mai d. J., daß Deutschland i. J. 1913 mit 27% an der gesamten Zinkgewinnung der Welt beteiligt war, während die Kupfergewinnung in Deutschland nur etwa 1/7 des allein im Inlande verarbeiteten Kupfers decken konnte.

Digitized by Google

Wicklung mit Kupferleitern[1]). Bei plötzlicher Überlastung wird bei Vernachlässigung der Wärmeableitung die Temperaturzunahme der Aluminiumwicklung etwa 14% größer als die der Kupferwicklung.

Der Vergleich zwischen Aluminium- und Kupferwicklungen fällt also bei quadratischen und kreisförmigen Leitern für die Aluminiumwicklung wesentlich günstiger aus als bei Leitern von rechteckigem Querschnitt. Eine Wicklung mit Aluminiumleitern kann bei kreisförmigem Leiterquerschnitt (Drahtwicklung) zuweilen sehr wohl den Vorzug vor einer Kupferwicklung verdienen.

Nach Gl. (25), (8b) und (38) ist bei kreisförmigen Leitern die wärmeabführende Oberfläche[2]) etwa $1{,}137^2 = 1{,}3$, der Wechselstromwiderstand nach Gl. (24), (7) und (36) 0,986mal so groß wie bei quadratischen Leitern, doch ist es fraglich, ob die Wicklung mit kreisförmigen Leitern kälter bleibt als die mit quadratischen Leitern, weil wegen der größeren Luft- oder Isolationsräume in der Nut das Temperaturgefälle bei kreisförmigen Leitern größer ist.

9. Wicklungen mit derselben Stromwärme in jeder Leiterschicht. Die Wärmeentwicklung längs der Nuthöhe ist bei den Wicklungsanordnungen der Figuren 11 bis 13 sehr ungleichmäßig. Sie ist für $\lambda = 2$ in der obersten Leiterschicht etwa 3,8 mal so groß wie in der Schicht am Nutengrunde; für höhere Werte von λ wird diese Verhältniszahl sogar noch größer[3]). Mit Rücksicht auf kleinste Temperaturzunahme wäre es aber erwünscht, daß in jeder Schicht innerhalb der Nut etwa dieselbe Wärmeentwicklung stattfinde, denn durch die Grundfläche der Nut und durch die Nutöffnung werden gewöhnlich nur sehr geringe Wärmemengen abgeführt. Die Nutöffnung wird gewöhnlich durch einen verhältnismäßig dicken Holzkeil abgeschlossen, der ein schlechter Wärmeleiter ist; die spezifische Wärmeabführung durch den Nutengrund ist zwar bei axialer Ventilation etwa ebenso groß wie die durch die Nutenflanken, bei radialer Ventilation etwas geringer, doch ist die Grundfläche der Nut wesentlich kleiner als die gesamte Fläche der beiden Nutenflanken.

Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Leiteranordnung zu bestimmen, bei der in jeder Schicht innerhalb der Nut möglichst dieselbe Stromwärme entwickelt wird. Wir haben schon im vorigen Abschnitt gesehen, daß für alle praktisch in Frage kommenden Wicklungen mit mehreren Schichten die Stromwärme in einem Leiter im wesentlichen durch die Durchflutung unterhalb dieser Schicht bestimmt wird, und daß die gesamte Stromwärme praktisch unabhängig von der Zahl der in einer Schicht nebeneinander liegenden Leiter ist. Es wird also praktisch gleichgültig sein, wie man die nach Zahl und Querschnitt gegebenen Leiter innerhalb der Nut anordnet. Man kann daher auch die Zahl der nebeneinander liegenden Leiter von der unteren bis zur oberen Schicht so abstufen, daß praktisch die Stromwärme in jeder Schicht denselben Wert hat.

Die gesamte Stromwärme in der Nut würde wohl bei einer solchen Wicklung nicht wesentlich verschieden sein von der einer Wicklung, die in jeder Schicht gleich viele Leiter hat; für die unteren Schichten führt aber die Vernachlässigung des Feldes, das die betrach-

[1]) Dieselben Verhältniszahlen ergeben sich auch bei Wicklungen, die für kleinsten Wechselstromwiderstand entworfen sind (Abschnitt 4a).

[2]) Hierbei sind wieder nur die Flächen der Nutenflanken berücksichtigt.

[3]) Die Verhältniszahl 3,8 gilt für den Fall, daß die Wicklung für kleinsten Wechselstromwiderstand bei beliebig rechteckigem Leiterquerschnitt entworfen ist. Bei quadratischen oder kreisförmigen Leitern wird diese Zahl für $\lambda = 2$ bei kleinstem Wechselstromwiderstand sogar 5,1. Bei Wechselstrom-Turbogeneratoren kommen Wicklungen mit λ bis zu 4 vor, hierbei wird bei kleinstem Wechselstromwiderstand und quadratischen Leitern in jedem Leiter der obersten Schicht bis zu 8,5 mal so viel Wärme entwickelt wie in einem Leiter der untersten Schicht. Man muß deshalb die Leiterhöhe solcher Wicklungen wesentlich kleiner bemessen, als dem Widerstandsminimum entspricht. Zu beachten ist hier auch, daß bei Wicklungen mit verschiedener Spulenweite λ gewöhnlich ebenfalls verschieden ist.

Digitized by Google

tete Leiterschicht selbst erregt, zu merklichen Fehlern, weil das von den darunter liegenden Leitern erregte Feld noch verhältnismäßig schwach ist. So wird z. B. bei der Wicklungsanordnung der Fig. 14a die Stromwärme eines Leiters der dritten Schicht etwas größer sein als die Stromwärme eines Leiters derselben Schicht in Fig. 14b. Diesem Einfluß wollen wir noch bei der Bestimmung der Stromwärme Rechnung tragen.

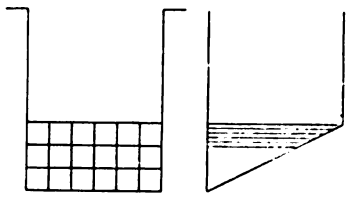


Fig. 14a.

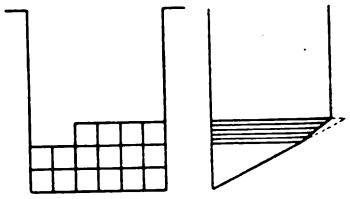


Fig. 14b.

Wir gehen von der Formel (2) im 2. Abschnitt aus und erhalten mit der für alle hier in Betracht kommenden Wicklungen geltenden Näherung

$$\varphi(\xi) \cong 1 \quad \text{und} \quad \psi(\xi) \cong \frac{\xi^4}{3} \tag{2a}$$

und mit $\lambda = 0$:

$$R_p = \frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{p^2 - p}{3}\xi^4\right\},$$

$$R_p = \frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{p^2 - p}{3}(2\pi h)^4\left(\frac{n\beta P}{\rho a}\right)^2\right\}, \tag{43}$$

wenn noch die Breite eines Leiters $\beta = \frac{b}{n}$ gesetzt wird.

Für die Leiteranordnung nach Fig. 14a stellt Gl. (43) die Stromwärme eines Leiters der dritten Schicht von der Länge 1 dar, wenn $p = 3$ und $n = 6$ gesetzt wird. Damit sie auch für einen Leiter der dritten Schicht in der Anordnung Fig. 14b gilt, müssen wir uns die unter dieser Schicht liegenden Leiter in mehreren Schichten so angeordnet denken, daß alle Schichten die gesamte Leiterbreite $b = n\beta$ der dritten Schicht in Fig. 14b erhalten. Eine solche Anordnung ist in Fig. 15 dargestellt. Die zusätzliche Stromwärme eines Leiters der obersten Schicht in Fig. 15 ist dann dieselbe wie in 14b[1]); auf die Leiteranordnung in Fig. 15 können wir aber wieder Formel (43) anwenden, wenn wir $p = 4$ und $n = 4$ setzen.

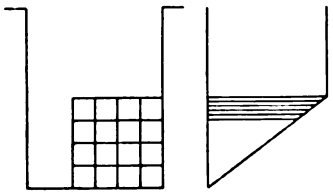


Fig. 15.

Bezeichnen wir nun mit W die Gesamtsumme der Leiter in der pten Schicht, für die wir den Wechselstromwiderstand bestimmen wollen, und aller darunter liegenden Leiter und ferner mit w die Zahl der nebeneinander liegenden Leiter in jener Schicht,

$$\sum_{1}^{p} w = W \text{ [2])}, \tag{44a}$$

[1]) Hierbei setzten wir allerdings voraus, daß die Induktionslinien parallel zum Nutengrunde verlaufen, was für die unteren Schichten nicht mehr gilt, wenn die gesamte Leiterbreite quer zur Nut wesentlich geringer ist als die Nutbreite. Für die Wicklungsanordnungen, auf die die Ergebnisse dieser Untersuchung anzuwenden sind, ist aber unsere Voraussetzung zulässig, weil eine bedeutende Verringerung der gesamten Leiterbreite erst in den oberen Leiterschichten erfolgt (vgl. z. B. Fig. 16) und die Verteilung der Leiter jeder Schicht auf beide Nutenflanken (vergl. Fig. 17) den vorausgesetzten Verlauf der Induktionslinien begünstigt.

[2]) Für die 3. Schicht in Fig. 14a ist $W = 18$, $w = 6$; für die 3. Schicht in Fig. 14b ist $W = 16$, $w = 4$.

Digitized by Google

so erhält die Formel (43) allgemeine Gültigkeit, wenn wir schreiben

$$R_p = \frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{\left(\frac{W}{w}\right)^2 - \left(\frac{W}{w}\right)}{3}(2\pi h)^4\left(\frac{w\beta P}{\rho a}\right)^2\right\}.$$

Bezeichnen wir noch mit w_1 die Zahl der nebeneinander liegenden Leiter in der ersten Schicht (in den Fig. 14a und 14b ist $w_1 = 6$) und setzen wir

$$\xi_1 = 2\pi h\sqrt{\frac{w_1\beta P}{\rho a}}, \qquad 44b)$$

so erhalten wir für den Wechselstromwiderstand eines Leiters der pten Schicht mit beliebig vielen (w) Leitern quer zur Nut in dieser Schicht

$$R_p = \frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{\left(\frac{W}{w}\right)^2 - \frac{W}{w}}{3}\left(\frac{w}{w_1}\right)^2\xi_1^4\right\}$$
$$= \frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{W(W-w)}{3}\frac{\xi_1^4}{w_1^2}\right\}. \qquad 44)$$

In der untersten Schicht einer Wicklung wird die Stromwärme

$$R_1 = w_1\frac{\rho}{\beta h}$$

entwickelt; die zusätzliche Stromwärme ist hier für alle praktisch in Betracht kommenden Wicklungen zu vernachlässigen. Wenn nun in den übrigen Schichten möglichst dieselben Beträge in Stromwärme umgesetzt werden sollen, so muß die Abweichung der Stromwärme von jenem Wert R_1 für jede Schicht möglichst klein sein. Die Zahl der nebeneinander liegenden Leiter einer Schicht muß also um 1 verringert werden, sobald dadurch eine kleinere Abweichung der Stromwärme dieser Schicht von der in der untersten Schicht erreicht wird, d. h. wenn

$$w\frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{W(W-w)}{3}\frac{\xi_1^4}{w_1^2}\right\} - w_1\frac{\rho}{\beta h}$$
$$> w_1\frac{\rho}{\beta h} - (w-1)\frac{\rho}{\beta h}\left\{1 + \frac{(W-1)[(W-1)-(w-1)]}{3}\frac{\xi_1^4}{w_1^2}\right\}$$

oder

$$\frac{w}{w_1}\left\{1 + W(W-w)\frac{\xi_1^4}{3w_1^2}\right\} - 1 > 1 - \frac{w-1}{w_1}\left\{1 + (W-1)(W-w)\frac{\xi_1^4}{3w_1^2}\right\}. \qquad 45)$$

Wenden wir diesen Satz auf eine Wicklung mit derselben Nutbreite, derselben Leiterzahl und demselben Querschnitt wie Fig. 11 an[1]) und bezeichnen die linke Seite der Gleichung (45) mit A, die rechte mit B, so erhalten wir die in der Tabelle zusammengestellten Zahlenwerte.

Schicht-zahl	Angenommen w	W	A	B	Ausgeführt w	Ausgeführt W
1	8	8			8	8
2	8	16	0,061	0,075	8	16
3	8	24	0,182	— 0,028	7	23
4	7	30	0,161	0,011	6	29
5	6	35	0,110	0,084	5	34
6	5	39	0,018	0,194	5	39

[1]) Vgl. S. 25.

Digitized by Google

Schicht-zahl	Angenommen w	W	A	B	Ausgeführt w	W
7	5	44	0,133	0,1025	4	43
8	4	47	— 0,022	0,275	4	47
9	4	51	0,067	0,209	4	51
10	4	55	0,164	0,135	3	54
11	3	57	— 0,080		3	57
12	3	60	— 0,016		3	60
13	3	63	0,047		3	63
14	3	66	0,114	0,225	3	66
15	3	69	0,182	0,219	3	69
16	3	72	0,257	0,170	3	72
17	2	74	— 0,120		2	74
18	2	76	— 0,085		2	76
19	2	78	— 0,054		2	78
20	2	80	— 0,012		2	80

Für die erste Leiterschicht ist die Zahl der in der Nut nebeneinander liegenden Leiter gegeben zu $w_1 = 8$. Für die zweite Leiterschicht finden wir, daß die Abweichung der Stromwärme von den in der ersten Schicht bei $w_2 = 8$ nebeneinander liegenden Leitern (Reihe A) kleiner ist als bei $w_2 = 7$ (Reihe B); die zweite Schicht ist deshalb mit $w_2 = 8$ auszuführen. Für die dritte Leiterschicht ergeben 7 nebeneinander liegende Leiter eine kleinere Abweichung der Stromwärme als 8, es sind also in dieser Schicht 7 Leiter nebeneinander anzuordnen usw.

Für die 16. Schicht ergibt zwar die Anordnung von 2 Leitern nebeneinander in der Nut (Reihe B) eine kleinere Abweichung als die von 3 Leitern (Reihe A), doch sind die nebeneinander liegenden Leiter erst für die 17. Schicht verringert, weil sonst in der obersten Schicht nur ein einzelner Leiter übrig bleiben würde.

Wenn zu den Zahlenwerten der Reihe A die Zahl 1 addiert wird, und wenn die Zahlen der Reihe B von 1 subtrahiert werden, so sind die erhaltenen Zahlen den Stromwärmen der einzelnen Schichten proportional (vgl. Gl. (45) und (44)). In Fig. 16 sind die Leiteranordnungen und die Werte der Stromwärme der einzelnen Schichten in demselben Maßstabe wie für die Wicklungen der Fig. 11 bis 13 dargestellt. Längs der Nuthöhe findet ungefähr konstante Wärmeentwicklung statt; das Diagramm der Stromwärme nähert sich um so mehr einem Rechteck, je größer die Zahl der Leiter in der Nut ist.

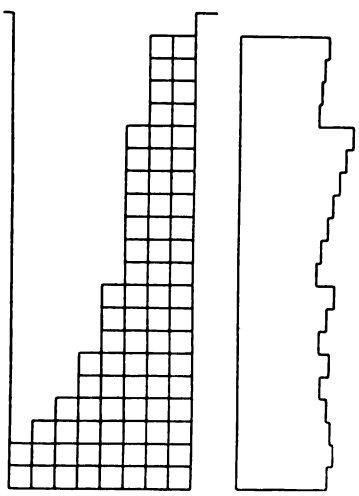


Fig. 16. Leiteranordnung für ungefähr gleich große Stromwärmen in den einzelnen Leiterschichten.

Ohne mehr Aufwand an Leitermetall und ohne merkliche Vergrößerung des Wechselstromwiderstandes (die Flächeninhalte der Diagramme in Fig. 11, 12 und 16 sind praktisch einander gleich) erreichen wir gegenüber Fig. 12 mit denselben Nutenabmessungen eine praktisch gleichmäßige Verteilung der Stromwärme über die Nuthöhe.

Bei der praktischen Ausführung der Wicklung wird man natürlich die Leiter jeder Schicht auf die beiden Nutenflanken möglichst gleichmäßig verteilen, so daß beide Nutenflanken an der Ableitung der Wärme teilnehmen. Durch den freien Raum der Nut kann man zur Verbesserung der Abkühlung einen Luftstrom in axialer Richtung blasen.

Gewöhnlich wird man zugunsten der bequemeren Herstellung der Wicklung oder zur Vermeidung größerer Nuttiefen auf die theoretisch

Digitized by Google

günstigste Abstufung der Zahl der nebeneinander liegenden Leiter verzichten und die Leiter etwa nach Fig. 17 oder 18 anordnen. Die letzte Anordnung ist bei axialer Ventilation durch den freien Nutenraum besonders zweckmäßig, weil die Schichten mit größerer Wärmeentwicklung am ergiebigsten gekühlt werden.

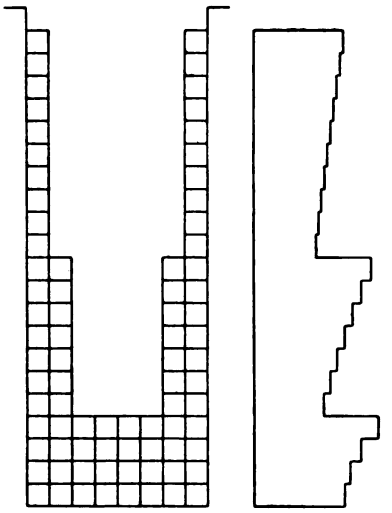


Fig. 17. Leiteranordnung für ungefähr gleich große Stromwärmen in den einzelnen Leiterschichten.

Die Berechnung der Leiterzahlen jeder Schicht wird zwar nach der Formel (44) oder (45) in der durch die Tabelle erläuterten Weise in verhältnismäßig kurzer Zeit erledigt, doch kann die Arbeit noch wesentlich abgekürzt werden.

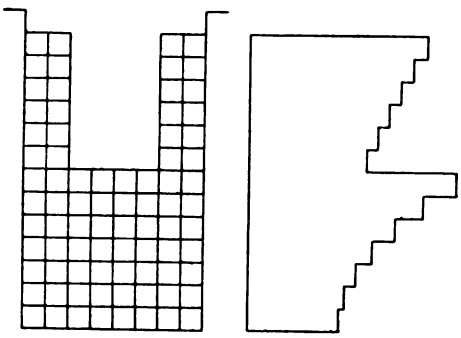


Fig. 18. Leiteranordnung und Stromwärme als Funktion der Nuthöhe für eine Wicklung mit axialer Kühlung.

Wir ersetzen die treppenförmigen Linien der Leiterabstufung in Fig. 16 und der Stromwärme in Fig. 11 durch stetige Kurven, was in Strenge natürlich nur für eine unendlich große Leiterzahl zulässig wäre. Wir erhalten für eine Wicklung mit derselben Leiterzahl in jeder Schicht die in Fig. 19a neben dem Nutenquerschnitt dargestellte Stromwärme als Funktion der Nuthöhe. Für eine Wicklung mit derselben Stromwärme in jeder Schicht (Fig. 19b) wird die Stromwärme durch ein Rechteck dargestellt; die

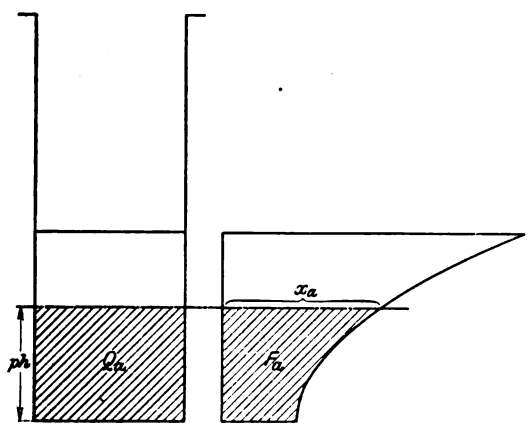


Fig. 19a.

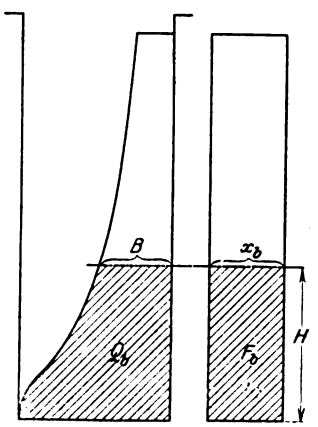


Fig. 19b.

gesamte Leiterbreite quer zur Nut wird eine stetige Funktion der Nuthöhe. Bei gleichen Leiterzahlen in den einzelnen Schichten (Fig. 19a) ist nun der Wechselstromwiderstand des Wicklungsteiles bis zur pten Schicht

$$R_{1\,\text{bis}\,p} \cong R_1\left(1 + \frac{p^2 - 1}{9}\,\xi^4\right).$$

Digitized by Google

Dieser Wert ist durch die schraffierte Fläche F_a dargestellt, die oben durch die strichpunktierte Linie im Abstande ph vom Nutengrunde begrenzt wird. Derselbe Widerstand ergibt sich bei der Leiteranordnung nach Fig. 19b für den Wicklungsteil bis zur Nutenhöhe

$$H = ph\left(1 + \frac{p^2 - 1}{9}\xi^4\right), \tag{46a}$$

wenn wir mit p wieder die pte Leiterschicht bei der Leiteranordnung in Fig. 19a (mit derselben Leiterzahl in jeder Schicht wie im Grunde der Nut) bezeichnen. Dies folgt ohne weiteres aus der Gleichheit der Flächen F_a und F_b.

Nach unseren früheren Überlegungen ist die Stromwärme unabhängig von der Anordnung der Leiter in der Nut und im wesentlichen bestimmt durch die Leiterzahl. Da nun die Flächen F_a und F_b einander gleich sind, muß auch die Fläche Q_b gleich der Fläche Q_a sein, denn beide sind den Leiterzahlen proportional. Die Stromwärme eines Leiters der Anordnung Fig. 19b in der Entfernung H muß also dieselbe sein wie die eines Leiters der Anordnung Fig. 19a in der Entfernung ph vom Nutengrunde. Die gesamte Kupferbreite B in der Entfernung H muß sich zur gesamten Kupferbreite $w_1\beta$ in Fig. 19a (oder zu der in der ersten Schicht in Fig. 19b) verhalten wie die Strecke x_b zu x_a in den Diagrammen für die Stromwärme. Wir erhalten

$$B = w_1\beta\frac{x_b}{x_a} = w_1\beta\frac{R_1}{R_p}$$

$$B = w_1\beta\frac{1}{1 + \frac{p^2 - p}{3}\xi^4}. \tag{46b}$$

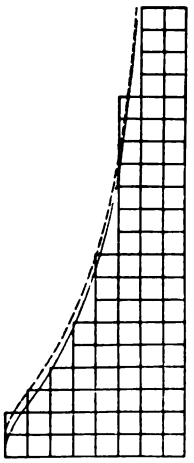


Fig. 20. Bestimmung der Leiteranordnung für ungefähr gleiche Stromwärmen in den einzelnen Leiterschichten.

Die Gleichungen (46a) und (46b) bestimmen also die einander zugeordneten Werte H und B, welche die Metallausfüllung der Nut bei derselben Stromwärme in jeder Schicht angeben. Der Parameter p hat für die Wicklung mit abgestuften Leiterzahlen (Fig. 19b) im allgemeinen nur für $p = 1$ die Bedeutung der Schichtzahl.

Für die Wicklung in Fig. 16 ist die stetige Kurve der Abstufung nach den Gleichungen (46a) und (46b) berechnet und in Fig. 20 zusammen mit der tatsächlichen Leiterabstufung, welche die genaue Berechnung ergibt, aufgetragen. Wir erhalten zunächst die gestrichelte Kurve, die bei $H = h$, entsprechend $p = 1$, beginnt. Um den Fehler, den die Voraussetzung einer unendlich großen Leiterzahl bei der Ableitung der Formeln (46a) und (46b) zur Folge hatte, wieder auszugleichen, verschieben wir die gestrichelte Kurve um $\frac{h}{2}$ nach unten, so daß sie in der Mitte der ersten Schicht beginnt. Wir setzen also

$$H' = H - \frac{h}{2} = ph\left(1 + \frac{p^2 - 1}{9}\xi^4\right) - \frac{h}{2};$$

diese Kurve ist in Fig. 20 voll ausgezogen. Wir erkennen, daß auch nach dieser Kurve die Abstufung der Leiter abgeschätzt werden kann. Da der Punkt der Kurve für die Schicht im Nutengrunde stets gegeben ist, genügt es gewöhnlich, noch zwei oder drei Punkte der Kurve zu bestimmen.

Die im letzten Abschnitt behandelten Wicklungen mit Abstufung der Leiterzahlen von Schicht zu Schicht kommen auch für Drahtwicklungen[1]) in Betracht und sind dann

[1]) Die in den Figuren 11, 12 und 16 bis 18 dargestellten Diagramme für die Stromwärme gelten auch für kreisförmige Leiterquerschnitte, wenn alle linearen Dimensionen in den Nutenquerschnitten 1,21 mal so groß wie bei quadratischen Leitern ausgeführt werden, der Drahtdurchmesser also auch 1,21 mal der Höhe der quadratischen Leiter ist. Aus Gl. (24) und (7) folgt nämlich für Fig. 11

Digitized by Google

von besonderer Bedeutung für Wechselströme von noch höherer Frequenz als 50 i. d. Sek. Bei größeren Leiterzahlen wird man Füllstücke von geeigneter Form in die Nuten einlegen und dann die freien Räume bewickeln (vgl. Fig. 21). Hierbei ist es nicht nötig, die Drähte in parallelen Schichten anzuordnen, da die Lage der Drähte keinen merklichen Einfluß auf den Wechselstromwiderstand hat. Die Füllstücke dürfen natürlich nicht aus Metall hergestellt werden, sie können hohl sein, um einen axialen Luftstrom aufzunehmen (vgl. Fig. 22). Die Wicklung hat bei abgestuften Leiterzahlen denselben Wechselstromwiderstand wie bei gleichen Leiterzahlen in allen Schichten; das Widerstandsminimum liegt in beiden Fällen praktisch bei derselben Leiterhöhe oder demselben Leiterdurchmesser, so daß über die Bestimmung dieser Größen hier nichts weiter zu sagen ist.

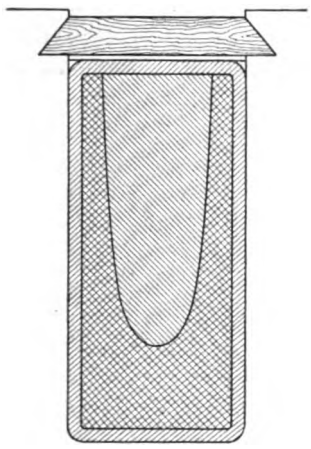


Fig. 21. Drahtwicklung ohne axiale Kühlung für kleinste Temperaturzunahme.

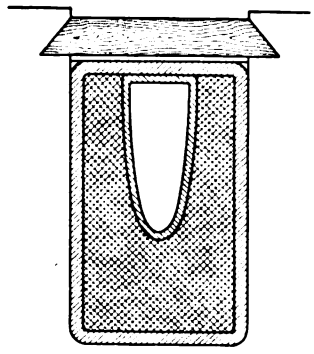


Fig. 22. Drahtwicklung mit axialer Kühlung für kleinste Temperaturzunahme.

Bei halbgeschlossenen Nuten verjüngt sich die Nutweite im oberen Teil. Wenn im schmaleren Nutenraum ebenfalls Leiter angeordnet werden (vgl. Fig. 23), so wird in ihnen eine größere Stromwärme entwickelt, als wenn sie sich im breiteren Nutenraum befänden. Die zusätzliche Stromwärme ist proportional dem Quadrat der Feldstärke, wird also bei doppelter Feldstärke vervierfacht. Für die Wicklung in Fig. 11 ($\lambda = 2$, $\xi = 0{,}548$) hat ein Leiter der obersten Schicht die 3,8fache Stromwärme wie ein Leiter der unteren Schicht; wenn sich die obersten Leiter dieser Wicklung in einem halb so breiten Nutenraum befänden, so würde die Stromwärme in einem Leiter der obersten Schicht $1 + 4 \cdot 2{,}8 = 12{,}2$ mal so groß sein wie in einem Leiter der untersten Schicht. Diese Wärme wird die kleine Oberfläche des Drahtes gewöhnlich nicht mehr abführen können; der Isolierstoff wird verbrennen. Anordnungen, wie sie in Fig. 23 dargestellt sind, müssen also vermieden werden.

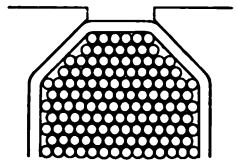


Fig. 23.

$$0{,}463\left[\left(\frac{N\,d}{b_k}\right)^2 - c{,}2\right]\frac{\alpha^4 d^4}{9(1+\lambda)} = \left[\left(\frac{N\,h}{b_q}\right)^2 - 0{,}2\right]\frac{\alpha^4 h^4}{9(1+\lambda)},$$

wenn wir mit b_k die gesamte Leiterbreite quer zur Nut bei kreisförmigen und mit b_q die bei quadratischen Leitern bezeichnen. Damit die Leiteranordnung in Fig. 11 auch für kreisförmige Leiter erhalten bleibt, muß ferner sein

$$\frac{b_k}{d} = \frac{b_q}{h};$$

somit

$$d = \frac{h}{\sqrt[4]{0{,}463}} = 1{,}21\,h.$$

Der Wechselstromwiderstand für Wicklungen mit kreisförmigen Leiterquerschnitten wird nach Gl. (24) berechnet, wobei in allen praktischen Fällen keine Rücksicht auf die Lage der Drähte in der Nut genommen zu werden braucht. Dies folgt aus Gl. (24) und (1a); wenn man 0,2 gegen $\left(\frac{N\,d}{b}\right)^2 = m^2$ vernachlässigt, so kommt die gesamte Kupferbreite b in der Formel für den Wechselstromwiderstand gar nicht mehr vor.

Digitized by Google

Der kapazitiv belastete Transformator mit Eigenkapazität.

Von

J. Biermanns.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß der mit voreilendem Strom belastete Transformator infolge von Resonanzerscheinungen zu sehr erheblichen Überspannungen Anlaß geben kann; es handelt sich in diesem Falle in der Hauptsache um Resonanz zwischen der kapazitiven Belastung und der Streuinduktivität des Transformators. Wegen der geringen Streuung moderner Transformatoren sind derartige Resonanzerscheinungen jedoch erst bei sehr großen, dem Transformator entnommenen, voreilenden Strömen zu befürchten. Die Eigenkapazität der Transformatorenwicklung beschleunigt das Eintreten der Resonanz, es wird sich ferner zeigen[1]), daß die offene Sekundärwicklung eines Transformators für sich allein schwingungsfähig ist, und daß diese bei bestimmten, dem Transformator primär aufgezwungenen Frequenzen sehr bedeutende Resonanzüberspannungen ergeben kann; der Resonanzbereich ist jedoch glücklicherweise sehr schmal. Unter dem Einflusse der Eigenkapazität der Wicklung verteilt die Spannung sich sinusförmig über diese, so daß bei entsprechender Wellenlänge der Sinusfunktion, die durch die Kapazitäts- und Induktivitätsverhältnisse der Wicklung bestimmt wird, die im Innern der Wicklung herrschende Spannung größer werden kann als die Klemmspannung derselben.

Um nun das uns gestellte Problem überhaupt mathematisch behandeln zu können, sind wir gezwungen, gewisse vereinfachende Annahmen zu machen. Zu dem Zwecke idealisieren wir das uns gestellte Problem folgendermaßen: Primär- und Sekundärwicklung des Transformators seien als zwei übereinandergeschobene Röhren ausgeführt, die nur aus je einer Drahtlage mit gleicher Windungszahl bestehen. Wir wenden die Begriffe Selbstinduktion, gegenseitige Induktion und Kapazität formell an, diese Größen seien unabhängig von Strom und Spannung und auch von der Lage des betr. Leiterelementes. Die geometrische Anordnung der Wicklungen sei derart getroffen, daß sie gleiche Selbstinduktion und gleiche Kapazität besitzen. Wir vernachlässigen sämtliche Verluste.

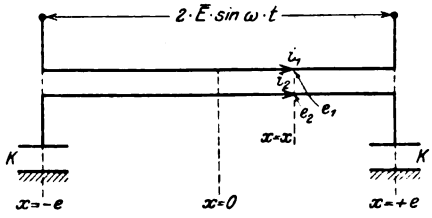


Fig. 1.

Es bezeichne:

λ die Selbstinduktion von Primär- und Sekundärwicklung pro Längeneinheit,
μ „ gegenseitige Induktion „ „ „ „ „ „
c „ Kapazität gegen Erde „ „ „ „ „ „
k „ Kapazität zwischen „ „ „ „ „ „

Λ, M, C, K seien dieselben Größen, jedoch auf die ganze Länge der beiden Wicklungen bezogen, deren gesamte Länge $2 \cdot l$ sei,

e_1 und i_1 seien ferner Spannung und Strom an irgendeinem Punkte der Primärwicklung,

e_2 und i_2 seien Spannung und Strom an irgendeinem Punkte der Sekundärwicklung,

x bedeute endlich die vom Wicklungsmittelpunkte nach rechts als positiv gerechnete Koordinate, t die Zeit.

Wir können dann unseren Betrachtungen das durch die Fig. 1 gezeigte Schema zugrunde legen.

[1]) Dina behandelt in der ETZ 1906 S. 191 das Verhalten des leerlaufenden Transformators mit Eigenkapazität. Das Problem wird hier unter etwas geänderten Voraussetzungen in Angriff genommen, es wird nämlich außer der Kapazität zwischen Primär- und Sekundärwicklung auch die Erdkapazität berücksichtigt, ferner der Einfluß der Spannung der Primärwicklung. Dina vernachlässigt diese Einflüsse.

Digitized by Google

Das Induktionsgesetz lautet nun für beide Wicklungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Primärwicklung:} && -\frac{\partial e_1}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t} + \mu \cdot \frac{\partial i_2}{\partial t} \\ &\text{Sekundärwicklung:} && -\frac{\partial e_2}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial i_2}{\partial t} + \mu \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Die Gleichungen für die dielektrischen Verschiebungsströme lauten ferner:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Primärwicklung:} && -\frac{\partial i_1}{\partial x} = c \cdot \frac{\partial e_1}{\partial t} + k \cdot \frac{\partial (e_1 - e_2)}{\partial t} \\ &\text{Sekundärwicklung:} && -\frac{\partial i_2}{\partial x} = c \cdot \frac{\partial e_2}{\partial t} - k \cdot \frac{\partial (e_1 - e_2)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) ergeben sich nun die folgenden Gleichungspaare:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial (e_1 + e_2)}{\partial x} &= (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial (i_1 + i_2)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial (i_1 + i_2)}{\partial x} &= c \cdot \frac{\partial (e_1 + e_2)}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial (e_1 - e_2)}{\partial x} &= (\lambda - \mu) \cdot \frac{\partial (i_1 - i_2)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial (i_1 - i_2)}{\partial x} &= (c + 2 \cdot k) \cdot \frac{\partial (e_1 - e_2)}{\partial t}. \end{aligned}\right\}$$

Aus jeder zweiten dieser Gleichungen ersehen wir, daß wir $e_1 + e_2$, $i_1 + i_2$ bzw. $e_1 - e_2$, $i_1 - i_2$ durch eine einzige Funktion des Ortes und der Zeit ausdrücken können, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} e_1 + e_2 &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ i_1 + i_2 &= -c \cdot \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad 3a)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ i_1 - i_2 &= -(c + 2 \cdot k) \cdot \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad 3b)$$

Dies in die erste dieser Gleichungen eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (\lambda + \mu) \cdot c \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad 4a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (\lambda - \mu) \cdot (c + 2 \cdot k) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad 4b)$$

Wir lösen diese partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die Form der sogen. Telegraphengleichung besitzen, durch folgenden Ansatz:

$$U = (A_1 \cdot \sin n_1 \cdot t + B_1 \cdot \cos n_1 \cdot t) \cdot V_1, \quad 5a)$$

$$V = (A_2 \cdot \sin n_2 \cdot t + B_2 \cdot \cos n_2 \cdot t) \cdot V_2. \quad 5b)$$

Hierin ist $V_{1,2}$ eine reine Ortsfunktion, und zwar ist:

$$V_1 = a_1 \cdot \sin m_1 \cdot x + b_1 \cdot \cos m_1 \cdot x, \quad 6a)$$

$$V_2 = a_2 \cdot \sin m_2 \cdot x + b_2 \cdot \cos m_2 \cdot x. \quad 6b)$$

Digitized by Google

Zwischen $m_{1,2}$ und $n_{1,2}$ besteht die Beziehung:

$$m_1 = n_1 \cdot \sqrt{\lambda \cdot c \cdot (1 + \varkappa)}, \tag{7a}$$

$$m_2 = n_2 \cdot \sqrt{\lambda \cdot (c + 2 \cdot k) \cdot (1 - \varkappa)}, \tag{7b}$$

wo:

$$\varkappa = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{M}{\Lambda}. \tag{7c}$$

In den eben angeschriebenen Gleichungen sind $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ und $n_{1,2}$ die willkürlichen Integrationskonstanten, welche erst aus den besonderen Bedingungen des uns gestellten Problems zu berechnen sind.

Wir können Spannung und Strom auf Primär- und Sekundärwicklung nun durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$e_1 = (A_1 \cdot \sin n_1 \cdot t + B_1 \cdot \cos n_1 \cdot t) \cdot V_1' + (A_2 \cdot \sin n_2 \cdot t + B_2 \cdot \cos n_2 \cdot t) \cdot V_2', \tag{8a}$$

$$i_1 = n_1 \cdot c \cdot (B_1 \cdot \sin n_1 \cdot t - A_1 \cdot \cos n_1 \cdot t) \cdot V_1 + n_2 \cdot (c + 2 \cdot k) \cdot (B_2 \cdot \sin n_2 \cdot t - A_2 \cdot \cos n_2 \cdot t) \cdot V_2, \tag{8b}$$

$$e_2 = (A_1 \cdot \sin n_1 \cdot t + B_1 \cdot \cos n_1 \cdot t) \cdot V_1' - (A_2 \cdot \sin n_2 \cdot t + B_2 \cdot \cos n_2 \cdot t) \cdot V_2', \tag{9a}$$

$$i_2 = n_1 \cdot c \cdot (B_1 \cdot \sin n_1 \cdot t - A_1 \cdot \cos n_1 \cdot t) \cdot V_1 - n_2 \cdot (c + 2 \cdot k) \cdot (B_2 \cdot \sin n_2 \cdot t - A_2 \cdot \cos n_2 \cdot t) \cdot V_2. \tag{9b}$$

$V_{1,2}'$ bedeutet, wie üblich, die erste Ableitung der Funktion $V_{1,2}$. Es stehen uns folgende Grenzbedingungen zur Berechnung der verschiedenen Integrationskonstanten zur Verfügung:

1. Im Punkte $x = l$[1]) liegt die Primärwicklung an der gegebenen Wechselspannung $E = \bar{E} \cdot \sin \omega \cdot t$, also:

$$e_1 = \bar{E} \cdot \sin \omega \cdot t \quad \text{für } x = l. \tag{10a}$$

2. Die Klemmen der Sekundärwicklung sind mit den beiden Belegen eines Kondensators mit der Kapazität $\frac{K}{2}$ verbunden, im Punkte $x = l$ sind also Strom und Spannung durch folgende Beziehung miteinander verbunden (Fig. 1):

$$i_2 = K \cdot \frac{\partial e_2}{\partial t} \quad \text{für } x = l. \tag{10b}$$

3. Die Hälften der Primär- und Sekundärwicklung stoßen im Punkte $x = 0$ unmittelbar zusammen, dort muß also jederzeit die Beziehung bestehen:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ e_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } x = 0. \tag{10c}$$

Aus (10a) folgt nun sofort:

$$n_1 = n_2 = \omega,$$

ferner unter Berücksichtigung der übrigen Grenzbedingungen:

$$B_1 = B_2 = 0.$$

Die Bedingung (10c) ergibt:

$$V_1'(0) = 0,$$

$$V_2'(0) = 0,$$

dies kann aber nur erfüllt sein, wenn:

$$a_1 = a_2 = 0.$$

[1]) Da die beiden Wicklungshälften primär- und sekundärseitig durchaus systematische Verhältnisse aufweisen, können wir unsere Betrachtungen auf die eine Wicklungshälfte $0 < x \leq l$ beschränken.

Digitized by Google

Die Konstanten b_1 und b_2 können ferner unbedenklich gleich 1 gesetzt werden, da ja die Konstanten A_1 und A_2 zunächst noch unbestimmt sind, ihre Wahl also noch vollkommen in unserer Hand liegt. Die Ortsfunktion $V_{1,2}$ und ihre Ableitung nimmt dann folgende einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \cos m_1 \cdot x \\ V_1' &= -m_1 \cdot \sin m_1 \cdot x \end{aligned}\right\} \qquad 11a)$$

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \cos m_2 \cdot x \\ V_2' &= -m_2 \cdot \sin m_2 \cdot x \end{aligned}\right\} \qquad 11b)$$

Setzen wir nun die sich damit ergebenden Gleichungen für Spannung und Strom in die Grenzbedingungen (10a) und (10b) ein, so ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen für die Konstanten A_1 und A_2:

$$A_1 \cdot m_1 \cdot \sin m_1 \cdot l + A_2 \cdot m_2 \cdot \sin m_2 \cdot l = \bar{E},$$

$$A_1 \cdot (c \cdot \cos m_1 \cdot l - k \cdot m_1 \cdot \sin m_1 \cdot l) = A_2 \cdot [(c + 2 \cdot k) \cdot \cos m_2 \cdot l - k \cdot m_2 \cdot \sin m_2 \cdot l].$$

Hieraus folgt sofort:

$$A_1 = \bar{E} \cdot \frac{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l - K \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{-1}{m_1 \cdot \sin m_1 \cdot l}, \qquad 12a)$$

$$A_2 = \bar{E} \cdot \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - K \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{-1}{m_2 \cdot \sin m_2 \cdot l}, \qquad 12b)$$

wo:

$$m_1 \cdot l = \omega \cdot \sqrt{\Lambda \cdot C \cdot (1 + \varkappa)}, \qquad 13a)$$

$$m_2 \cdot l = \omega \cdot \sqrt{\Lambda \cdot (C + 2 \cdot K) \cdot (1 - \varkappa)}, \qquad 13b)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\Lambda \cdot (1 + \varkappa)}{C}}, \qquad 13c)$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\Lambda \cdot (1 - \varkappa)}{C + 2 \cdot K}}. \qquad 13d)$$

Nachdem nun sämtliche Konstanten bestimmt sind, sind wir imstande, die vollständigen Gleichungen für Spannung und Strom in der Primär- und Sekundärwicklung anzuschreiben. Dieselben lauten:

$$e_1 = \bar{E} \cdot \left[\frac{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l - K \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{\sin m_1 \cdot x}{\sin m_1 \cdot l} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - k \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{\sin m_2 \cdot x}{\sin m_2 \cdot l} \right] \cdot \sin \omega \cdot t, \qquad 14a)$$

$$i_1 = \bar{E} \cdot \left[\frac{1}{Z_1} \cdot \frac{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l - k \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{\cos m_1 \cdot x}{\sin m_1 \cdot l} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Z_2} \cdot \frac{\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - K \cdot \omega \cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l - 2 \cdot K \cdot \omega \cdot Z_2} \cdot \frac{\cos m_2 \cdot x}{\sin m_2 \cdot l} \right] \cdot \cos \omega \cdot t, \qquad 14b)$$

Digitized by Google

$$e_2 = \bar{E}\cdot\left[\frac{\operatorname{cotg} m_2\cdot l - K\cdot\omega\cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_1}\cdot\frac{\sin m_1\cdot x}{\sin m_1\cdot l}\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - K\cdot\omega\cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_2}\cdot\frac{\sin m_2\cdot x}{\sin m_2\cdot l}\right]\cdot\sin\omega\cdot t, \qquad 15a)$$

$$i_2 = \bar{E}\cdot\left[\frac{1}{Z_1}\cdot\frac{\operatorname{cotg} m_2\cdot l - K\cdot\omega\cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_2}\cdot\frac{\cos m_1\cdot x}{\sin m_1\cdot l}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{Z_2}\cdot\frac{\frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - K\cdot\omega\cdot Z_2}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_2}\cdot\frac{\cos m_2\cdot x}{\sin m_2\cdot l}\right]\cdot\cos\omega\cdot t. \qquad 15b)$$

Die eben angeschriebenen Gleichungen beherrschen nun das Verhalten des unsern Untersuchungen zugrunde gelegten Transformators vollständig, da wir imstande sind, sämtliche auftretenden Erscheinungen aus denselben herauszulesen.

Setzen wir in Gl. (15a) $x = l$, so ergibt sich die sekundäre Klemmspannung, diese besitzt folgenden Effektivwert:

$$e_{2,\,x=l,\,\mathrm{eff}} = E\cdot\frac{\operatorname{cotg} m_2\cdot l - \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_2}. \qquad 16)$$

Für den von der Primärwicklung aufgenommenen Strom findet man auf analogem Wege:

$$i_{1,\,x=l,\,\mathrm{eff}} = \frac{E}{Z_1}\cdot\frac{2\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l\cdot\operatorname{cotg} m_2\cdot l - K\cdot\omega\cdot(Z_2\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l + Z_1\cdot\operatorname{cotg} m_2\cdot l)}{\operatorname{cotg} m_2\cdot l + \frac{Z_2}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l - 2\cdot K\cdot\omega\cdot Z_2}. \qquad 17)$$

Wir sehen schon, für

$$K\cdot\omega = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{Z_1}\cdot\operatorname{cotg} m_1\cdot l + \frac{1}{Z_2}\cdot\operatorname{cotg} m_2\cdot l\right) \qquad 18)$$

wird die sekundäre Klemmspannung unendlich groß, desgleichen der primär zufließende Strom, der sekundäre Stromkreis ist in diesem Falle in Resonanz mit der primär aufgezwungenen Frequenz.

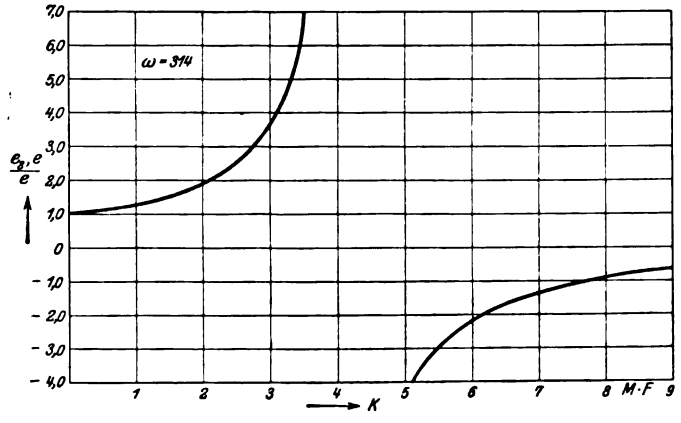


Fig. 2.

Die Fig. 2 zeigt die rechnerisch ermittelte Abhängigkeit des Übersetzungsverhältnisses $\left(\frac{e_{2,1}}{E}\right)$ eines Transformators (5000 KVA, 80 000 Volt) von der sekundären kapazitiven Belastung. Die Daten des Transformators waren ungefähr:

Digitized by Google

$$\Lambda = 400 \text{ Henry},$$
$$M = 398{,}65 \text{ Henry},$$
$$C = 1{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ Farad},$$
$$K = 5{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ Farad},$$
$$\omega = 314.$$

Man sieht, daß der Resonanzbereich sehr breit ist, aber andererseits, tritt die Resonanz erst bei sehr großen kapazitiven Belastungen ein, so entspricht eine Kapazität

$$K = 4{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ Farad}$$

bereits einer vom Transformator abgegebenen Ladeleistung von 4000 KVA. In Wirklichkeit wird ja der den Transformator speisende Generator sich bei derartig großen voreilenden Strömen nicht mehr teilnahmslos verhalten, er wird seine Spannung erhöhen und das Eintreten der Resonanz ganz bedeutend beschleunigen.

Für $K = 0$ geht Gl. (16) über in:

$$e_{2,\,x=1,\,\text{eff},\,K=0} = E \cdot \frac{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l - \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l}{\operatorname{cotg} m_2 \cdot l + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \operatorname{cotg} m_1 \cdot l}. \qquad 19)$$

Aus (13a) und (13b) folgt, daß $m_1 \cdot l$ stets groß gegenüber $m_2 \cdot l$ ist, da bei modernen Transformatoren $1 - x$ eine sehr kleine Zahl ist. Für

$$m_1 \cdot l > \frac{\pi}{2}$$

wird die Cotangente negativ, das Übersetzungsverhältnis des Transformators beginnt also von da ab zu wachsen und wird größer, als dem Verhältnis der primären und sekundären Windungszahlen entspricht. Das Übersetzungsverhältnis erreicht sein Maximum bei

$$\operatorname{cotg} m_1 \cdot l = -\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \operatorname{cotg} m_2 \cdot l, \qquad 20)$$

in diesem Falle wird

$$e_{2,\,x=1} = \infty.$$

Ist der Quotient

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{(1+x) \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{K}{C}\right)}{1-x}} \qquad 21)$$

groß, so tritt die Bedingung (20) erst für

$$m_1 \cdot l = \sim \pi$$

ein, und der Bereich, in welchem das Übersetzungsverhältnis des Transformators wesentlich größer als 1 wird, ist entsprechend dem Charakter der Gotangensfunktion ein sehr schmaler. Die Größe des Quotienten $\frac{Z_1}{Z_2}$ wird aber, wie Gl. (21) zeigt, hauptsächlich durch die Streuung bestimmt.

Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß auch der sekundär offene Transformator Resonanzerscheinungen zeigen kann, der Resonanzbereich kann höchstens zwischen den Grenzen

$$\frac{\pi}{2} < m_1 \cdot l < \pi$$

schwanken, wobei die Breite des Resonanzbereiches durch die Streuungsverhältnisse des Transformators bestimmt wird. Die Lage des Resonanzbereiches wird hingegen fast

Digitized by Google

nur durch die Größe von $m_1 \cdot l$ beeinflußt, Gl. (13a) zeigt, daß bei gegebener Frequenz hierfür die Größe der Selbstinduktion und der Kapazität gegen Erde der Transformatorenwicklung maßgebend ist, d. h. aber nichts anderes als die Spannung und Größe eines Transformators. Fig. 3 zeigt die Abhängigkeit des Übersetzungsverhältnisses des unserm vorigen Beispiele zugrunde gelegten, aber sekundär offenen Transformators von der Frequenz bei konstanter Primärspannung. Die Sekundärspannung springt auf den Wert ∞ für

$$m_1 \cdot l = \sim \pi, \quad 2 \cdot \pi, \quad 3 \cdot \pi, \ldots,$$

die geringe Breite des Resonanzbereiches ist sehr auffallend.

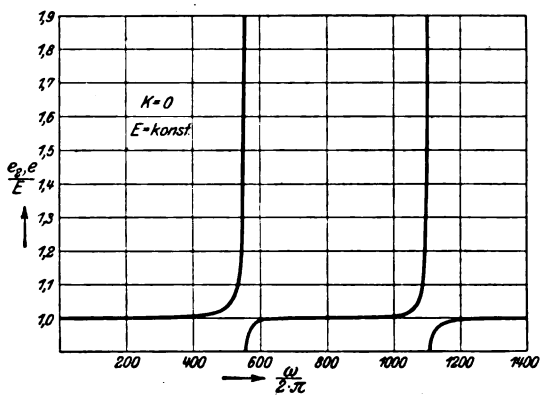


Fig. 3.

Den Gl. (14) und (15) kann man entnehmen, daß die Spannung sich räumlich entsprechend einer Sinusfunktion über die Transformatorenwicklung verteilt, und daß für

$$m_1 \cdot l = \frac{\pi}{2}$$

der halben Wicklungslänge l gerade eine Viertelwellenlänge entspricht. Für

$$m_1 \cdot l > \frac{\pi}{2}$$

wird demnach die größte Spannung nicht mehr am Ende der Wicklung auftreten, die Stelle der größten Spannung nähert sich vielmehr mit wachsendem $m_1 \cdot l$ der Wicklungsmitte. Will man also die größte an der Sekundärwicklung auftretende Spannung berechnen, so wird die Gl. (19) von

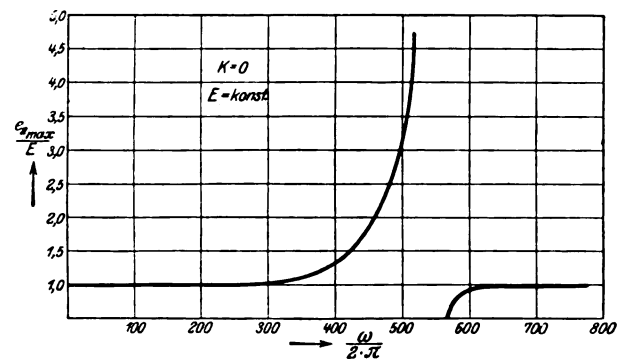


Fig. 4.

$$m_1 \cdot l > \frac{\pi}{2}$$

ab unbrauchbar, und man muß auf die Gl. (15a) zurückgreifen. Man wird dann sehen, daß für die maximale Sekundärspannung der Resonanzbereich wesentlich breiter wird als für die sekundäre Klemmspannung, was eine Gegenüberstellung der beiden Figuren 4 und 3 deutlich illustriert.

Zusätzliche Kupferverluste durch Stromverdrängung bei Einankerumformern.

Von

Dr.-Ing. **L. Dreyfus**, Berlin-Niederschönhausen.

1. **Einleitung.** Es gibt wohl außer dem ruhenden Transformator kaum eine Maschine, deren genaue Verlustbilanz den Praktiker in dem Maße interessiert, wie dies bei dem rotierenden Einankerumformer der Fall ist. Da dem Berechner und Konstrukteur in der

Digitized by Google

Dimensionierung dieser Type von vornherein freies Spiel gegeben war, konnte der Wetteifer der Firmen den Wirkungsgrad verhältnismäßig schnell auf eine Höhe treiben, wie sie keine andere rotierende Maschine erreicht. Es sei nur erwähnt, daß moderne Einankerumformer über 800 kW mit Wirkungsgraden von 96,5 bis 97 % — nach der Leerlaufmethode gemessen — offeriert werden.

Aber gerade infolge dieser außerordentlich günstigen Werte konnte es nicht ausbleiben, daß man mißtrauisch wurde und sich fragte: Wie groß sind denn die zusätzlichen Verluste, die man durch Leerlaufmessungen nicht erhält, und deren Berücksichtigung die Verbandsnormalien nicht verlangen? Dieses Mißtrauen bewog denn auch viele Abnehmer, für die Wirkungsgradbestimmung direkte Messungen vorzuschreiben. — Wer die in der Prüffeldpraxis beim besten Willen erreichbaren Genauigkeitsgrade kennt, der weiß, daß diese direkten Wirkungsgradbestimmungen ein zweischneidiges Schwert sind, und zwar ebensogut für den Kunden wie für den Lieferanten. In jedem Falle erscheint es mir richtiger, zunächst die indirekte Wirkungsgradbestimmung für Einankerumformer zu vervollkommnen, indem man alle diejenigen zusätzlichen Verluste, die der Rechnung zugänglich sind, auch wirklich berechnet und angibt. Hierher aber gehören in erster Linie die zusätzlichen Kupferverluste, welche durch Wirbelstrombildung infolge des pulsierenden Ankerstreufeldes entstehen. Ich hoffe, in dieser Arbeit zeigen zu können, daß ihre Vorausbestimmung auf einem Wege möglich ist, der bei einigem Zutrauen nicht nur für den Berechner, sondern auch für den Praktiker gangbar wäre.

2. Die Berechnung der Ankerkupferverluste. Der Stabstrom eines Einankerumformers ist ein Wechselstrom von komplizierter Kurvenform, der aus der Übereinanderlagerung des kommutierten Gleichstromes und der mehr oder weniger reinen Sinuswelle des aufgenommenen Wechselstromes hervorgeht. Die vorliegende Untersuchung stützt sich daher einerseits auf die Theorie von Field[1]), der uns zuerst die Wirbelstromverluste einer mit Wechselstrom gespeisten Stabwickelung zu berechnen lehrte, andererseits auf die Arbeiten des Verfassers[2]) über die zusätzlichen Kommutierungsverluste einer Gleichstrommaschine. Es erübrigt nur noch, beide Theorien für den Fall des Einankerumformers zu kombinieren, eine Aufgabe, deren Lösung sich keine analytischen Schwierigkeiten mehr in den Weg stellen.

Unser Einankerumformer besitze p Polpaare und $\tilde{m}$ Phasen. Die Periodenzahl des Wechselstromes sei ν, die Periodendauer betrage $2\,\Theta$ Sekunden. Der Anker besitze wie gewöhnlich eine Schleifenwickelung mit $\frac{s}{c}$ Kollektorsegmenten und einer Windung pro Segment. Die Bürstenbreite überdecke ü Kollektorlamellen. Das Bürstenjoch sei um einen Winkel β in elektrischen Graden aus der Neutralen vorverschoben.

Wenn wir in der Folge von der Kurve des kommutierten Gleichstromes sprechen, so wollen wir darunter stets die Änderung des Stromvolumens einer ganzen Stablage verstehen. Solcher Stablagen gibt es bei Gleichstromankern zwei oder vier, allgemein m, und jede Lage bestehe aus z nebeneinander angeordneten Leitern. Zwischen dem Anfang der Kommutierung des ersten und dem Abschluß der Kommutierung des letzten Leiters verstreicht eine Zeit

$$T_0 = 2\,p\,\Theta\,\frac{ü + z - 1}{\frac{s}{c}}, \qquad 1)$$

und wir wollen uns wie früher die Vernachlässigung gestatten, während dieser Kommutie-

[1]) A. B. Field: „Eddy Currents in Large Slotwound Conductors." Am. Inst. of El. Ing. 1905, S. 659. F. Emde: „Stromverdrängung in Ankernuten." E. u. M. 1908, S. 703. W. Rogowski: „Zusätzliche Kupferverluste einer Wechselstrommaschine." Arch. f. El., 2. Bd., 1913 H. 3.

[2]) L. Dreyfus: „Zusätzliche Kommutierungsverluste bei Gleichstrommaschinen." E. u. M. 1914, S. 281 ff. „Die Theorie der zusätzlichen Kommutierungsverluste bei Gleichstrommaschinen." Arch. f. El., 3. Bd., 1915 Heft 10/11.

Digitized by Google

rungsperiode die Änderung des Stromvolumens einer Lage geradlinig anzunehmen. Endlich möge das Stromvolumen aller übereinander angeordneten Stabschichten zu gleicher Zeit die gleiche Größe besitzen. Da man Einankerumformer aus Symmetriegründen fast immer mit reiner Durchmesserwicklung ausführt, ist diese Annahme gewöhnlich streng erfüllt. Aber auch da, wo man mit etwas verkürztem Wickelschritt arbeitet, zieht sie keinen nennenswerten Fehler nach sich.

Verfolgen wir jetzt die Änderung des Stromvolumens einer beliebig herausgegriffenen Ankernut P, die der mittleren Spule einer Phase M_{12} um einen Winkel α in elektrischen Graden voreilt (vgl. Fig. 1). Die Phasenmitte möge zur Zeit t = o die Neutrale passiert

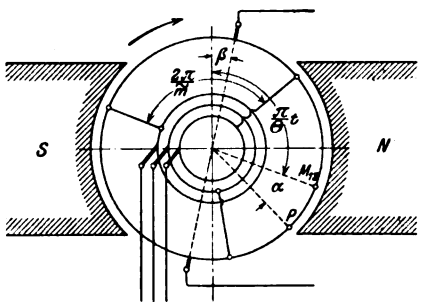


Fig. 1. Schematische Darstellung eines Drehstrom-Gleichstrom-Umformers.

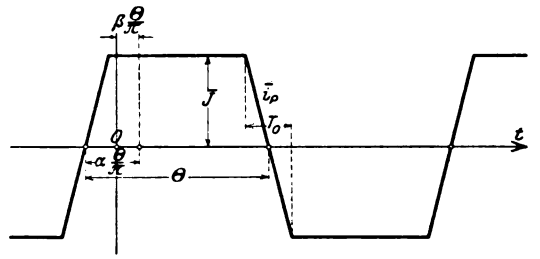


Fig. 2. Änderung des Stromvolumens einer Stablage.

haben, um sodann unter dem Nordpol positiv induziert zu werden, dann beschreibt das Gleichstromvolumen $\bar{i}_P$ jeder Lage der betrachteten Nut einen aus trapezförmigen Halbwellen gebildeten Wellenzug, der, wie in Fig. 2 dargestellt, gegen den Anfangspunkt der Zeitzählung orientiert ist. Man kann diese periodische Funktion auf bekannte Weise in eine Fouriersche Reihe entwickeln. Bezeichnet $\bar{J}$ den Maximalwert des kommutierten Gleichstromes einer Lage, so beträgt der Scheitelwert der n ten Harmonischen

$$\sqrt{2}\,\bar{J}_n = \frac{4}{n\pi} \cdot \bar{J} f_{cn} \qquad 2)$$

wenn durch den Faktor

$$f_{cn} = \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{2} \frac{T_0}{\Theta}\right)}{n \frac{\pi}{2} \frac{T_0}{\Theta}} \qquad 3)$$

der endlichen Kommutierungsdauer der Nut Rechnung getragen wird. Mit Hilfe dieser Substitution erscheint das analytische Gesetz der Gleichstromkurve in der Form

$$\bar{i}_P = \frac{4}{\pi} \bar{J} \sum_{1,3,.}^{\infty} \left[\frac{f_{cn}}{n} \sin n (\omega t + a - \beta) \right]. \qquad 4)$$

Man ist in der Praxis bestrebt, für die Kurve des Wechselstromes eine möglichst reine Sinuswelle zu erhalten. Inwieweit dies aber gelingt, hängt nicht nur von der Polform des Einankerumformers, sondern ebenso sehr von der Kurvenform des Netzes ab, an welches der Umformer angeschlossen wird. Wir wollen daher zunächst die höheren Harmonischen auch in der Wechselstromkurve berücksichtigen und allgemein den Maximalwert der n ten Harmonischen mit der Grundwelle

$$\sqrt{2}\,\tilde{J}_n = \sqrt{2}\,\tilde{J}_1 \cdot q_n \qquad 5)$$

einführen. Die Grundwelle selbst möge der durch Schneiden des Hauptfeldes erzeugten Phasenspannung $\dot{E}_{10}$ um einen Winkel

$$\vartheta_1 = 180^0 + \vartheta_1'$$

Digitized by Google

nacheilen. Die Phasenverschiebung der Oberwellen gegenüber der Grundwelle sei beliebig. Dann wird die Kurve des Wechselstromes durch den Asatz

$$\tilde{i}_P = -\sqrt{2}\,\tilde{J}_1 \sum_{1,3,.}^{\infty} [q_n \sin n\,(\omega t - \vartheta'_n)] \qquad 6)$$

auf das gleiche Koordinatensystem wie zuvor die Kurve des kommutierten Gleichstromes bezogen (vgl. Fig. 3).

Die Übereinanderlagerung der Gleich- und Wechselstromkurve ergibt den resultierenden Stabstrom der Fig. 4

$$\tilde{\bar{i}}_P = \bar{i}_P + \tilde{i}_P \qquad 7)$$

die vektorielle Addition der Harmonischen $(\bar{J}_n)_P$ und $(\tilde{J}_n)_P$ die resultierende Harmonische des Summenstromes (vgl. Fig. 5)

$$(\tilde{\bar{J}}_n)_P = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{f_{cn}}{n}\right)^2 \bar{J}^2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{f_{cn}}{n} q_n \bar{J}\,\tilde{J} \cos n\,(\vartheta'_n + \alpha - \beta) + q_n^2 \tilde{J}_n^2} \qquad 8)$$

Mit Hilfe dieser Formel hat man die Kupferverluste jeder einzelnen Harmonischen zu berechnen. Dabei ist zu beachten, daß innerhalb der Nut der Wechselstromwiderstand $\tilde{r}_n$ der Stablage im Verhältnis $\tilde{k}_n$ größer einzusetzen ist als der reine Gleichstromwiderstand $\bar{r}$, und daß dieses Verhältnis mit der Ordnungszahl der Harmoni-

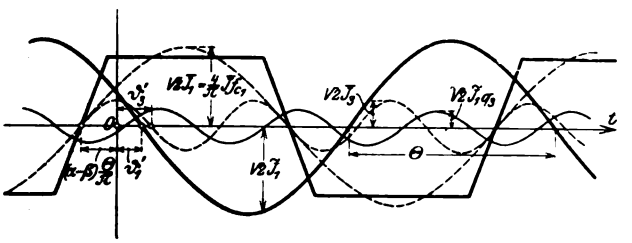


Fig. 3.

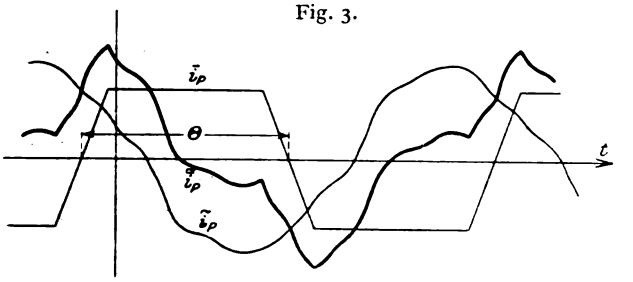


Fig. 4.

Fig. 3 und 4. Zusammensetzung des Stromvolumens einer Stablage.

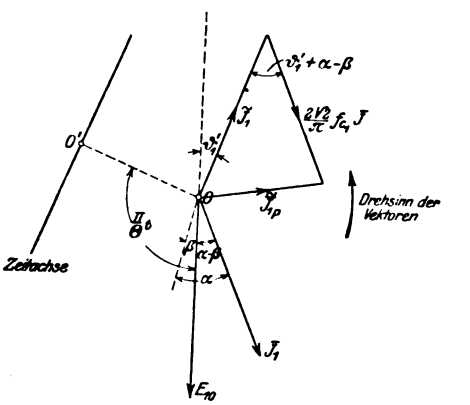


Fig. 5. Vektordiagramm der 1. Harmonischen des Gleich- und Wechselstromes.

schen variiert. Nach Rogowski bezeichnen wir es als das Widerstandsverhältnis der Nut und schreiben für die Kupferverluste der nten Harmonischen

$$(V_n)_P = \tilde{\bar{J}}_n^2\, \bar{r}\, \tilde{K}_n. \qquad 9)$$

Die Größe dieser Verluste ändert sich von Nut zu Nut, und man hat bei der Dimensionierung der Wickelung hierauf Rücksicht zu nehmen. Für die vorliegende Untersuchung interessiert jedoch nur der aus sämtlichen Nuten einer Phase gebildete Mittelwert

$$\text{Mitt}\,(V_n)_P = \frac{1}{\frac{2\pi}{m}} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} (V_n)_P\, d\alpha$$

$$= \left[\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{f_{cn}}{n}\right)^2 \bar{J}^2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} f_{cn}\, f_{w_n} \frac{q_n}{m} \bar{J}\,\tilde{J}_1 \cos n\,(\vartheta'_n - \beta) + q_n^2 \tilde{J}_1^2\right] \bar{r}\,\tilde{k}_n \qquad 10)$$

Digitized by Google

Die hierbei austretende Größe

$$f_{wn} = \frac{\sin n \frac{\pi}{m}}{n \frac{\pi}{m}} \qquad 11)$$

bezeichnet den bekannten Wickelungsfaktor, der für drei Phasen die Werte

$$f_{w1} = 0{,}827 \quad f_{w3} = 0 \quad f_{w5} = -0{,}165 \quad f_{w7} = 0{,}118$$

und für sechs Phasen die Werte

$$f_{w1} = 0{,}955 \quad f_{w3} = 0{,}637 \quad f_{w5} = 0{,}191 \quad f_{w7} = 0{,}137$$

besitzt.

Zum Schlusse fassen wir noch die Verluste der einzelnen Harmonischen zu den gesamten Nutverlusten zusammen. Das Resultat vereinfacht sich, wenn man sich überlegt, daß die Summenreihe

$$\sum \bar{V}_n = \sum_{1,3,..}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^2} \bar{J}^2 \frac{f_{cn}^2}{n^2} \right] \bar{r}\, \tilde{k}_n \qquad 12)$$

diejenigen Kupferverluste beschreibt, welche beim Betrieb als Gleichstromgenerator auftreten würden. Diese sind uns aber aus den oben zitierten Arbeiten bereits bekannt. Wir führen sie auf die reinen Gleichstromverluste der Nut mit Hilfe des Widerstandsverhältnisses $\bar{k}$ zurück und schreiben

$$\sum_{1,3...}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^2} J^2 \frac{f_{cn}^2}{n^2} \right] \bar{r}\, \tilde{k}_n = \bar{J}^2 \bar{r}\, \bar{k} \qquad 12a)$$

Durch diesen Kunstgriff bringen wir die Gleichung der resultierenden Nutverluste auf die Form

$$V = \bar{J}^2 \bar{r}\, \bar{k} - \sum_{1,3..}^{\infty} \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi} f_{cn} f_{wn} \frac{q_n}{n} \cdot \bar{J} \tilde{J}_1 \cos n(\vartheta' - \beta) - q_n^2 \tilde{J}_1^2 \right] \bar{r}\, \tilde{k}_n . \qquad 13)$$

Bei exakten Untersuchungen wird man gut tun, die Harmonischen des Wechselstromes aus oszillographischen Aufnahmen zu berechnen und in der obigen Formel einzuführen. Da uns aber für die später durchzurechnenden Beispiele die Kurvenform des Wechselstromes nicht bekannt ist, werden wir nur die erste Harmonische berücksichtigen. Außerdem wollen wir für das Verhältnis des inneren Gleich- und Wechselstromes von der Formel

$$\tilde{J}_1 \cos \vartheta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi f_{w1}} \cdot \bar{J} f_{c1} \qquad 14)$$

Gebrauch machen, die bei Vernachlässigung der Leerlaufverluste für sinusförmige Feldverteilung streng für ein Verhältnis

$$\alpha = \frac{\text{Polbogen}}{\text{Polteilung}} = 0{,}65 \text{ bis } 0{,}75$$

mit großer Annäherung gilt. Endlich darf man in Anbetracht der geringen Spannungsabfälle des Einankerumformers die innere Phasenverschiebung ϑ' gewöhnlich mit der äußeren Phasenverschiebung φ zwischen Strom- und Klemmspannung identifizieren und die Bürstenverschiebung β vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung der Nutverluste

$$V = \bar{J}^2 r \left[\bar{k} - \tilde{k}_1 \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{f_{c1}}{f_{w1}} \right)^2 \cdot (2 f_{w1}^2 - 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \right] = J^2 \bar{r}\, \tilde{\bar{v}} \qquad 15)$$

werden wir den Zahlenbeispielen des letzten Abschnittes zugrunde legen. Unter Vernachlässigung der zusätzlichen Verluste ($\bar{k} = 1$, $\tilde{k} = 1$) und der Kommutierungsdauer ($f_{c1} = 1$)

Digitized by Google

findet man die Auswertung dieser Formel in allen Hand- und Taschenbüchern der Elektrotechnik. Arnold und La Cour[1]) berechneten diesen Verlustfaktor, den wir mit $\tilde{\bar{v}}_0$ bezeichnen wollen, für drei Werte des Verhältnisses

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{Wattlose Komponente}}{\text{Watt-Komponente}} \text{ des Wechselstromes}$$

und erhielten folgende Zahlen

$\operatorname{tg}\varphi$:	0	0,3	0,5
$\tilde{m} = 3$:	0,567	0,68	0,87
$\tilde{m} = 6$:	0,267	0,345	0,485

Sinngemäß bezeichnet man daher das Verhältnis

$$\tilde{\bar{k}} = \frac{\tilde{\bar{v}}}{\tilde{\bar{v}}_0} \tag{16}$$

als das Widerstandsverhältnis der Nut bei Konverterbetrieb.

Unter Umständen wird man es vorziehen, an Stelle der Nutverluste V die Verluste der ganzen Spule V_g zu berechnen. In den Mantelverbindungen vom Widerstand $\bar{r}_s = \bar{r} \cdot \varepsilon$ treten zusätzliche Verluste nicht auf. Setzt man daher für den Spulenwiderstand

$$\bar{r}_g = \bar{r}(1 + \varepsilon) \tag{17}$$

und für das Widerstandsverhältnis der Spule

$$\bar{x} = \frac{\bar{k} + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{k} + \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \tag{18}$$

so erhält man für die gesamten Kupferverluste im Nut- und Wickelkopf

$$V_g = \bar{J}^2 \bar{r}_g \left[\bar{x} - \tilde{x}_1 \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \left(\frac{f_{c1}}{f_{w1}}\right)^2 (2 f_{w1}^2 - 1 - \operatorname{tg}^2\varphi)\right] = \bar{J}^2 \bar{r}_g \tilde{\bar{v}}_g \tag{19}$$

und für das Widerstandsverhältnis der ganzen Ankerwicklung bei Konverterbetrieb

$$\tilde{\bar{x}} = \frac{\tilde{\bar{v}}_g}{\tilde{\bar{v}}_0} = \frac{\tilde{\bar{v}} + \varepsilon \tilde{\bar{v}}_0}{\tilde{\bar{v}}_0 (1 + \varepsilon)} = \frac{\tilde{\bar{k}} + \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \tag{20}$$

3. Das Widerstandsverhältnis der Nut für Wechselstrom, Gleichstrom und Konverterbetrieb. Beschickt man eine Stabwickelung mit Wechselstrom, so bildet jeder Leiter für das pulsierende Nutenstreufeld einen Kurzschlußkreis, und wie bei jedem Transformator, so hängt auch hier der Energieverbrauch des Sekundärkreises, d. h. die Verluste der Wirbelströmung, von dem Verhältnis des induktiven zum Ohmschen Widerstande ab. Wenn wir also innerhalb der Nutlänge l einen massiven Stab von der Breite b[2]) und Höhe h und dem Widerstande $\bar{r}$ durch eine Leiterschleife von der Höhe $\frac{h}{2}$ und dem Widerstande $4\bar{r}$ ersetzen (vgl. Fig. 6), so dürfen wir in dem Verhältnis des induktiven Widerstandes ωL_e zum Ohmschen Widerstande $4\bar{r}$ eine für die Verlustbildung charakteristische Größe erblicken.

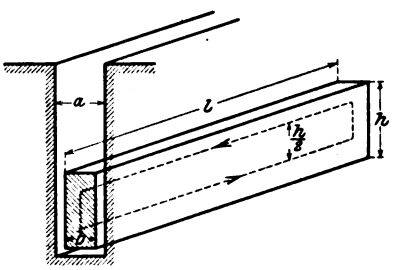


Fig. 6. Nutenstab und Ersatzstromkreis.

[1]) Die Wechselstromtechnik, IV. Bd. Die synchronen Wechselstrommaschinen.

[2]) Bei mehreren Stäben pro Lage bezeichnet b die gesamte aktive Kupferbreite der Nut.

Digitized by Google

Nun wird bei einer Nutbreite von a cm

$$\omega L_e = 0{,}4\,\pi^2 v \frac{l}{a} h\, 10^{-8}$$

und

$$4\bar{r} = \frac{4l}{b\,h\,\lambda}$$

wenn $\lambda \mathrel{\widehat{=}} 50 \cdot 10^4$ die Leitfähigkeit eines Kupfereinheitswürfels von 1 ccm Inhalt bezeichnet.

Man erhält also

$$\frac{\omega L_e}{4\bar{r}} = \pi^2 h^2 \cdot v \frac{b}{a} \lambda\, 10^{-9}$$

und wirklich hat man auch in der Literatur zwar nicht dieses Verhältnis, aber doch eine sehr verwandte Größe, nämlich

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega L_e}{\bar{r}}} = 2\pi h \sqrt{v \frac{b}{a} \lambda \cdot 10^{-9}}$$

$$\mathrel{\widehat{=}} h \sqrt{\frac{v}{50} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\lambda \cdot 10^{-4}}{50}} \qquad 21)$$

als Grundlage für die Berechnung der Wirbelstromverluste gewählt. Wie man aus der letzten Fassung erkennt, besitzt diese Substitution die Größenordnung der Stabhöhen, mit der sie bei 50 Perioden und voller Ausnützung der Nutbreite übereinstimmen würde. Man bezeichnet sie daher häufig als „reduzierte Stabhöhe", wenn sie auch streng genommen als das Verhältnis zweier Widerstände keine Dimension besitzt.

Tabelle I.

Widerstandsverhältnis der Nut für sinusförmigen Wechselstrom bei 2 und 4 Stablagen.

ξ	m = 2		m = 4		ξ	m = 2		m = 4	
	$\tilde{k}_1$	$(\tilde{k}_1)$	$\tilde{k}_1$	$(\tilde{k}_1)$		$\tilde{k}_1$	$(\tilde{k}_1)$	$\tilde{k}_1$	$(\tilde{k}_1)$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	0,8	1,169	1,164	1,706	1,697
0,1	1,000	1,000	1,000	1,002	0,9	1,269	1,262	2,121	2,115
0,2	1,000	1,001	1,003	1,003	1,0	1,406	1,400	2,687	2,700
0,3	1,004	1,003	1,014	1,014	1,2	1,81	1,83	4,36	4,56
0,4	1,010	1,010	1,044	1,044	1,4	2,40	2,54	6,84	7,53
0,5	1,026	1,025	1,109	1,106	1,6	3,20		10,12	
0,6	1,054	1,052	1,225	1,220	1,8	4,13		13,97	
0,7	1,099	1,096	1,415	1,408	2,0	5,14		18,14	

In der Zahlentafel I ist das Widerstandsverhältnis $\tilde{k}_1$ für zwei und vier Stabschichten berechnet und in Fig. 7 aufgetragen. Obwohl diese Daten an sich bekannt sind, glaubte ich sie doch in diesen Aufsatz aufnehmen zu sollen, damit der Leser von den abgeleiteten Formeln ohne lästiges Nachschlagen Gebrauch machen kann.

Die in der Tabelle eingeklammerten Werte des Widerstandsverhältnisses sind nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} m = 2 \quad &: \quad \tilde{k}_1 = 1 + 0{,}4\,\xi^4 \\ m = 4 \quad &: \quad \tilde{k}_1 = 1 + 1{,}7\,\xi^4 \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

berechnet. Bis zu $\xi = 1{,}2$ stehen sie mit den theoretisch richtigen Werten in bester Übereinstimmung, und diese Grenze wird bei Gleichstromankern fast niemals überschritten. Man darf daher die zusätzlichen Verluste stets proportional dem Quadrate der Periodenzahl und der vierten Potenz der Stabhöhe annehmen.

Digitized by Google

Das Widerstandsverhältnis einer mit kommutiertem Gleichstrom beschickten Nut ist durch die Angabe der reduzierten Stabhöhe ξ und der Anzahl m der Stablagen noch nicht ausreichend bestimmt. Eine entscheidende Rolle spielt auch noch die Kommutierungszeit oder, richtiger gesagt, die „spezifische Kommutierungsdauer". Der Zusatz „spezifisch" drückt aus, daß die Kommutierungszeit nicht nach Sekunden zu messen, sondern mit einem anderen, dem Leiter charakteristischen Zeitintervall zu vergleichen sei. Diesen Vergleichswert bildet die sogenannte „Zeitkonstante" des Leiters.

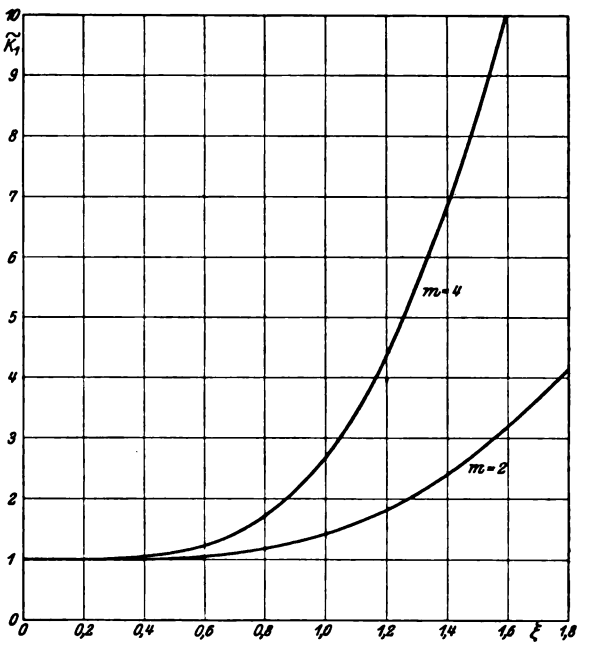


Fig. 7. Das Widerstandsverhältnis der Nut für sinusförmigen Wechselstrom bei 2 und 4 Stablagen.

Wir haben zuvor in roher Annäherung den Kurzschlußkreis, den der massive Stab dem veränderlichen Nutenstreufeld bietet, durch eine Leiterschleife von halber Höhe ersetzt. Unter der Zeitkonstante dieses Ersatzstromkreises versteht man das Verhältnis seiner Induktivität zu seinem Ohmschen Widerstande, also

$$T_e = \frac{L}{4r} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a} h^2 \lambda \, 10^{-9}\right)$$

multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{8}{\pi^2} = 0{,}81$, so erhält man in der Größe

$$T = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{b}{a} h^2 \lambda \cdot 10^{-9} \qquad 23)$$

die Zeitkonstante und in dem Verhältnis

$$\gamma = \frac{T_0}{T} \qquad 24)$$

die spezifische Kommutierungsdauer der Stablage. Je geringer dieser Wert, desto größer die Wirbelstromverluste. Wir berechnen daher als Funktion von γ einen Reduktionsfaktor Φ_m, mit dem man die Wirbelstromverluste der momentanen Kommutierung nur zu multiplizieren brauchte, um die wirklichen Verluste zu erhalten. Damit erhielt die Gleichung des Widerstandsverhältnisses einer Stablage die Form

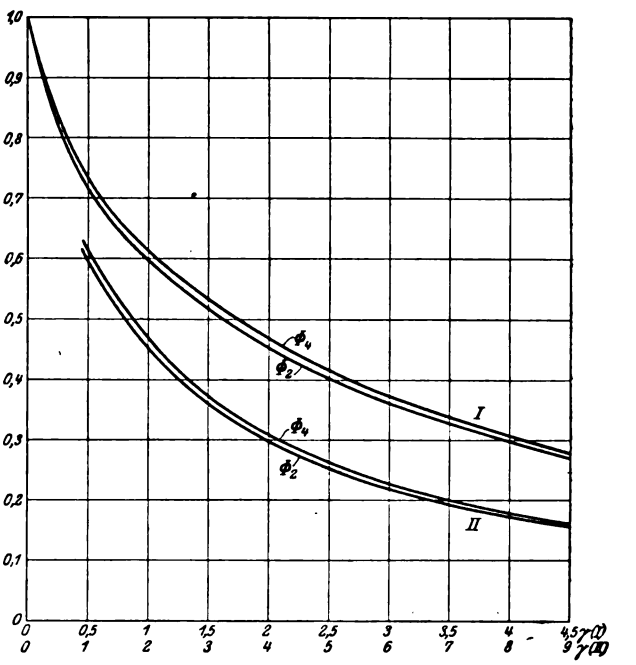


Fig. 8. Der Reduktionsfaktor Φ für 2 und 4 Stablagen.

$$\bar{k} = 1 + \frac{4}{3\pi} m^2 \xi^2 \Phi_m. \qquad 25)$$

Digitized by Google

In der Zahlentafel II und der zugehörigen Fig. 8 ist der Reduktionsfaktor Φ für zwei und vier Stablagen abgebildet. Gemäß seiner Definition besitzt er bei unendlich schneller Stromwendung die Größe 1; da man aber bei guten praktischen Ausführungen stets mit Werten der spezifischen Kommutierungsdauer unter 1 arbeitet, so beträgt der Reduktionsfaktor fast ausnahmslos weniger als 0,6.

Tabelle II.

Der Korrektionsfaktor Φ bei 2 und 4 Stablagen.

γ	m = 2		m = 4		γ	m = 2		m = 4	
	Φ_2	(Φ_2)	Φ_4	(Φ_4)		Φ_2	(Φ_2)	Φ_4	(Φ_4)
0	1,000		1,000		2,0	0,454	0,442	0,470	0,460
0,2	0,850	$\left[=0{,}625\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\right]$	0,861	$\left[=0{,}65\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\right]$	2,6	0,392	0,388	0,406	0,404
0,4	0,750		0,767		3,2	0,346	0,349	0,358	0,363
0,6	0,687		0,703		4,0	0,297	0,312	0,308	0,325
0,8	0,636		0,653		5,0	0,251		0,261	
1,0	0,597	0,625	0,614	0,650	7,0	0,193		0,200	
1,4	0,530	0,528	0,547	0,549	9,0	0,155		0,160	
					12,0	0,120		0,125	

Für den praktisch wichtigsten Bereich $\gamma = 1$ bis 4 mögen überdies noch Näherungsformeln mitgeteilt werden, die die Verhältnisse recht gut wiedergeben. Sie lauten

$$\Phi_2 = 0{,}625\sqrt{\frac{1}{\gamma}} = \frac{0{,}625}{\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{T_0}{\Theta}}}\xi \quad \text{bzw.} \quad \Phi_4 = 0{,}65\sqrt{\frac{1}{\gamma}} = \frac{0{,}65}{\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{T_0}{\Theta}}}\xi \qquad 26)$$

und die in der Tabelle II unter den Rubriken (Φ) angegebenen Zahlen sind nach diesen Formeln berechnet. Mit Gleichung (25) kombiniert liefern sie für das Widerstandsverhältnis der Nut die einfachen Ausdrücke

$$m = 2: \ \bar{k} = 1 + \frac{0{,}27}{\sqrt{\frac{T_0}{\Theta}}}\xi^3 \quad \text{bzw. } m = 4: \ \bar{k} = 1 + \frac{1{,}12}{\sqrt{\frac{T_0}{\Theta}}}\xi^3. \qquad 27)$$

Die zusätzlichen Verluste wachsen also bei einer Gleichstrommaschine mit geradliniger Stromübergangskurve annähernd mit der 1,5 ten Potenz der Periodenzahl und der 3. Potenz der Stabhöhe, d. i. langsamer als bei sinusförmigem Wechselstrom.

Höher als bei Speisung mit Gleich- oder Wechselstrom liegt das Widerstandsverhältnis der Ankerwickelung beim Konverterbetrieb und am höchsten in dem praktisch wichtigsten Falle des ohne Phasenverschiebung arbeitenden Umformers. Hierfür sind in Fig. 9 und 10 die Kurven des drei- und sechsphasigen Konverters mit Zweilagenwickelung aufgetragen, und zwar für den ideellen Grenzfall der momentanen Kommutierung sowie für die Annahmen

$$\frac{T_0}{\Theta} = 0{,}08,\ 0{,}10,\ 0{,}12 \text{ und } 0{,}14,$$

die praktischen Ausführungen entsprechen. Hiernach sollte man es bei sechsphasigen Umformern bereits vermeiden, Wickelungen mit $\xi > 0{,}8$ auszuführen, d. h. Stabhöhen von etwa 11 mm bei 50 Perioden zu überschreiten; und das umsomehr, als sich diese Bedingung in der Regel bis zu den größten Typen leicht erfüllen läßt. Im Zweifelsfalle wird man sich fragen, wie denn der effektive Widerstand

$$\underline{\underline{r}}_g = \underline{\underline{r}}_g \underline{\underline{x}}$$

Digitized by Google

unter sonst gleichen Verhältnissen von der Wahl der Stabhöhe h abhängt. Die Antwort läßt sich ebenfalls aus den Kurven der Fig. 9 und 10 ablesen. Denn da

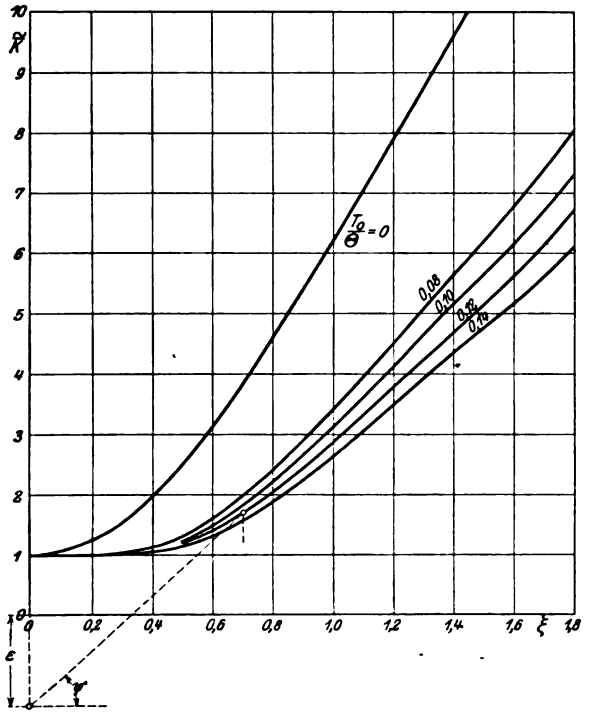


Fig. 9. Das Widerstandsverhältnis der Nut bei 6-phasigen Konvertern mit 2 Stablagen (cos φ = 1,0).

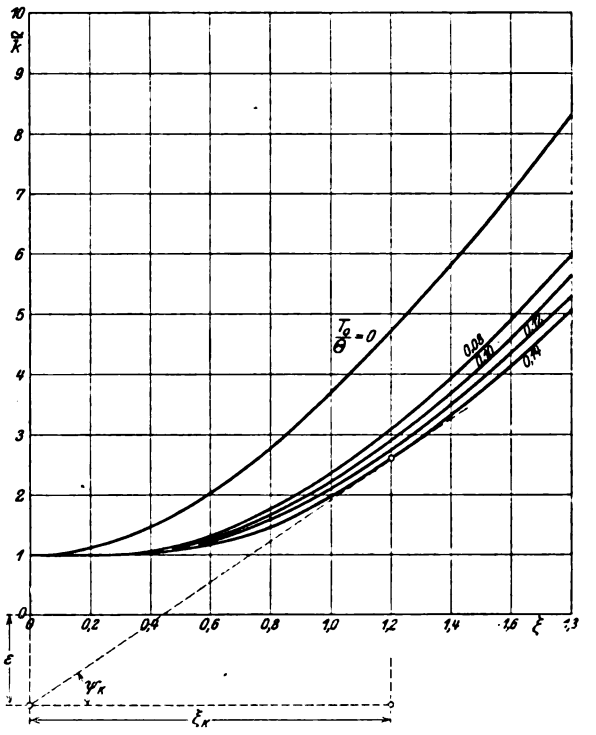


Fig. 10. Das Widerstandsverhältnis der Nut bei 3-phasigen Konvertern mit 2 Stablagen (cos φ = 1).

$$\bar{r}_g = \frac{l(1+\varepsilon)}{b\,h\,\lambda} = \text{const}\,\frac{1+\varepsilon}{\xi}$$

und

$$\bar{\varkappa} = \frac{\bar{k}+\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

so wird

$$\bar{r}_g = \text{const}\,\frac{\bar{k}+\varepsilon}{\xi},$$

mit anderen Worten: trägt man sich auf negativem Aste der Ordinatenachse im Abstande ε vom Ursprung einen Punkt P ein und zieht von ihm aus einen Fahrstrahl nach irgendeinem Punkte der $\bar{k}$-Kurve, so ist die Tangente des Neigungswinkels ψ gegen die Abszissenachse ein Maß für den effektiven Widerstand oder die Kupferverluste der Wickelung. Auf diesem Wege findet man, daß die Verluste des sechsphasigen Konverters bei einer Wickelungsausladung von $\varepsilon = 1{,}0$ bis 1,5 in der Gegend von $\xi = 0{,}8$ bis 1 ein Minimum besitzen. Wer also die oben mit Rücksicht auf die absolute Höhe der Wirbelstromverluste angegebene Dimensionierungsregel

$$\xi \leqq 0{,}8$$

beherzigt, braucht sich um den kritischen Wert der reduzierten Stabhöhe nicht mehr zu kümmern.

4. Anwendung der Theorie auf praktische Beispiele. Zunächst möge an einem besonders eklatanten Beispiele gezeigt werden, wie bitter es sich rächt, wenn man auf die

Digitized by Google

zusätzlichen Kupferverluste keine Rücksicht nimmt. Ich entnehme dieses Beispiel dem Handbuche „Dynamobau"[1]) von Prof. Pichelmayer. Es ist sehr dankenswert, wenn Autoren aus dem Schatze ihrer Erfahrungen auch solche Fehlschläge mitteilen, an denen oft mehr zu lernen ist als an farblosen Schulbeispielen.

Zahlenbeispiel 1.

6 Phasenkonverter der Maschinenfabrik Leopoldau bei Wien (Siemens und Halske). 550 kW — 550 Volt — 1000 Amp. — 500 U. p. M. — 50 Perioden.

Wicklungsangaben:

Schleifenwicklung:	Parallele Kreise	$2\bar{a} = 12$
Nutausfüllung:	Anzahl der Stablagen . . .	$m = 2$
	Effekt. Stäbe pro Lage . . .	$z = 3$
	Kupferbreite, Nutbreite . . .	$\frac{b}{a} = 0{,}46$
	Ausgeführte Stabhöhe . . .	$h = 1{,}8$ cm
	Reduzierte Stabhöhe . . .	$\xi = 1{,}22$
Windungslänge:	$\frac{\text{inaktive}}{\text{aktive}}$	$\varepsilon = 1{,}6$
Kollektor:	Lamellenzahl	$\frac{s}{c} = 468$
	Von 1 Bürste überdeckte Lamellen	$\ddot{u} = 3{,}4$

Wichtige Zeitwerte:

Dauer einer halben Periode	$\Theta = 1 \cdot 10^{-2}$	$\frac{T_0}{\Theta} = 0{,}139$
Kommutierungsdauer einer Stablage .	$T_0 = 0{,}139 \cdot 10^{-2}$	$f_{c1} = 0{,}992$
Zeitkonstante einer Stablage	$T = 01{,}096 \cdot 10^{-2}$	
Spezifische Kommutierungsdauer einer Stablage	$\frac{T_0}{T} = 1{,}45$	$\Phi = 0{,}525$

Widerstandsverhältnis der Nut:

Für sinusförmigen Wechselstrom		$\tilde{k}_1 = 1{,}86$
„ momentane Kommutierung		$\bar{k}_0 = 3{,}54$
„ allmähliche geradlinige Kommutierung . .		$\bar{k} = 2{,}33$
„ Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{\bar{k}} = 3{,}7$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{\bar{k}} = 3{,}3$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{\bar{k}} = 2{,}85$

Widerstandsverhältnis der Spule:

Für Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{\varkappa} = 2{,}0$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{\varkappa} = 1{,}85$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{\varkappa} = 1{,}7$

Verlustfaktor des Konverters:

Für die Nut bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{v} = 0{,}99$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{v} = 1{,}13$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{v} = 1{,}39$

[1]) Siehe S. 696 und folgende.

Digitized by Google

Für die Spule bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{\tilde{v}}_g = 0{,}54$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{\tilde{v}}_g = 0{,}64$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{\tilde{v}}_g = 0{,}83$

Die Dimensionierung dieser Maschine ist nicht glücklich. Hätte man die 18 mm hohen Stäbe auf 11 mm, d. h. um 65% reduziert, so hätte man bei $\cos\varphi = 1$ nur etwa 5% mehr Verluste erhalten. Dafür wäre das Widerstandsverhältnis der Nut von 3,7 auf 1,7 reduziert worden, bei einer effektiven Stromdichte von etwa 2,9 Ampere pro qmm, also einem durchaus zulässigen Werte. Was aber noch wichtiger ist: man hätte auf diese Weise die durch das Hauptfeld in der Armatur hervorgerufenen Wirbelstromverluste auf mindestens ein Viertel ihres Wertes herabgesetzt. Tatsächlich erreichte der Umformer infolge dieser hohen Verluste gerade noch einen Wirkungsgrad von 90%, und nur der vorzüglichen Ausführung der Ventilation war es zu danken, daß keine übermäßig hohen Erwärmungen auftraten.

Zahlenbeispiel 2.

6 Phasenkonverter der Ateliers de Constructions électriques, Charleroi. 300 kW — 600 Volt — 500 Amp. — 1000 U. p. M. — 50 Perioden — $\cos\varphi = 1{,}0$.

Wicklungsangaben:

Schleifenwicklung:	Parallele Kreise	$2\bar{a} = 6$
Nutausfüllung:	Anzahl der Stablagen . . .	$m = 2$
	Effekt. Stäbe pro Lage . . .	$z = 5$
	Kupferbreite, Nutbreite . .	$\frac{b}{a} = 0{,}5$
	Ausgeführte Stabhöhe . . .	$h = 1{,}3$ cm
	Reduzierte Stabhöhe . . .	$\xi = 0{,}92$
Windungslänge:	$\frac{\text{inaktive}}{\text{aktive}}$ (geschätzt)	$\varepsilon = 1{,}5$
Kollektor:	Lamellenzahl	$\frac{s}{c} = 360$
	Von 1 Bürste überdeckte Lamellen	$\ddot{u} = 2{,}9$

Wichtige Zeitwerte:

Dauer einer halben Periode	$\Theta = 1 \cdot 10^{-2}$	$\frac{T_0}{\Theta} = 0{,}115$
Kommutierungsdauer einer Stablage .	$T_0 = 0{,}115 \cdot 10^{-2}$	$f_{c1} = 0{,}995$
Zeitkonstante einer Stablage	$T = 0{,}054 \cdot 10^{-2}$	
Spezifische Kommutierungsdauer einer Stablage	$\frac{T_0}{T} = 2{,}1$	$\Phi = 0{,}44$

Widerstandsverhältnis der Nut:

Für sinusförmigen Wechselstrom		$\tilde{k}_1 = 1{,}30$
„ momentane Kommutierung		$\bar{k}_0 = 2{,}44$
„ allmähliche geradlinige Kommutierung . . .		$\bar{k} = 1{,}63$
„ Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{\tilde{k}} = 2{,}6$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{\tilde{k}} = 2{,}3$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{\tilde{k}} = 2{,}0$

Digitized by Google

Widerstandsverhältnis der Spule:

Für Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{\varkappa} = 1{,}6$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{\varkappa} = 1{,}5$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{\varkappa} = 1{,}4$

Verlustfaktor des Konverters:

Für die Nut bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{v} = 0{,}69$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{v} = 0{,}79$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{v} = 0{,}97$
Für die Spule bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{v}_g = 0{,}43$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{v}_g = 0{,}52$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{v}_g = 0{,}68$

Das vorliegende Beispiel ist dem vierten Band von Arnolds „Wechselstrom-Technik" entnommen und zeigt, daß man in der Praxis mit der Wahl der Stabhöhe teilweise recht sorglos umging.

Für moderne Einankerumformer, bei denen man mit jedem Zehntel Prozent des Wirkungsgrades geizt, wären 60% zusätzliche Kupferverluste schon etwas viel. Sie würden im betrachteten Falle den Wirkungsgrad um etwa 0,3% drücken. Ganz abgesehen von den bei Stabhöhen von 13 mm gar nicht mehr so kleinen Wirbelstromverlusten, welche die Pulsation des Hauptfeldes innerhalb der Nut verursacht. Dieser Umformer arbeitet eben in nächster Nähe der kritischen Stabhöhe, und das sollte man vermeiden. Im vorliegenden Falle erlaubte vielleicht die Rücksicht auf die effektive Stromdichte keine Reduktion der Stabhöhe. Man konnte aber jeden Stab in zwei übereinanderliegende parallele Leiter von halber Höhe unterscheiden und hätte dann folgende Werte erhalten:

Widerstandsverhältnis der Nut:

Für sinusförmigen Wechselstrom	$\tilde{k}_1 = 1{,}08$	
„ momentane Kommutierung	$\bar{k}_0 = 2{,}44$	
„ allmähliche geradlinige Kommutierung .	$\bar{k} = 1{,}24$	$(\gamma = 8{,}4;\ \Phi_4 = 0{,}17)$
„ Betrieb als Konverter mit $\cos\varphi = 1$.	$\tilde{k} = 1{,}7$	

Widerstandsverhältnis der Spule:

Für Betrieb als Konverter mit $\cos\varphi = 1$.	$\tilde{\varkappa} = 1{,}3$	

Zum Schlusse noch ein Beispiel eines richtig dimensionierten Konverters, welcher im vierten Band von Arnolds „Wechselstrom-Technik" (vgl. S. 855 und folgende) ziemlich ausführlich beschrieben ist.

Zahlenbeispiel 3.

6-Phasen-Konverter der AEG.-Berlin. 1300 kW — 650 Volt — 2000 Amp. 375 U. p. M. — 50 Perioden — $\cos\varphi = 1{,}0$.

Wicklungsangaben:

Schleifenwicklung:	Parallele Kreise	$2\bar{a} = 16$
Nutausfüllung:	Anzahl der Stablagen . . .	$m = 2$
	Effekt. Stäbe pro Lage . . .	$z = 2$
	Kupferbreite, Nutbreite . .	$\frac{b}{a} = 0{,}45$
	Ausgeführte Stabhöhe . . .	$h = 0{,}9$ cm
	Reduzierte Stabhöhe . . .	$\xi = 0{,}6$

Digitized by Google

Windungslänge:	$\frac{\text{inaktive}}{\text{aktive}}$ (geschätzt) . . .	$\varepsilon =$	1,0
Kollektor:	Lamellenzahl	$\frac{s}{c} =$	672
	Von 1 Bürste überdeckte Lamellen	$\ddot{u} =$	2,9

Wichtige Zeitwerte:

Dauer einer halben Periode	$\Theta = 1 \cdot 10^{-2}$	$\frac{T_0}{\Theta} = 0{,}093$
Kommutierungsdauer einer Stablage.	$T_0 = 0{,}093 \cdot 10^{-2}$	$f_{c1} = 0{,}996$
Zeitkonstante einer Stablage	$T = 0{,}0233 \cdot 10^{-2}$	
Spezifische Kommutierungsdauer einer Stablage	$\frac{T_0}{T} = 4{,}0$	$\Phi = 0{,}30$

Widerstandsverhältnis der Nut:

Für sinusförmigen Wechselstrom		$\tilde{k}_1 = 1{,}05$
„ momentane Kommutierung		$\bar{k}_0 = 1{,}61$
„ allmähliche geradlinige Kommutierung . .		$\bar{k} = 1{,}18$
„ Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{k} = 1{,}54$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{k} = 1{,}45$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{k} = 1{,}32$

Widerstandsfähigkeit der Spule:

Für Betrieb als Konverter mit . . .	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{x} = 1{,}27$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{x} = 1{,}22$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{x} = 1{,}16$

Verlustfaktor des Konverters:

Für die Nut bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{v} = 0{,}41$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{v} = 0{,}50$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{v} = 0{,}64$
Für die Spule bei	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\tilde{v}_g = 0{,}34$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}3$	$\tilde{v}_g = 0{,}42$
	$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$	$\tilde{v}_g = 0{,}57$

5. Schlußbemerkungen. Es kam mir in der vorliegenden Arbeit darauf an, zu zeigen, wie die durch Pulsation des Ankerstreufeldes bedingten Armaturverluste bei Konvertern zu berechnen seien, wenn man von den die Nut durchsetzenden äußeren Feldern absieht. Bei geringeren Zahn- und Rückensättigungen ist dies auch unbedingt zulässig. Und da das Nutenstreufeld des Ankerleiters von der Sättigung ziemlich unabhängig ist, so darf man hier auf eine gute Übereinstimmung der Theorie mit der Wirklichkeit rechnen, wenn auch eine experimentelle Bestätigung zunächst noch aussteht.

Bei hoher Eisensättigung hingegen ist zu bedenken, daß vor allem das Hauptfeld in den einzelnen Stabfasern Wirbelströme erzeugt, die sich gleichfalls in eine Fouriersche Reihe entwickeln lassen. Und da deren Amplituden zur behandelten Wirbelströmung im allgemeinen nicht in Quadratur stehen, so stößt die Trennung der durch das Ankerfeld und durch die äußeren Felder hervorgerufenen Verluste bei belasteter Maschine auf einige Hindernisse. Es darf jedoch behauptet werden, daß auch diese Schwierigkeiten, ohne dem

Digitized by Google

Gegenstand Gewalt anzutun, zu überwinden sind, und daß bei der Lösung dieser allgemeineren Aufgabe die früheren Arbeiten gute Dienste leisten werden.

Und noch auf ein anderes verwandtes Gebiet spielt die Untersuchung der Wirbelströmung hinüber, d. i. auf die Theorie der Kommutierung: Man wird mit Rücksicht auf das Gegenfeld der Wirbelströme die Reaktanzspannung bei Kollektormaschinen einer Revision zu unterziehen haben, die mit manchen Unklarheiten der älteren Theorie aufräumen wird.

Zur Definition der induzierten elektromotorischen Kraft[1]).

Von

W. Rogowski.

1. Alte Vorstellung vom Induktionsvorgange. Bei Faraday und seinen Zeitgenossen richtet sich das Augenmerk auf die markanteste Erscheinung der Induktion: auf die Erzeugung elektrischer Ströme. Das Besondere des Induktionsvorganges wird im Drahte gesucht. Das Streben der Physiker geht nach einer Aufstellung der Gesetze der induzierten Strömung. Hierfür gibt noch 1851 Faraday an:

„Die induzierte Strommenge ist der Zahl der geschnittenen Kraftlinien proportional."

Man beobachtete nun, daß der Proportionalitätsfaktor sich mit dem Widerstande des induzierten Stromkreises änderte. Infolgedessen ergab es sich als zweckmäßig, der Zahl der geschnittenen Kraftlinien (dem Induktionsflusse) nicht unmittelbar den induzierten Strom, sondern zunächst eine elektromotorische Kraft zuzuordnen und aus dieser den induzierten Strom wie bei Gleichstrom zu berechnen. So entstand die folgende noch heute gebrauchte Fassung (Fassung I):

„Die induzierte EMK ist gleich der zeitlichen Abnahme des Induktionsflusses."

Dieser Ausdrucksweise liegt die Vorstellung zugrunde, daß beim Induktionsvorgange in den Leiter hinein ein elektrisches Elementchen getragen wird, das seinerseits die Ursache des induzierten Stromes ist (Vorstellung I).

2. Heutige Auffassung vom Induktionsvorgange. Wir suchen heute das Besondere des Induktionsvorganges nicht allein im Drahte, sondern auch außerhalb desselben im ganzen Raume. Wir denken uns diesen bei dem Induktionsvorgange durch ein elektrisches Feld erfüllt (Vorstellung II). Die Vorgänge im Draht ordnen sich diesem Felde nach bestimmten, vom Induktionsvorgange unabhängigen Vorschriften an. Diese Erweiterung unserer Anschauungen hat eine neue Fassung des Induktionsgesetzes erfordert. Ihren Ausdruck findet sie in der zweiten Maxwellschen Hauptgleichung. In integrierter Form lautet sie (Fassung II):

„Die elektrische Umlaufspannung ist gleich der zeitlichen Abnahme des Induktionsflusses."

3. Stehen nun die Vorstellungen I und II miteinander im Einklang oder widersprechen sie sich? Solange man nur Augen für den elektrischen Strom im Drahte hat, führen beide Vorstellungen zu demselben Ergebnis. Wird aber das elektrische Feld außerhalb der Drähte in die Betrachtung einbezogen, so stehen sie in Widerspruch. Die Vorstellung I erfordert außerhalb des Drahtes immer ein wirbelfreies, die Vorstellung II immer ein

---

[1]) Ich verdanke die Anregung zu diesem Aufsatz meiner Mitarbeit beim AEF. Wiederholt sind dort Vor- und Nachteile der verschiedenen Möglichkeiten der Definition der induzierten EMK zur Sprache gekommen, so daß in den Abschnitten 1—4 im wesentlichen nur die Darstellung von mir stammt. Im Abschnitt 5 dürfte der Vergleich mit dem magnetischen Felde, das wir Ingenieure uns gut maxwellsch vorzustellen gewohnt sind, manchem willkommen sein. Der vorliegende Aufsatz ist namentlich durch Aussprache mit Herrn Emde und K. W. Wagner gefördert worden.

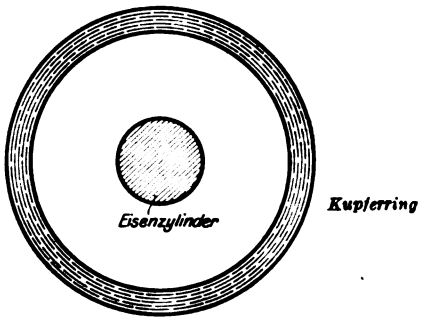
Digitized by Google

wirbelhaftes Feld. Es liege z. B. der Fall[1]) vor, daß ein Kupferring durch einen magnetisierten konzentrisch angeordneten Eisenzylinder induziert werde (Fig. 1). Das induzierte Element (die induzierte EMK) hätte man sich hier aus Symmetriegründen auf dem ganzen Kreisringe gleichmäßig verteilt vorzustellen. Das zugehörige elektrische Feld außerhalb des Drahtes verschwindet alsdann genau so, wie wir es bei einer kreisringförmig gebogenen Zambonischen Säule oder etwa bei einer kreisringförmig aufgestellten kurzgeschlossenen Akkumulatorenbatterie von großer Zellenzahl[2]) erwarten müssen. Dagegen führt die Vorstellung II für das Drahtäußere auf ein von Null verschiedenes elektrisches Feld. Die elektrischen Kraftlinien bestehen aus konzentrischen Ringen (Fig. 2). Nun unterliegt es nach unseren Erfahrungen keinem Zweifel, daß außerhalb des Kupferringes ein elektrisches Feld vorhanden sein muß. Nicht alle, wohl aber ein Teil der Folgerungen der Vorstellung I steht daher mit der Erfahrung im Widerspruch. Eine physikalische Existenz kann die induzierte EMK somit nicht haben[3]). Der Vorstellung I kann daher nun der Rang einer Hilfsvorstellung mit beschränktem Anwendungsgebiet zukommen.

4. Folgerungen. Die induzierte EMK ist eine eingeprägte EMK (ein eingeschaltetes Element), die wir uns beim Induktionsvorgange zur Berechnung des induzierten Stromes in einen linearen Leiter hineingetragen denken können, der dann aber eine physikalische Existenz nicht zukommt.

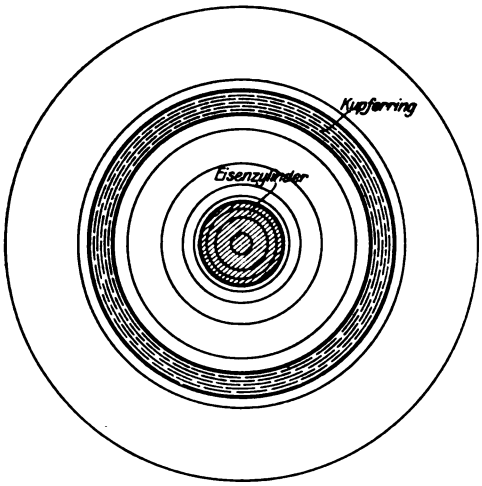
Bei der Vorstellung I redet man von dem, was nach der Meinung mancher Fachgenossen da sein soll. Bei der Vorstellung II redet man von dem, was wirklich da ist. Vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus geurteilt, sollte man allein die Vorstellung II empfehlen, dagegen die Vorstellung I mitsamt der induzierten EMK der Geschichte überweisen. Für den Augenblick aber scheint dies zu gewagt zu sein, da die induzierte EMK noch zu fest im Sprachgebrauche wurzelt und die Vorstellung II noch nicht einer großen Zahl von Fachgenossen geläufig ist. Will man für das jetzige Zeitbedürfnis die induzierte EMK definieren, so kann man dies auf folgende Weisen tun:

A. Man hält an der Vorstellung I als einer Hilfsvorstellung fest und versteht unter der induzierten EMK eine eingeprägte EMK, der aber eine physikalische Existenz nicht zukommt (vgl. oben).



——— Strömungslinie.
——— Kraftlinie des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$.

Fig. 1. Induktion eines Kupferringes nach der alten Vorstellung.



——— Strömungslinie.
——— Kraftlinie des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$.

Fig. 2. Induktion eines Kupferringes nach der heutigen Vorstellung.

[1]) Das Beispiel stammt von Emde.

[2]) Die Berührung einer solchen kurzgeschlossenen Akkumulatorenbatterie ist ungefährlich. Wird der Kurzschluß dagegen geöffnet, so kann die Berührung der Öffnungsstelle bei genügender Zellenzahl wegen des dann dort vorhandenen elektrischen Feldes mit Lebensgefahr vorbunden sein.

[3]) Vgl. F. Emde, E. u. M. 1909, S. 786 Ende des zweiten Abschnittes.

Digitized by Google

B. Man gibt die Vorstellung I auf, behält aber das Wort induzierte EMK bei, bezeichnet aber mit demselben abweichend vom Vorschlage A eine mit der Vorstellung II verträgliche Größe. Man tut dies in der Absicht, eine Übergangsstufe von Vorstellung I zu II zu schaffen. Man kann nun unter der induzierten EMK verstehen:

1. die Umlaufspannung im wirklichen elektrischen Felde;
2. die Umlaufspannung im reinen Wirbelanteile des elektrischen Feldes[1]);
3. die zeitliche Änderung des Induktionsflusses.

Der Vorschlag A hat den Vorteil, daß er bei der üblichen Elementauffassung der induzierten EMK bleibt, aber den Nachteil, daß zu leicht übersehen wird, daß diese induzierte EMK keine physikalische Existenz hat. Der Vorschlag A kann daher zu der Frage nach der induzierten EMK pro Leiterelement und zu falschen Vorstellungen vom elektrischen Felde verführen (vgl. oben).

Der Vorschlag B_1 hat den Vorteil der Einfachheit und weiter den Vorteil, daß er eine reelle elektrische Größe unter der induzierten EMK versteht, und daß er die Wortfassungen I und II des Induktionsgesetzes in Einklang bringt. Während man aber bisher (Vorschlag A) gewohnt war, die induzierte EMK in den Teilen der Drahtleitung zu suchen, wo das magnetische Feld seine kräftigsten Werte hat, wird man nach der Definition B_1 den Hauptteil dieser induzierten EMK dort suchen müssen, wo das elektrische Feld seine kräftigsten Werte hat (z. B. zwischen den Klemmen eines Transformators).

Der Vorschlag B_2 vereinigt sämtliche Vorzüge des Vorschlags B_1, ohne dessen Nachteil in Kauf zu nehmen[2]). Er würde am besten geeignet sein, die Vorstellungen I und II miteinander zu verquicken. Er setzt aber zu viel theoretisches Rüstzeug voraus, so daß er praktisch nicht in Betracht kommt.

Der Vorschlag B_3 hat ebenfalls den Vorteil der Einfachheit. Seine Nachteile sind, daß er 1. eine magnetische Größe unter der induzierten EMK versteht, und 2. daß nach ihm ähnlich wie unter B_1 die induzierte EMK außerhalb des Drahtes zu suchen ist.

Die Vorschläge B tragen den Charakter einer halben Maßregel. Es ergibt sich ein für den Verstand schmerzlicher Widerspruch, wenn der Klang des Wortes „induzierte EMK" auf die Vorstellung I, die Definition aber auf die Vorstellung II hinweist.

5. Eine Analogie Es soll noch die Frage angeschnitten werden, ob voraussichtlich die Vorstellung I und die induzierte EMK beibehalten werden, oder ob sie im Laufe der Zeit aus der Denk- und Sprechweise verschwinden werden. Bei der Antwort wird man die Schwierigkeiten abzuschätzen haben, die eine allgemeine Anwendung der Vorstellung II erfordern wird. Es soll nachgewiesen werden, daß solche Schwierigkeiten, wenn sie wirklich bestehen sollten, von der Fachwelt bereits auf einem anderen Gebiete überwunden worden sind.

Es sei eine bestimmte Gleichströmung $\mathfrak{i}_h$ gegeben und eine bestimmte Raumanordnung der Permeabilität μ vorgeschrieben. Jeder Physiker und Ingenieur ist heute in der Lage, das Feld der Induktion $\mathfrak{B}_h$ und das zugehörige magnetische Feld $\mathfrak{H}_h$ den großen Zügen nach anzugeben. Das Feld $\mathfrak{H}_h$ ist durch folgende Forderungen an die Gleichströmung $\mathfrak{i}_h$ gekettet:

1. Die Umlaufspannung von $\mathfrak{H}_h$ ist gleich der Durchflutung (dem Flusse von $\mathfrak{i}_h$).
2. Der Fluß von $\mu\,\mathfrak{H}_h$ hat an allen Stellen einer Kraftröhre denselben Wert.

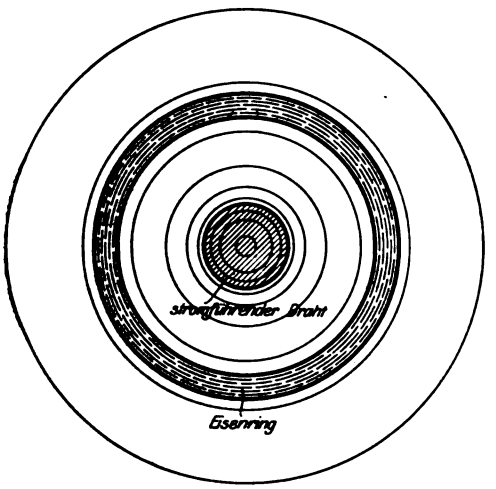
---

[1]) Ähnlich wie man ein beliebiges magnetisches Feld $\mathfrak{H}$ zerlegen kann in ein Feld, welches nur von den elektrischen Strömen in Abwesenheit von Eisen hervorgebracht wird (reiner Wirbelanteil), und in ein zweites, welches seine Existenz den in oder auf dem Eisen influenzierten magnetischen Belegungen verdankt (reiner Quellenanteil), kann man auch jedes andere Vektorfeld und somit auch das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ in einen Wirbelanteil und Quellenanteil zerlegen. Der reine Wirbelanteil würde dann von einem Magnetfelde induziert werden, wenn die Leitfähigkeit sämtlicher Körper null wäre und wenn sämtliche Körper die gleiche Dielektrizitätskonstante besäßen.

[2]) Man vgl. Lenz, Archiv f. Elektrot. II, S. 67.

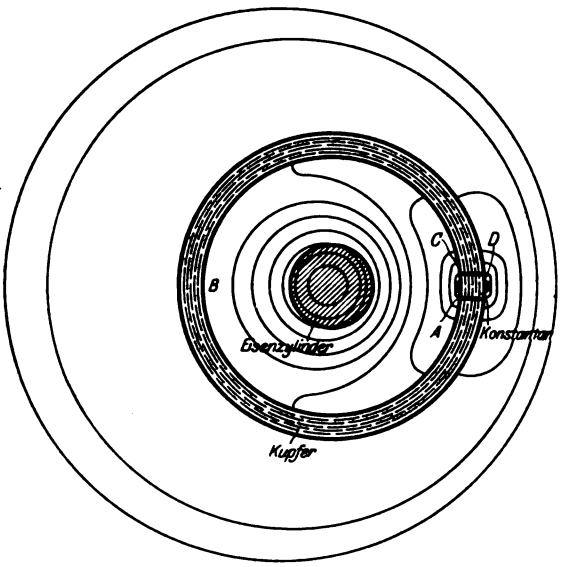
Digitized by Google

Wir setzen nun, eine neue Aufgabe anschneidend, ein zeitlich veränderliches Induktionsfeld $\mathfrak{B}$ (dieses darf nicht mit $\mathfrak{B}_h$ verwechselt werden) voraus. Im Raume sei leitendes Material (Leitfähigkeit σ) in Form von Drähten verteilt. Es werde



——— Induktionslinie.
——— Linie der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$.

Fig. 3.



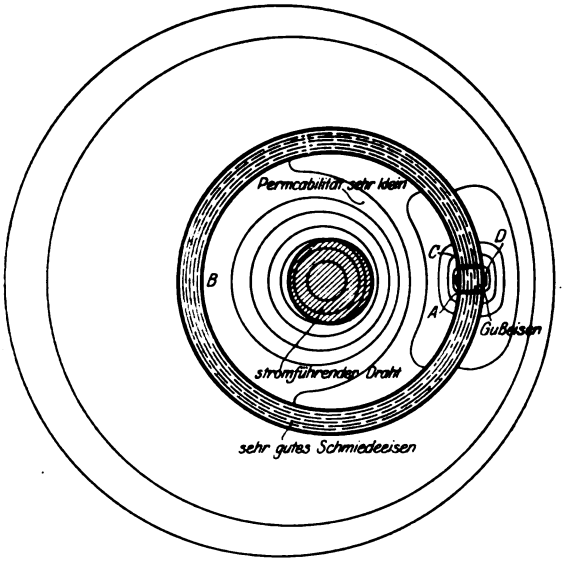
——— Strömungslinie.
——— Linie der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$.

Fig. 4.

eine so kurze Zeitspanne in Betracht gezogen, daß $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ als konstant angesehen werden kann. (Später lassen wir diese Voraussetzung fallen.) Gesucht ist das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ der Induktion. Dieses ist durch folgende Forderungen an das Feld $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ gekettet:

1. Die Umlaufspannung von $\mathfrak{E}$ ist gleich dem magnetischen Schwunde[1]) (dem Flusse von $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$).
2. Der Fluß von $\sigma\,\mathfrak{E}$ hat an allen Stellen einer Kraftröhre denselben Wert.

Mit diesen Forderungen vergleichen wir die obigen Forderungen. Es wird eine völlige Übereinstimmung erzielt, wenn das Vektorfeld $\mathfrak{i}_h$ dem Vektorfelde $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$, die Permeabilität μ der Leitfähigkeit σ, die Feldstärke $\mathfrak{H}_h$ der Feldstärke $\mathfrak{E}$ entspricht.



——— Induktionslinie.
——— Linie der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$.

Fig. 5.

Geben wir daher der Gleichströmung $\mathfrak{i}_h$ im vorigen Abschnitt überall den Wert von $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ und legen wir der Permeabilität μ überall den Wert σ der elektrischen

[1]) Eine Bezeichnung, die bisher nur innerhalb AEF, aber noch nicht öffentlich vorgeschlagen worden ist.

Digitized by Google

Leitfähigkeit bei, so stimmt das Feld $\mathfrak{H}_h$ mit dem gesuchten Felde $\mathfrak{E}$ der Induktion überein.

Z. B. werde ein homogener Kupferring durch einen konachsial angeordneten Eisenzylinder induziert (Fig. 1). Dann verlaufen die Feldlinien $\mathfrak{E}$ genau so, wie die Linien $\mathfrak{H}$ bei einem Eisenring, der durch einen geraden Draht magnetisiert wird (vgl. Fig. 2. u. 3). Ist der Ring nicht homogen, sondern besteht er auf der Länge A B C aus gut leitendem, auf der Länge C D A aus schlecht leitendem Material (Fig. 4), so stimmt das induzierte Feld $\mathfrak{E}$ praktisch überein mit dem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ eines Ringes aus magnetisch sehr gutem Schmiedeeisen und einem Zwischenstücke aus Gußeisen (praktisch ist dies das Feld des geschlitzten Ringes)[1]). (Fig. 5.)

Will man den Induktionsvorgang nicht nur für eine kurze, sondern für eine längere Zeitspanne verfolgen, so teilt man die letztere in eine Reihe von kurzen Teilabschnitten und erhält für jeden ein besonderes Bild des induzierten elektrischen Feldes. Sämtliche Bilder werden ihren wesentlichen Zügen nach unter sich übereinstimmen, sich aber in quantitativer Hinsicht unterscheiden.

Die Oberfläche des magnetisierten Eisens belädt sich mit magnetischen Mengen. Die Oberfläche des induzierten Drahtes belädt sich mit elektrischen Mengen. Die Stärke dieser Ladung wird im allgemeinen von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt sich ändern: dies erfordert, daß außer der gewöhnlich betrachteten induzierten Längsströmung auch eine Querströmung im Drahte vorhanden sein muß. Auch über solche Feinheiten kann man sich an Hand der entwickelten Analogie rasch ins Klare setzen.

Niemand spricht heutzutage bei der Magnetisierung von Eisen durch den elektrischen Strom von einer „induzierten magnetomotorischen Kraft". Ihre Einführung würde einen bedenklichen Rückschritt bedeuten. Niemand braucht bei dem Induktionsvorgange von einer induzierten EMK zu sprechen. Ihre Ausmerzung würde ein wissenschaftlicher Fortschritt sein.

[1]) Ein weiteres Beispiel zu dieser Analogie findet sich in meiner Arbeit über den Wechselstrommotorzähler; Archiv f. Elektrot. I. S. 205.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 3. Heft. 1915.

Über den Wechselstromwiderstand von kurzen Spulen aus Litze.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

I. Formel für lange Spulen aus Litze. Im III. Bande des Archivs S. 264 habe ich gezeigt, wie man den Wechselstromwiderstand langer Spulen aus Litze berechnen kann. Ich wies daselbst nach, daß man für das Widerstandsverhältnis $k\left(\frac{\text{Wechselstromwiderstand}}{\text{Gleichstromwiderstand}}\right)$ der einlagigen Spule[1]) zu schreiben hat:

$$k = \varphi(\xi) + \frac{z-1}{3}\psi(\xi). \qquad 1)$$

z ist die Zahl der Einzeldrähte der Litzenader. Ist der Durchmesser des Einzeldrahtes d, so ist

$$\xi = 0{,}89\,\alpha\,d;$$

$$\text{wo } \alpha = \frac{1}{50}\sqrt{n\,L\,\sqrt{z}\cdot 0{,}89\,\frac{d}{g}},$$

n = Frequenz, L = Leitfähigkeit (für handwarmes Kupfer L = 50), g = Ganghöhe. $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ sind 2 Funktionen der „reduzierten" Drahtstärke ξ.

Für kleine Werte ($\xi < 0{,}75$) kann man setzen:

$$\varphi(\xi) = 1 + 0{,}09\,\xi^4,$$

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}.$$

Für große Werte ($\xi > 2$) gilt:

$$\varphi(\xi) = \xi,$$

$$\psi(\xi) = 2(\xi).$$

Für mittlere Werte kann man den Wert der Funktionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ entweder den genauen Formeln oder der Tabelle Archiv, II. Bd., S. 96, 98, oder den Figuren 1 und 2 der vorliegenden Arbeit entnehmen.

Nicht die lange, sondern die kurze Spule ist in der drahtlosen Telegraphie der normale Fall. Es ist vorauszusehen, daß sich die genaue Formel für das Widerstandsverhältnis beliebig langer Spulen aus dem Ausdruck 1 als dem Hauptbestandteile zusammensetzen muß und aus Zusatzgliedern, die die Spulenlänge l enthalten und für großen Wert von l verschwinden. Sind nun bei normalen Abmessungen die Zusatzglieder von Bedeutung? Oder bedeuten sie eine so kleine Verbesserung der Formel 1, daß sie vom Praktiker im allgemeinen vernachlässigt werden können?

[1]) Für mehrlagige Spulen aus Litze lautet die Formel:

$$k = \varphi(\xi_1) + \frac{\lambda^2 z - 1}{3}\psi(\xi); \qquad \lambda = \text{Lagenzahl}.$$

Digitized by Google

Da trifft es sich gut, daß Herr Dr. Alexander Meißner im Jahre 1909 Widerstandsmessungen an kurzen Spulen mitgeteilt hat (Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie 1909, S. 57).

Ich habe die Formel an diesen Messungen geprüft und gefunden, daß sie mit ihnen im allgemeinen in gutem Einklange steht, und daß man im allgemeinen von einer Verbesserung der Formel 1 für normale Spulen absehen kann. Über diesen Vergleich will ich kurz berichten.

2. Prüfung der Formel 1 bei kurzen Spulen. Die 3 von Meißner untersuchten Spulen waren aus Emaillelitze gewickelt. Die Dimensionsverhältnisse gehen aus den Figuren 3 bis 5 hervor. Der Augenschein lehrt, daß es sich um ziemlich kurze Spulen handelt.

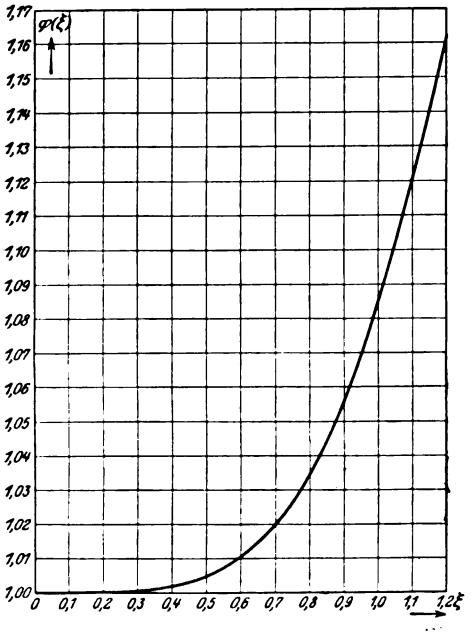


Fig. 1. Die Funktion φ (ξ).

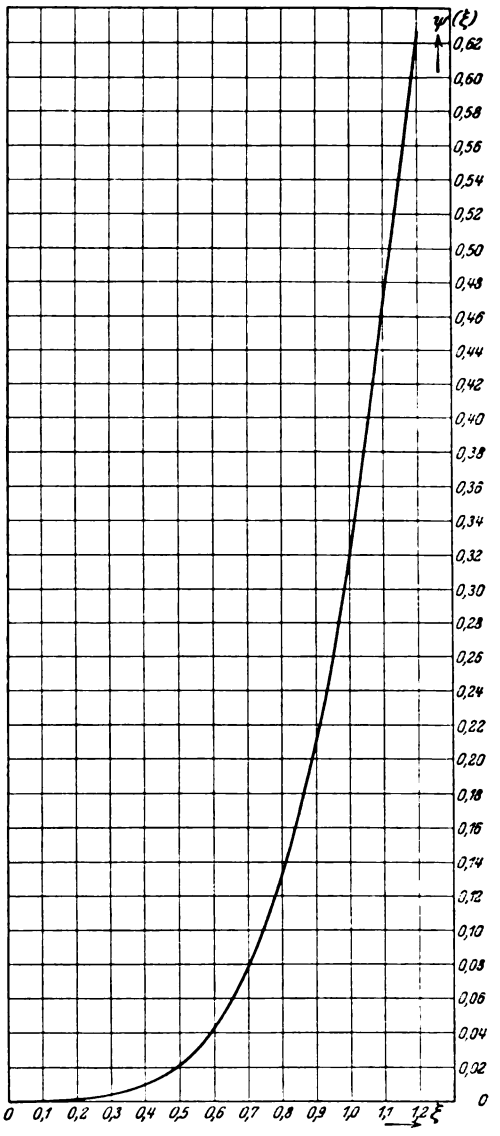


Fig. 2. Die Funktion ψ (ξ).

Fig. 3.
Spule I.

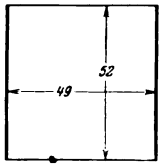


Fig. 4.
Spule II.

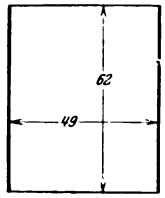


Fig. 5.
Spule III.

In den folgenden Tabellen sind die von Herrn Meißner angegebenen Werte eingerahmt. Die Messungen des Herrn Meißner geben, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt, den Wechselstromwiderstand zu hoch an. Die Kondensatordämpfung, die Dämpfung durch ein bei der Messung benutztes Hitzdrahtinstrument sind dem gemes-

Digitized by Google

senen Wechselstromwiderstande zur Last gelegt (vgl. S. 66 a. a. O.). Außerdem treten noch Fehler durch Schwankungen der primären Funkenstrecke hinzu, die Herr Meißner zu 5% schätzt. Um diese Fehlerquellen auszumerzen, habe ich in den Figuren 6—8 die von

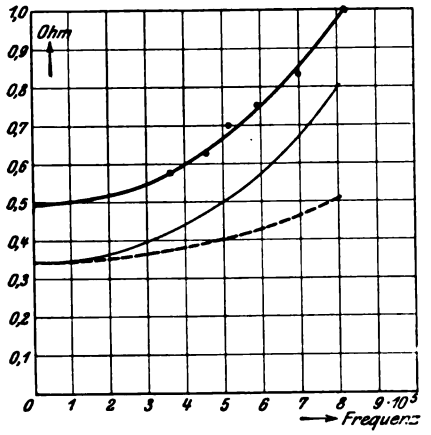


Fig. 6. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule I.

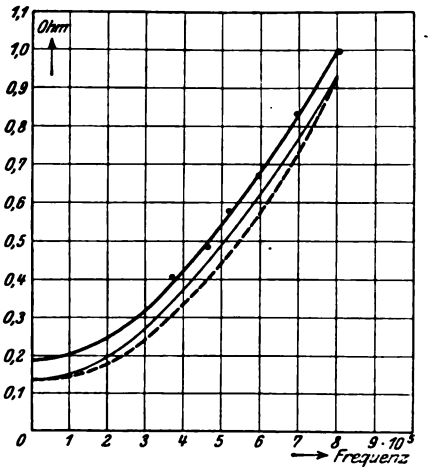


Fig. 7. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule II.

Herrn Meißner gemessenen Widerstände in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen (stark ausgezogene Kurve). Dem Gefühl nach habe ich die beobachtete Kurve bis zur Frequenz Null verlängert. Hierzu gibt die berechnete und in den Figuren gestrichelt eingetragene Kurve genügend Anhalt. Die Verlängerung der beobachteten Kurve sollte auf der Ordinate den Gleichstromwiderstand abschneiden, der sich aus den Spulenangaben des Herrn Meißner berechnen ließ. Sie tut dies infolge der Fehlerquellen nicht, und man braucht nun nur durch den Gleichstrompunkt als Anfang eine Parallelkurve zur beobachteten Kurve zu legen, um die korrigierte Kurve zu erhalten. Als Leitfähigkeit L des Kupfers habe ich bei meinen Rechnungen den Wert 60 eingesetzt. Alle weiteren Einzelheiten des Vergleichs können nun den Tabellen I bis III entnommen werden.

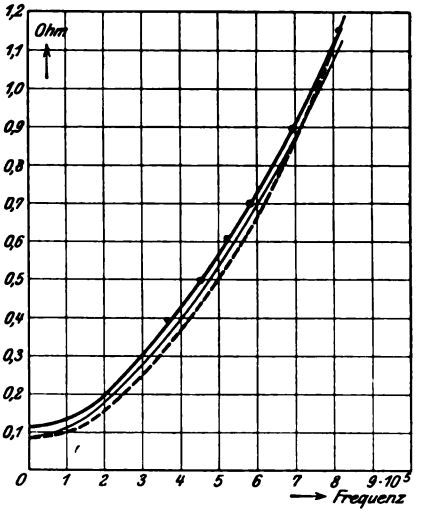


Fig. 8. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule III.

Herr Meißner hat seine Angaben über die Spulenabmessungen mehr zur Charakterisierung der Spulen gemacht, als um eine Grundlage für einen Vergleich von Messung und Rechnung zu geben. In Anbetracht dieses Umstandes und der immerhin unsicheren Verbesserung seiner Meßwerte muß die erzielte Übereinstimmung von berechneten und beobachteten Werten als befriedigend bezeichnet werden. Es ist sicher kein Zufall, daß Messung und Rechnung sich am nächsten bei der längsten Spule kommen und bei der kürzesten Spule am weitesten auseinandergehen.

Bei zwei weiteren, ebenfalls von Herrn Meißner untersuchten Spulen, bei denen die Einzeldrähte der Litze einen Durchmesser von nur 0,007 cm hatten, war die Übereinstimmung schlechter. Dies zeigen die Figuren 9 und 10, in denen gemessene, korrigierte und berechnete Punkte eingetragen sind. In der Kurve 9 würden sich berechnete und korrigierte Werte bereits zur Zufriedenheit decken, wenn man annimmt, daß der

Digitized by Google

Tabelle I. Spule I.

$z = 27$; $d = 0{,}012$ cm; Höhe $h = 38$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 28$;

$g = 0{,}141$ cm; Drahtlänge $= 4{,}34$ m; Kupferquerschnitt $= 0{,}305$ qmm;
Gleichstromwiderstand $= 0{,}237$ Ohm.

$$\alpha = \frac{1}{50}\sqrt{n \cdot 60\sqrt{27} \cdot 0{,}89 \cdot \frac{0{,}012}{0{,}141}} = 30{,}6\sqrt{\frac{n}{10^5}}\,; \qquad \xi = \alpha \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}012 = 0{,}327\sqrt{\frac{n}{10^5}}$$

Wellenlänge in m	Wechselstromwiderstand in, Ohm, gemessen	Wechselstromwiderstand in, Ohm, korrigiert.	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3}\psi(\xi)$	k	Wechselstromwiderstand, berechnet in Ohm	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	0,98	0,87	$8{,}11 \cdot 10^5$	0,93	1,065	0,241	2,09	3,15	0,75	− 0,12	− 15
433	0,83	0,70	$6{,}92 \cdot$ „	0,86	1,047	0,180	1,56	2,60	0,62	− 0,08	− 11
510	0,76	0,57	$5{,}88 \cdot$ „	0,79	1,033	0,127	1,10	2,13	0,51	− 0,06	− 10
585	0,61	0,48	$5{,}14 \cdot$ „	0,74	1,025	0,0985	0,85	1,87	0,44	− 0,04	− 8
665	0,55	0,42	$4{,}52 \cdot$ „	0,695	1,019	0,0780	0,68	1,70	0,40	− 0,02	− 4
820	0,51	0,38	$3{,}66 \cdot$ „	0,625	1,013	0,0515	0,45	1,46	0,35	− 0,03	− 6

Im Durchschnitt 9%.

Tabelle II. Spule II.

$z = 2 \cdot 27$; $d = 0{,}012$ cm; Höhe $h = 52$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 32$;

$g = 0{,}168$ cm; Drahtlänge 4,95 m; Kupferquerschnitt: $2 \cdot 0{,}305$ qmm;
Gleichstromwiderstand $= 0{,}136$ Ohm;

$$\alpha = \frac{1}{50}\sqrt{n \cdot 60\sqrt{2 \cdot 27} \cdot 0{,}89 \cdot \frac{0{,}012}{0{,}168}} = 33{,}4\sqrt{\frac{n}{10^5}}\,; \qquad \xi = \alpha \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}012 = 0{,}357 \cdot \sqrt{\frac{n}{10^5}}$$

Wellenlänge in m	Wechselstromwiderstand, in Ohm, gemessen	Wechselstromwiderstand, in Ohm, korrigiert	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3}\psi(\xi$	k	Wechselstromwiderstand, berechnet in Ohm	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	1,00	0,94	$8{,}11 \cdot 10^5$	1,01	1,088	0,326	5,75	6,84	0,93	− 0,01	− 1
433	0,83	0,77	$6{,}92 \cdot$ „	0,935	1,065	0,242	4,26	5,32	0,72	− 0,05	6
510	0,68	0,63	$5{,}88 \cdot$ „	0,86	1,047	0,180	3,18	4,23	0,57	− 0,06	9
585	0,58	0,52	$5{,}14 \cdot$ „	0,805	1,035	0,137	2,42	3,45	0,46	− 0,06	9
665	0,48	0,43	$4{,}52 \cdot$ „	0,755	1,027	0,105	1,85	2,88	0,39	− 0,04	9
820	0,41	0,33	$3{,}66 \cdot$ „	0,68	1,018	0,072	1,27	2,29	0,31	− 0,02	6

Im Durchschnitt 7%.

Tabelle III. Spule III.

$z = 3 \cdot 27$; $d = 0{,}012$ cm; Höhe $h = 62$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 34$;

$g = 0{,}188$ cm; Drahtlänge $= 5{,}25$ m; Kupferquerschnitt: $3 \cdot 0{,}305$ qmm;
Gleichstromwiderstand $= 0{,}096$ Ohm;

$$\alpha = \frac{1}{50} \cdot \sqrt{n \cdot 60 \cdot \sqrt{3 \cdot 27} \cdot 0{,}89 \cdot \frac{0{,}012}{0{,}188}} = 34{,}8\sqrt{\frac{n}{10^5}}\,; \qquad \xi = \alpha \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}012 = 0{,}373\sqrt{\frac{n}{10^5}}\,.$$

Wellenlänge in m	Wechselstrom widerstand, in Ohm, gemessen	Wechselstrom widerstand, in Ohm, korrigiert	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3}\psi(\xi)$	k	Wechselstromwiderstand, in Ohm berechnet	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	1,15	1,12	$8{,}11 \cdot 10^5$	1,062	1,17	0,412	11,0	12,12	1,16	+ 0,04	+ 4
433	0,9	0,87	$6{,}92 \cdot$ „	0,982	1,08	0,301	8,01	9,09	0,87	+ 0	0
510	0,7	0,67	$5{,}88 \cdot$ „	0,904	1,057	0,215	5,72	6,77	0,65	− 0,02	− 3
585	0,6	0,57	$5{,}14 \cdot$ „	0,845	1,043	0,168	4,5	5,54	0,53	− 0,04	− 7
665	0,5	0,47	$4{,}52 \cdot$ „	0,795	1,034	0,130	3,46	4,49	0,43	− 0,04	− 8
820	0,39	0,36	$3{,}66 \cdot$ „	0,715	1,022	0,085	2,26	3,28	0,33	− 0,03	—

Im Durchschnitt 3,5 %

Digitized by Google

Drahtdurchmesser d um 5% größer als angegeben ist[1]). Mit solchen Unsicherheiten muß man bei diesen Litzen rechnen. Die schlechte Übereinstimmung in Fig. 7 kann ich nicht erklären.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Fehler unserer Formel selbst bei Spulen

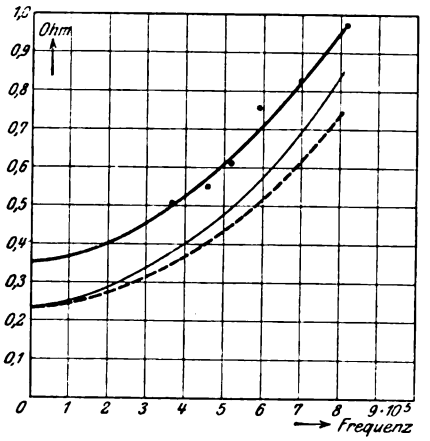


Fig. 9. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei einer Spule aus Litze von 81 Drähten mit dem Durchmesser von je 0,07 mm; h = 32 mm; D = 49 mm.

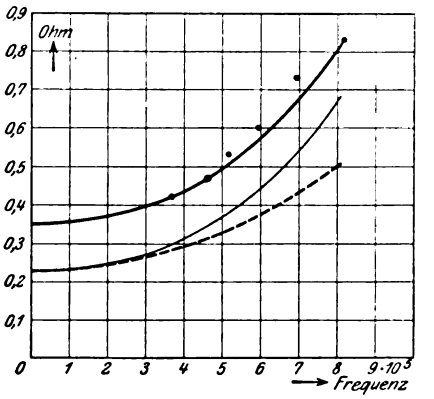


Fig. 10. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei einer Spule aus Litze von 54 (?) Drähten mit dem Durchmesser von je 0,07 mm; h = 32 mm; D = 49 mm.

mit dem Dimensionsverhältnis h = 0,78 (Fig. 3) so klein ist, daß sie für den Praktiker auch für kurze Spulen brauchbar sein dürfte.

3. Das Widerstandsminimum. Herr Meißner hat die für die Wellenlänge von 370 m gefundenen Widerstandswerte bei der Spule I und III miteinander verglichen. Trotzdem der Kupferquerschnitt bei der Spule III dreimal so groß ist als bei der Spule I, ist der Widerstand bei der Spule III um 15% größer als bei der Spule I. Herr Meißner schließt hieraus: „Man kann bei gegebener Drahtstärke und Wellenlänge einen günstigen Litzenquerschnitt (bzw. günstige Drahtzahl) finden, bei der eine Spule gegebener Form eine geringste Dämpfung erhält." Dies ist ein sehr wichtiges experimentelles Ergebnis.

Herr Meißner hat hier an einem Sonderfalle nachgewiesen, daß der Wechselstromwiederstand ein Minimum haben kann. Sein Resultat wird durch meine allgemein gehaltenen Betrachtungen über das Widerstandsminimum bestätigt.

Während ich bei der Berechnung des Widerstandsminimums die Drahtzahl z als konstant ansah und den günstigsten Drahtdurchmesser d berechnete, sieht Herr Meißner umgekehrt den Drahtdurchmesser d als gegeben an und fragt nach der günstigsten Drahtzahl z. Auch hierüber kann unsere Formel Auskunft geben und die bei Herrn Meißner noch unbeantwortet gebliebenen Fragen nach der Abhängigkeit der günstigsten Drahtzahl von Frequenz, Leitfähigkeit, Drahtdurchmesser und Ganghöhe beantworten. Bei der Drahtlänge l ist der Gleichstromwiderstand

$$r_g = \frac{l}{L\, d^2 \frac{\pi}{4} \cdot z}$$

und der Wechselstromwiderstand

$$r_w = \frac{l}{L\, d^2 \frac{\pi}{4}} \frac{1}{z} \left\{ \varphi(\xi) + \frac{z-1}{3} \psi(\xi) \right\}.$$

[1]) Wie mir Herr Meißner mitteilt, machte anfangs die Herstellung dieser dünnen Litzen Schwierigkeiten, so daß bei ihnen mit größeren Ungenauigkeiten der Drahtstärke zu rechnen ist.

Digitized by Google

Wir schreiben $\xi = \beta \sqrt[4]{z}$, wo $\beta = 0{,}89 \cdot d \cdot \frac{1}{50} \cdot \sqrt{n L \cdot 0{,}89 \frac{d}{g}}$, benutzen die Annäherungsformeln für kleines Argument ξ und erhalten:

$$r_w = \text{konst} \left\{ \frac{1}{z} + 0{,}09\,\beta^4 + z \cdot \frac{\beta^4}{9} - \frac{\beta^4}{9} \right\}.$$

Ist z veränderlich, so hat der Wechselstromwiderstand ein Minimum, wenn $z = \frac{3}{\beta^2}$ ist, oder wenn $z = \frac{10600 \cdot g}{d^3 \cdot n L}$ ist. Für die Spule I ergibt sich bei der Frequenz von $8{,}11 \cdot 10^5$ (Wellenlänge = 370 m) die günstigste Drahtzahl von $\frac{10600 \cdot 0{,}141}{0{,}012^3 \cdot 8{,}11 \cdot 10^5 \cdot 60} = 18$.

Aus den Versuchen des Herrn Meißner geht hervor, daß sie kleiner als 27 sein muß. Also auch hier kein Widerspruch zwischen Rechnung und Messung.

Liegt das Widerstandsverhältnis oberhalb 1,33 — und dies ist bei allen Spulen des Herrn Meißner der Fall —, so ist die Spule (bei konstanter Drahtzahl) mit Litze von zu großem Drahtdurchmesser d ausgeführt. Dies habe ich im Archiv III, S. 271, bewiesen. Die Meißnerschen Spulen hätten daher im untersuchten Frequenzbereiche kleinere Dämpfungen gehabt, wenn sie aus dünnerem Drahte hergestellt worden wären.

Bemerkungen zur Theorie der Eisenverluste in Spulenkernen.

Von

H. Lorenz, Danzig.

1. Vorbemerkung. In der elektrotechnischen Literatur begnügt man sich meist mit der Annahme räumlich konstanter magnetischer Feldstärken im Innern langer Spulen, wodurch die Verfolgung der auftretenden Wirbelströme ausgeschlossen wird. Diese werden vielmehr gewöhnlich für sich abgeschätzt und dem Hysteresisverlust, der sich mit der genannten Voraussetzung unter Zuhilfenahme empirisch gegebener Hysteresisschleifen leicht ermitteln läßt, nachträglich hinzugefügt. Im Folgenden soll versucht werden, dieses wenig befriedigende Verfahren durch ein exakteres zu ersetzen, welches beide Verluste nebeneinander ergibt. Wenn dadurch auch die Bestimmung der Hysteresisverluste praktisch keine Änderung erfährt, so wird doch für die Behandlung der Wirbelströme eine Analogie mit den Torsionsspannungen sich insofern nützlich erweisen, als sie die Übertragung bekannter Methoden und Lösungen aus der Elastizitätstheorie auf unsern Fall ermöglicht.

2. Die Grundgleichungen des Feldes einer Spule. Wir nehmen zunächst an, daß die ins Auge gefaßte Spule so lang sei, daß die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern überall der Spulenachse parallel verläuft und in ihrer Richtung sich nicht ändert. Mithin kann diese Feldstärke nur noch mit den Koordinaten x, y eines Querschnittspunktes und mit der Zeit t variieren. Die Änderung der Feldstärke hat nun an jeder Stelle des Querschnitts F der Spule eine Änderung der Kraftlinienzahl N zur Folge, so zwar, daß mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$

$$N = \int \mathfrak{B}\, dF$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} dF = \int \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF$$

Digitized by Google

oder nach Einführung der magnetischen Permeabilität durch

$$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} = \mu$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF \qquad 1)$$

wird. Diese Änderung der Kraftlinienzahl bedingt aber nach dem Induktionsgesetz eine elektromotorische Kraft E in dem die Kraftlinien selbst umschließenden Leiter, also

$$\frac{\partial N}{\partial t} = E = \int \mathfrak{E}\, ds, \qquad 2)$$

wenn wir mit $\mathfrak{E}$ die in die Richtung des Strombahnelementes ds fallende elektrische Feldstärke bezeichnen, die ihrerseits mit der spezifischen Stromstärke j und der Leitfähigkeit λ durch die Beziehung

$$\lambda \mathfrak{E} = j \qquad 3)$$

verknüpft ist. Aus der Vereinigung der drei Formeln (1), (2), (3) ergibt sich dann

$$\lambda \int \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF = \int j\, ds$$

oder, wenn wir nach dem Stokesschen Satze das rechts stehende Linienintegral in ein Flächenintegral umwandeln, welches über alle Querschnittselemente $dx \cdot dy = dF$ zu erstrecken ist,

$$\lambda \int \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF = \int \left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Umfahren wir nur das Flächenelement selbst mit den Stromkomponenten j_x und j_y, so fallen die Integrale weg, und es bleibt als erste Hauptgleichung

$$\lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}. \qquad 4)$$

Zur Ermittelung der beiden Stromkomponenten greifen wir auf die elektromagnetische Grundformel

$$\int \mathfrak{H}\, dl = 4\pi J \qquad 5)$$

zurück, in der dl ein Kraftlinienelement und J die Gesamtstärke des von der Kraftlinie l umschlossenen Stromes bedeutet. Da außerhalb der langen Spule die Feldstärke $\mathfrak{H}$ verschwindend klein ist, so können wir uns mit der Integration der rechten Seite, der sog. magnetomotorischen Kraft, über die Spulenlänge begnügen, bzw. diese mit l identifizieren, so daß wir auch haben

$$\mathfrak{H}\, l = 4\pi J \qquad 5a)$$

und entsprechend einem Zuwachs der Stromstärke dJ

$$d\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{l} dJ.$$

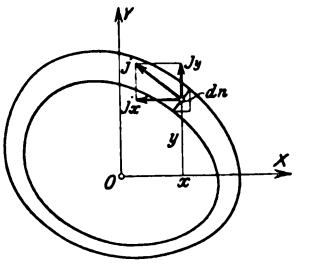


Fig. 1.

Soll dieser Zuwachs von den Wirbelströmen herrühren, so ist mit einem Normalenelement dn zum Strombahnelement ds

$$dJ = j \cdot l\, dn,$$

also

$$d\mathfrak{H} = 4\pi j\, dn. \qquad 5a)$$

Hierin ist aber, wie aus Fig. 1 hervorgeht,

$$j\, dn = j_y\, dx - j_x\, dy \qquad 6)$$

Digitized by Google

und andererseits für einen gegebenen Augenblick

$$d\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} dy . \qquad 7)$$

Führen wir die Ausdrücke (6) und (7) in (5a) ein, so zerfällt diese Gleichung in die beiden weiteren **Hauptformeln**

$$j_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \qquad j_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}, \qquad 8)$$

die mit (4) zusammen sowohl die Feldstärke $\mathfrak{H}$ als auch die Stromkomponenten j_x und j_y bestimmen. Es sind dies natürlich nichts anderes als die **Maxwellschen Feldgleichungen** für den besonderen Fall eines Feldes, für welches die Stromkomponente in der mit der Spulenachse zusammenfallenden z-Richtung und die beiden Feldkomponenten $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ verschwinden, während die sog. Verschiebungen im Dielektrikum überhaupt vernachlässigt wurden.

3. Die elektromagnetische Energie des Spulenkerns. Wir schreiben der Übersicht halber die gewonnenen Feldgleichungen noch einmal her, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \\ 4\pi j_x &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} \\ 4\pi j_y &= +\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad 8a)$$

und multiplizieren sie der Reihe nach mit $\mathfrak{H}$, j_x und j_y. Addieren wir darauf und beachten, daß durch

$$j_x^2 + j_y^2 = j^2 \qquad 9)$$

die schon oben eingeführte spezifische Stromstärke j gegeben ist, so folgt

$$\lambda \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + 4\pi j^2 = \mathfrak{H}\left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}\right) + j_y \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} - j_x \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}$$

oder nach Zusammenziehung der rechten Seite und Integration über die Fläche

$$\int\left(\lambda \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + 4\pi j^2\right) dF = \int\int\left(\frac{\partial(\mathfrak{H} j_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathfrak{H} j_x)}{\partial y}\right) dx\, dy. \qquad 10)$$

Nach dem Stokesschen Satze dürfen wir aber das Flächenintegral der rechten Seite in ein Linienintegral über den Umfang s der umfahrenen Fläche derart verwandeln, daß

$$\int\int\left(\frac{\partial(\mathfrak{H} j_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathfrak{H} j_x)}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (\mathfrak{H} j_y\, dy + \mathfrak{H} j_x\, dx) = \int \mathfrak{H} j\, ds \qquad 11)$$

wird. Auf der rechten Seite bezieht sich jetzt $\mathfrak{H}$ sowohl als auch j auf den Umfang selbst, wo $\mathfrak{H}$ nur mehr zeitliche Änderungen erleiden kann. Nehmen wir darum die Feldstärke $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ am Umfang aus dem rechten Integral (11) heraus, so wird

$$\int \mathfrak{H} j\, ds = \mathfrak{H}_0 \int (j_y\, dy + j_x\, dx) = \mathfrak{H}_0 \int\left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}\right) dF$$

oder nach (8a) bzw. (4) und (1)

$$\int \mathfrak{H} j\, ds = \mathfrak{H}_0 \lambda \int \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF = \mathfrak{H}_0 \lambda \frac{\partial N}{\partial t}, \qquad 11a)$$

wenn jetzt N die gesamte Kraftlinienzahl im Querschnitt der Spule bedeutet. Hat die Spule ferner n Windungen, die vom Strom J durchflossen werden, so tritt an Stelle der Gl. (5a) für die Feldstärke am Umfang des Querschnitts

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{4\pi}{l} n J, \qquad 5c)$$

Digitized by Google

also daß mit (11a)

$$\iint_e \left(\frac{\partial (\mathfrak{H} j_y)}{dx} - \frac{\partial (\mathfrak{H} j_x)}{\partial y} \right) dx\, dy = \frac{4\pi}{l} \lambda n J \cdot \frac{\partial N}{\partial t} \qquad 11b)$$

wird. Dies liefert eingesetzt in (10) nach Division mit λ

$$\int_e \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF + \frac{4\pi}{\lambda} \int_e j^2 dF = \frac{4\pi}{l} n J \frac{\partial N}{\partial t}, \qquad 10a)$$

oder nach Multiplikation mit $l : 4\pi$ sowie unter Einführung des Volumelementes

$$l\, dF = dV \qquad 12)$$

des Spulenkernes

$$\frac{1}{4\pi} \int_e \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dV + \frac{1}{\lambda} \int_e j^2 dV = n J \cdot \frac{\partial N}{\partial t}. \qquad 10b)$$

Auf der rechten Seite dieser Formel steht aber wegen der Bedeutung von $\frac{\partial N}{\partial t}$ als elektromotorischer Kraft in der Spule nichts anderes als die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie

$$U = \int n J\, dN \qquad 13)$$

des ganzen Systems. Deren totale Änderung zerfällt, wenn die Spule im Zeitelemente dt noch eine Verrückung dq erfährt, in die beiden Glieder

$$dU = n J \left(\frac{\partial N}{\partial t} dt + \frac{\partial N}{\partial q} dq \right), \qquad 13a)$$

deren zweites die bei der Verrückung geleistete äußere Arbeit bedeutet, der die Kraft $n J \frac{\partial N}{\partial q}$ entspricht. Es bietet natürlich keine Schwierigkeit, diese Ansätze auf mehrere Spulen auszudehnen, und zwar mit Rücksicht auf die etwa vorhandenen Neigungen ihrer Achsen gegeneinander. Integrieren wir Gl. (10b) über die Periode t_0 des die Spule durchfließenden Wechselstroms, so ergibt sich die Änderung der elektromagnetischen Energie der Spule wegen der Bedeutung von μ

$$\int_0^{t_0} n J \frac{\partial N}{\partial t} dt = \frac{1}{4\pi} \int_e dV \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B} + \frac{1}{\lambda} \int_e dV \int_0^{t_0} j^2 dt. \qquad 10c)$$

Hierin ist aber das erste Glied rechts die während einer Periode aufgewandte Hysteresisarbeit, das zweite Glied die in derselben Zeit von den Wirbelströmen im Eisenkern entwickelte Wärme, die somit beide den Verlust an elektromagnetischer Energie darstellen.

4. Die exakte Berechnung der Eisenverluste. Das erste der Integrale rechts der Gl. (10c) enthält als Integranden die Größe

$$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B},$$

die durch Planimetrieren der empirisch vorgelegten Hysteresisschleife für das Kernmaterial ermittelt werden kann. Das hat aber nur dann einen praktischen Wert, wenn man den absoluten Höchstwert der Feldstärke $\mathfrak{H}$ an jeder Stelle des Kernquerschnitts kennt. Daß die Feldstärke im Querschnitt variabel ist, folgt durch Elimination von j_x und j_y aus den drei Formeln (8a), welche

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} = 4\pi \lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \qquad 14)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} = 4\pi \lambda \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

Digitized by Google

liefert. Hierzu tritt noch als Grenzbedingung die Übereinstimmung der Wirbelstromrichtung mit der Tangente des Querschnittsrandes an dieser Stelle. Es ist also am Umfange

$$\frac{j_y}{j_x} = \frac{dy}{dx} \tag{15}$$

oder wegen (8) mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial y} dy = 0. \tag{15a}$$

Da nun allgemein

$$d\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} dy$$

ist, so folgt für den Umfang

$$d\mathfrak{H}_0 = \frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t} dt, \tag{15b}$$

also eine reine Abhängigkeit von der Zeit, die wir für einen einfachen Wechselstrom in der Spule durch

$$\mathfrak{H}_0 = H_0 \sin \omega t \tag{16}$$

darstellen können. Das gilt nicht nur für den Rand des Kernes, sondern auch im Falle der Unterteilung desselben für alle nicht leitenden Zwischenschichten, in denen mit j_x und j_y auch die beiden örtlichen Ableitungen von $\mathfrak{H}$ nach (8) verschwinden, wobei wiederum von den dielektrischen Verschiebungsströmen abgesehen wird. Es herrscht also dasselbe magnetische Feld in der Umgebung des Eisenkernes und jedes seiner Bestandteile, die wir somit unabhängig voneinander für sich untersuchen können.

Die Berechnung der veränderlichen magnetischen Feldstärke gelingt für den einfachen Wechselstrom mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathfrak{H} = H_1 \sin \omega t + H_2 \cos \omega t, \tag{17}$$

der für den Rand in (16) übergeht. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \omega (H_1 \cos \omega t - H_2 \sin \omega t), \tag{17a}$$

und nach Einsetzen in Gl. (14) mit der Abkürzung

$$4 \pi \lambda \mu \omega = \alpha^2 \tag{18}$$

infolge des Verschwindens der Koeffizienten von $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} &= \alpha^2 H_1 \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} &= -\alpha^2 H_2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wenn man unter der Annahme nur geringer magnetischer Feldstärken die Permeabilität μ und damit den Faktor α^2 als konstant betrachten darf, so läßt sich aus den beiden Formeln (19) eine der Größen H_1 oder H_2 eliminieren, woraus für die andere

$$\frac{\partial^4 H_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 H_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 H_1}{\partial y^4} + \alpha^4 H_1 = 0 \tag{20}$$

resultiert. Es ist das formal dieselbe Differentialgleichung, welche H. Hertz[1]) für die der Belastung proportionale Durchbiegung einer elastischen Platte aufgestellt und für den Fall eines Kreisumfangs mit Hilfe Besselscher Funktionen integriert hat. Dieses Problem liefert demnach sofort auch die Verteilung der magnetischen Feldstärke und der

[1]) H. Hertz: Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten. Wiedemanns Annalen der Physik. 1884.

Digitized by Google

Wirbelströme in einem zylindrischen Eisenkern. Für die Ausrechnung empfiehlt sich natürlich die Umformung der Gleichungen (14), (19) und (20) in Polarkoordinaten, die mit

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \tag{21}$$

übergehen in

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r}\right) = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{14a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH_2}{dr}\right) = \alpha^2 H_1, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH_1}{dr}\right) = -\alpha^2 H_2 \tag{19a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH_1}{dr}\right)\right]\right) + \alpha^2 H_1 = 0 \tag{20a}$$

mit den aus (16) und (17) folgenden Randbedingungen

$$H_1 = H_0 \text{ und } H_2 = 0.$$

In diesem Falle verlaufen die Wirbelströme durchweg in Parallelkreisen, so daß wir auch

$$j_x = -j\frac{y}{r}, \quad j_y = j\frac{x}{r} \tag{21}$$

und an Stelle der beiden Formeln (8) kurz

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{d\mathfrak{H}}{dr} \tag{8a}$$

schreiben dürfen.

Wir wollen uns mit der Durchführung der strengen Rechnung für den zylindrischen Eisenkern nicht aufhalten und nur noch darauf hinweisen, daß für den Querschnitt einer schmalen rechteckigen Platte J. J. Thomson[1]) die Lösung gegeben hat. Hierbei kann man nämlich, wenn x in die Richtung der Plattendicke und y in die Längsrichtung des Querschnitts fällt, die Wirbelströme $j = j_y$ als geradlinig ansehen und demgemäß die Ableitungen nach y vernachlässigen, womit die Formeln (14), (19) und (20) übergehen in:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = 4\pi\lambda\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{14b}$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} = \alpha^2 H_1, \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} = -\alpha^2 H_2 \tag{19b}$$

$$\frac{\partial^4 H_1}{\partial x^4} + \alpha^4 H_1 = 0. \tag{20b}$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert für $\mathfrak{H}$ und

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \tag{8b}$$

Ausdrücke, deren Koeffizienten sich aus Hyperbel- und Kreisfunktionen zusammensetzen und für die Grenzfälle großer Werte von ω sowie sehr kleiner Plattendicken erheblich vereinfachen lassen. Daher kommt es wohl, daß man sich in der elektrotechnischen Literatur meist mit der Anführung dieser Grenzfälle unter Weglassung der ziemlich umständlichen Rechnung begnügt, wenn man es nicht vorzieht, die Stromverteilung im Querschnitt auf Grund ziemlich willkürlicher Annahmen ohne Rücksicht auf die Grundgleichungen des Spulenfeldes zu ermitteln. Es dürfte darum zweckmäßig sein, ein Näherungsverfahren zu entwickeln, welches rascher zum Ziele führt als die exakte Integration der obigen

[1]) J. J. Thomson: On the heat produced by eddy currents in an iron plate exposed to an alternating magnetic field. Electrician 1892.

Digitized by Google

Differentialgleichungen. Dasselbe liefert Resultate, die mit ganz wenigen Gliedern eine für die Technik hinreichende, durch Hinzunahme weiterer Terme aber beliebig steigerbare Genauigkeit besitzen.

5. Angenäherte Berechnung der Eisenverluste. Führen wir die in Gl. (10c) angedeutete Integration über eine Periode t_0 unter der auch von J. J. Thomson benutzten Annahme konstanter Permeabilität μ, d. h. einer geradlinigen Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, aus, so verschwindet das die Hysteresisarbeit enthaltende Glied, und es bleibt mit (12)

$$\int_0^{t_0} n J \frac{\partial N}{\partial t} dt = \frac{t}{\lambda} \int_0^F \int_0^{t_0} j^2 dF \cdot dt, \qquad 22)$$

wofür wir mit (5c) und (1) auch schreiben dürfen

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_0^F \int_0^{t_0} \mathfrak{H}_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF\, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^F \int_0^{t_0} j^2 dF\, dt. \qquad 22a)$$

Wir betrachten zunächst einmal den auf die Längeneinheit des Kernes bezogenen Wirbelstromverlust

$$U_i = \frac{1}{\lambda} \iint j^2 dF\, dt = \frac{1}{\lambda} \iiint (j_x^2 + j_y^2)\, dx\, dy\, dt \qquad 23)$$

und denken uns die Stromverteilung im Querschnitt verändert, so zwar, daß

$$dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial j_x} dj_x + \frac{\partial U_i}{\partial j_y} dj_y \qquad 24)$$

wird, worin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial j_x} &= \frac{2}{\lambda} \iiint j_x\, dx\, dy\, dt \\ \frac{\partial U_i}{\partial j_y} &= \frac{2}{\lambda} \iiint j_y\, dx\, dy\, dt \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

ist. Mit den Formeln (8) wird daraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial j_x} &= -\frac{1}{2\pi\lambda} \iiint \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} dy\, dx\, dt \\ \frac{\partial U_i}{\partial j_y} &= +\frac{1}{2\pi\lambda} \iiint \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} dx\, dy\, dt \end{aligned}\right\} \qquad 25a)$$

und nach Ausführung je einer Integration über y bzw. x durch den ganzen Querschnitt, an dessen Rande $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial j_x} &= -\frac{1}{2\pi\lambda} \iint (\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_0)\, dx\, dt = 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial j_y} &= +\frac{1}{2\pi\lambda} \iint (\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_0)\, dy\, dt = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 25b)$$

Das liefert eingesetzt in (24)

$$dU_i = 0, \qquad 24a)$$

d. h. die Wirbelströme verteilen sich im Querschnitt des Kernes derart, daß ihr Energieverlust ein Extremum wird.

Formen wir nunmehr diesen Energieverlust mit Hilfe der Grundgleichungen (8) um, so erhalten wir

$$U_i = \frac{1}{16\pi^2\lambda} \int_0^F \int_0^{t_0} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}\right)^2 \right] dF dt, \qquad 23a)$$

Digitized by Google

während der auf der linken Seite von (22a) stehende gleichzeitige Energieaufwand des Spulenstromes, der somit eine äußere Energiezufuhr zum Kern darstellt, durch

$$U_a = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^F \int_0^{t_0} \mathfrak{H}_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \, dF \, dt \qquad 23b)$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Ansatzes (16) und (17) wird aus diesen Formeln nach Ausführung der Integration über die Periode t_0 wegen $\omega t_0 = 2\pi$

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{t_0}{32\pi^2\lambda} \int_0^F \left(\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial y}\right)^2 \right) dF \\ U_a &= -\frac{\mu \omega t_0}{8\pi} \int_0^F H_0 H_2 \, dF \end{aligned}\right\} \qquad 23c)$$

Hierin ist zunächst H_0 eine Konstante, welche die Amplitude des kernfreien Spulenfeldes bestimmt. Die anderen Faktoren H_1 und H_2 sind dagegen im allgemeinen durch (19) definierte Funktionen der Querschnittskoordinaten x und y. Lassen sich diese Differentialgleichungen (19) in einem vorgelegten Falle überhaupt nicht oder doch nur mit großem Rechnungsaufwand integrieren, so gelangt man zu einer Näherungslösung[1]) dadurch, daß man

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_0 + A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + \cdots \\ H_2 &= \quad B_1 \Psi_1 + B_2 \Psi_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

setzt, worin $A_1 A_2 \ldots, B_1 B_2 \ldots$ Konstante darstellen, während $\Phi_1 \Phi_2 \ldots, \Psi_1 \Psi_2 \ldots$ Funktionen von x und y sind, welche den Randbedingungen des Problems genügen und so gewählt werden, daß die in (23a) angedeuteten Integrationen bequem durchgeführt werden können. Das Resultat dieser Integration über den Querschnitt sind dann wegen der quadratinten Form der Integranden von U_i in (23c) Ausdrücke von der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} U_i = {} & A_1^2 C_1 + A_1 A_2 C_{12} + A_2^2 C_2 + \cdots \\ & + B_1^2 D_1 + B_1 B_2 D_{12} + B_2^2 D_2 + \cdots \\ U_a = {} & B_1 G_1 + B_2 G_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 26a)$$

in denen die C D G aus der Integration selbst hervorgehen, wogegen die Konstanten A und B noch der Bestimmung harren. Die durch (22a) geforderte Gleichheit von $U_i = U_a$ bedingt zunächst, daß eine der Konstanten, z. B. B_1, durch alle andern ausgedrückt werden kann. Dann liefert die obige Bedingung (24a) des Extremums von $U_i = U_a$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial A_1} + \frac{\partial U}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial A_1} = 0 \qquad & \frac{U \partial_a}{\partial A_1} + \frac{\partial U_a}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial A_1} = 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial A_2} + \frac{\partial U_i}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial A_2} = 0 \qquad & \frac{\partial U_a}{\partial A_2} + \frac{\partial U_a}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial A_2} = 0 \\ \cdots \qquad & \cdots \\ \cdots \qquad & \cdots \\ \frac{\partial U_i}{\partial B_2} + \frac{\partial U_i}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial B_2} = 0 \qquad & \frac{\partial U_a}{\partial B_2} + \frac{\partial U_a}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial B_2} = 0 \\ \cdots \qquad & \cdots \\ \cdots \qquad & \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

[1]) Das hier zuerst auf elektrische Probleme angewandte Näherungsverfahren wird nach dem Vorgang der Physiker Lord Rayleigh und Ritz neuerdings vielfach in der Elastizitätstheorie verwandt; vgl. Lorenz: Näherungslösungen statisch unbestimmter Probleme, Z. d. V. d. Ing. 1913 S. 543, und Phys. Z. 1913, S. 71.

Digitized by Google

Eliminieren wir aus den nebeneinanderstehenden Formeln die Ableitungen $\frac{\partial B_1}{\partial A_1}, \frac{\partial B_2}{\partial A_2} \ldots$ $\frac{\partial B_1}{\partial B_2} \ldots$, so bleibt unter Einführung eines konstanten Faktors K

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial A_1} : \frac{\partial U_a}{\partial A_1} &= \frac{\partial U_i}{\partial B_1} : \frac{\partial U_a}{\partial B_1} = K \\
\frac{\partial U_i}{\partial A_2} : \frac{\partial U_a}{\partial A_2} &= \frac{\partial U_i}{\partial B_1} : \frac{\partial U_a}{\partial B_1} = K \\
&\cdot \qquad\qquad \cdot \\
&\cdot \qquad\qquad \cdot \\
\frac{\partial U_i}{\partial B_2} : \frac{\partial U_a}{\partial B_2} &= \frac{\partial U_i}{\partial B_1} : \frac{\partial U^a}{\partial B_1} = K \\
&\cdot \qquad\qquad \cdot \\
&\cdot \qquad\qquad \cdot
\end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial A_1} &= K \frac{\partial U_a}{\partial A_1} \\
\frac{\partial U_i}{\partial A_2} &= K \frac{\partial U_a}{\partial A_2} \\
&\cdot \qquad \cdot \\
&\cdot \qquad \cdot \\
\frac{\partial U_i}{\partial B_1} &= K \frac{\partial U_a}{\partial B_1} \\
\frac{\partial U_i}{\partial B_2} &= K \frac{\partial U_a}{\partial B_2} \\
&\cdot \qquad \cdot \\
&\cdot \qquad \cdot
\end{aligned}\right\} \qquad 27a)$$

Führen wir diese Differentiation nun an (26a) aus, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
2 A_1 C_1 + A_2 C_{12} + \cdots &= 0 \\
A_1 C_{12} + 2 A_2 C_2 + \cdots &= 0 \\
&\cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \\
2 B_1 D_1 + B_2 D_{12} + \cdots &= K G_1 \\
B_1 D_{12} + 2 B_2 D_2 + \cdots &= K G_2 \\
&\cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot
\end{aligned}\right\} \qquad 27b)$$

und nach Multiplikation dieser Formeln mit $A_1 A_2 \ldots$, $B_1 B_2 \ldots$ und Addition mit Rücksicht auf (26a)

$$2 U_i = K U_a, \qquad 28)$$

d. h.

$$K = 2. \qquad 28a)$$

Damit besagen die Gl (27a), daß die Koeffizienten $A_1 A_2 \ldots$, $B_1 B_2$ so zu bestimmen sind, daß die Differenz

$$U_0 = U_i - 2 U_a \qquad 29)$$

durch sie zu einem Extremum wird.

Aus den Formeln (27a) folgt weiter, da U_a die Konstanten A gar nicht enthält, daß auch U_i davon frei sein muß, d. h. daß alle Konstanten A von vornherein verschwinden, womit in (26) allgemein

$$H_1 = H_0 \qquad 26b)$$

wird und das Verfahren sich auf die Ermittlung von H_2 reduziert.

Digitized by Google

6. Berechnung von Sonderfällen. I. Für die von J. J. Thomson behandelte Platte Fig. 2 können wir in erster Annäherung mit Rücksicht auf das Verschwinden von H_2 am Rande setzen

$$H_2 = B\,(x^2 - a^2), \tag{30}$$

wenn a die halbe Plattendicke bedeutet. Dann ist

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = 2\,B\,x, \tag{30a}$$

und die Formeln (23c) ergeben mit $dF = 2\,b\,dx$

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{t_0\,b}{4\pi^2\lambda}\int_{-a}^{+a} B^2 x^2\,dx = \frac{b\,a^3\,t_0}{6\pi^2\lambda}B^2 \\ U_a &= -\frac{t_0\,\mu\,\omega\,b\,H_0}{4\pi}\int_{-a}^{+a} B\,(x^2 - a^2)\,dx = -\frac{b\,a^3\,t_0\,\omega\,\mu\,H_0\,B}{3\pi} \end{aligned}\right\} \tag{30b}$$

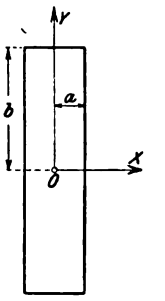


Fig. 2.

Durch Gleichsetzen folgt daraus

$$\left.\begin{aligned} B &= 2\pi\omega\lambda\mu H_0 \\ U_i &= U_a = \frac{2}{3}t_0\,b\,a^3\omega^2\mu^2\lambda\,H_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{30c}$$

Da es sich nur um eine Konstante B handelt, so erübrigt sich die Heranziehung der Bedingung des Extremums, die natürlich hier identisch erfüllt ist.

Dasselbe würde auch noch gelten für eine Platte mit größerer Dicke, für die man an Stelle von (30) in erster Annäherung

$$H_2 = B\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2) \tag{31}$$

mit

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = 2\,B\,x\,(y^2 - b^2), \quad \frac{\partial H_2}{\partial y} = 2\,B\,y\,(x^2 - a^2) \tag{31a}$$

setzen würde. Die Ausrechnung bietet nichts Neues und kann dem Leser überlassen werden, der vielleicht auch noch die beiden Ansätze

$$H_2 = B\cos\frac{\pi x}{2a} \tag{31b}$$

$$H_2 = B\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} \tag{31c}$$

an Stelle von (30) und (31) der Rechnung zugrunde legt.

Will man genauer vorgehen, so wird man unter Hinzunahme eines zweiten Gliedes für die dünne Platte an Stelle von (30)

$$H_2 = B_1\,(x^2 - a^2) + B_2\,(x^2 - a^2)^2 \tag{32}$$

ansetzen, womit die Formeln (23a) übergehen in

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{b\,a^3\,t_0}{6\pi^2\lambda}\left(B_1^2 - \frac{8}{5}B_1 B_2 a^2 + \frac{32}{35}B_2^2 a^4\right) \\ U_a &= \frac{b\,a^3\,t_0\,\omega\,\mu\,H_0}{3\pi}\left(B_1 - \frac{4}{5}B_2\,a^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{32a}$$

Führt man diese Ausdrücke gemäß dem Extremum von (20) in die Gleichungen

$$\frac{\partial U_i}{\partial B_1} = 2\frac{\partial U_a}{\partial B_1}; \qquad \frac{\partial U_i}{\partial B_2} = 2\frac{\partial U_a}{\partial B_2} \tag{32b}$$

Digitized by Google

ein, so liefern diese nach etlichen Kürzungen

$$\left.\begin{aligned} B_1 - \frac{4}{5} B_2 a^2 &= 2\pi\omega\lambda\mu H_0 \\ B_1 - \frac{8}{7} B_2 a^2 &= 2\pi\omega\lambda\mu H_0 \end{aligned}\right| \qquad 32\,c)$$

daher $B_2 = 0$. Der Ansatz (32) führt also wieder auf (30) zurück, womit nur gesagt ist, daß das zweite Glied in (32) der Extremalbedingung nicht genügt. Man hätte vielmehr richtiger

$$H_2 = B_1 (x^2 - a^2) + B_3 (x^2 - a^2)^3 \qquad 33)$$

oder ebensogut analog (31b)

$$H_2 = B_1 \cos\frac{\pi x}{2a} + B_3 \cos\frac{3\pi x}{2a} \qquad 33\,a)$$

anschreiben sollen. Wir wollen der Abwechslung halber die Rechnung mit dem Ansatz (33a) durchführen und erhalten durch Einsetzen in die Formeln (23c)

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{b\,t_0}{64\cdot\lambda a}(B_1^2 + 9B_3^2) \\ U_a &= -\frac{b\,t_0\,\mu\,\omega\,a\,H_0}{\pi^2}\left(B_1 - \frac{B_3}{3}\right) \end{aligned}\right| \qquad 33\,b)$$

Aus den Bedingungen für das Extremum von (20)

$$\frac{\partial U_i}{\partial B_1} = 2\frac{\partial U_a}{\partial B_1}, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial B_3} = 2\frac{\partial U_a}{\partial B_3} \qquad 33\,b)$$

folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= -\frac{64}{\pi^2}\mu\,\omega\,\lambda\,H_0\,a^2 \\ B_3 &= +\frac{64}{27\pi^2}\mu\,\omega\,\lambda\,H_0\,a = -\frac{B_1}{27} \\ U_i = U_a &= \frac{64}{\pi^4}\cdot\frac{82}{81}\cdot t_0\,b\,a^3\,\omega^2\,\mu^2\,\lambda\,H_0^2 \end{aligned}\right\} \qquad 33\,c)$$

Hätten wir nur das erste Glied in (33a) entsprechend dem Ansatz (31b) benutzt, so hätte dies

$$U_i = U_a = \frac{8}{\pi^2} t_0\,b\,a^3\,\omega^2\,\mu^2\,\lambda\,H_0^2$$

ergeben, also einen Wert, der sich zu dem Ergebnis (30c) des früheren Ansatzes (30) verhält wie $8{,}1 : \pi^2$.

Setzt sich der Eisenkern aus ν Platten zusammen, deren Querschnitt $\nu F = 4\,\nu\,a\,b$ ist, so ist der gesamte Wirbelstromverlust bezogen auf die Flächeneinheit des Gesamtquerschnitts nach (33b)

$$\frac{\nu U_i}{\nu F} = \frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{82}{81}\cdot a^2\,t_0\,\omega^2\,\mu^2\,\lambda\,H_0^2, \qquad 34)$$

also proportional dem Quadrat der Einzelplattendicke, die man sonach im Einklang mit dem praktischen Gebrauche so klein als möglich wählen wird.

Digitized by Google

II. Als letztes Beispiel betrachten wir den Kreisquerschnitt, für den mit (8a) und $\mathfrak{H} = H_0 \sin\omega t + H_2 \cos\omega t$

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \frac{t_0}{32\pi^2\lambda}\int_0^F \left(\frac{\partial H_2}{\partial r}\right)^2 dF \\ U_a &= -\frac{\mu\omega t_0}{8\pi}\int_0^F H_0 H_2\, dF \end{aligned}\right\} \quad 23\,d)$$

wird. Setzen wir hierin analog (30) mit dem Außenradius r_0

$$H_2 = B(r^2 - r_0^2), \qquad 35)$$

so wird nach Ausführung der Integration mit

$$dF = 2\pi r\, dr$$

und Gleichsetzen $U_i = U_a$

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{3}{4}\pi\mu\omega\lambda H_0 \\ U_i = U_a &= \frac{9}{64}\pi t_0 \mu^2\omega^2\lambda H_0 r_0^4 \end{aligned}\right\} \quad 35\,a)$$

mithin für einen aus ν Drähten zusammengesetzten Eisenkern der Energieverlust bezogen auf die Flächeneinheit des Gesamtquerschnitts

$$\frac{\nu U_i}{\nu\pi r_0^2} = \frac{9 t_0}{64}\mu^2\omega^2\lambda H_0 r_0^2 \qquad 35\,b)$$

der auch hier proportional dem Quadrat der Dicke der Einzelbestandteile zunimmt.

Man kann natürlich auch in diesem Falle genauere Ansätze analog (33) und (33a) wählen, ohne daß die Berechnung Neues bietet.

7. **Analogie mit der elastischen Torsion.** Die zuletzt erhaltenen Lösungen ergeben eine Verteilung der Wirbelstromkomponente über den Querschnitt der Eisenkerne, welche mit der Verteilung der Torsionsspannungen kongruenter elastischer Stäbe übereinstimmt. Daß dies nicht bloß zufällig ist, lehrt eine Gegenüberstellung der entsprechenden Formeln aus der Elastizitätstheorie[1]), in denen τ_x und τ_y die Torsionsspannungen, G den Gleitmodul, $\varphi : 1$ den Verdrehungswinkel der Längeneinheit des Stabes und M das Torsionsmoment bedeuten. Dann haben wir nach Gl. (8)

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad \text{entspr.} \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0$$

Gl. (4)

$$\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} = \lambda\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad ,, \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2G\frac{\varphi}{1}$$

weiter die Grenzbedingung (15)

$$j_y\, dx - j_x\, dy = 0 \quad ,, \quad \tau_y\, dx - \tau_x\, dy = 0$$

und die Arbeitsgleichung für die Längeneinheit

$$\frac{\mathfrak{H}_0}{4\pi}\int \mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\, dF = \frac{1}{\lambda}\int j^2\, dF \quad \text{entspr.} \quad \frac{M}{2}\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{2G}\int \tau^2\, dF$$

Danach entspricht die zeitliche Änderung der magnetischen Induktion

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

[1]) Vgl. u. a. Lorenz, Techn. Elastizitätslehre (Lehrb. d. Techn. Physik, Bd. IV), München 1913.

Digitized by Google

dem Torsionswinkel $\varphi : l$ der Längeneinheit, die spezifische Leitfähigkeit λ dem doppelten Gleitmodul G und die Ampèrewindungszahl auf die Längeneinheit der Spule

$$\frac{n J}{l} = \frac{\mathfrak{H}_0}{4\pi}$$

dem halben Torsionsmoment.

Auch die Zweckmäßigkeit der Unterteilung der Eisenkerne wird durch unsere Analogie leicht verständlich, da naturgemäß bei vorgelegtem Torsionswinkel (entsprechend der von außen aufgedrückten Änderung von $\mathfrak{B}$) die Spannungen im unterteilten Querschnitt und der Arbeitsaufwand hierfür viel kleiner ausfallen als für den homogenen Stab.

8. Zusammenfassung. Nach Ableitung der Feldgleichungen im Eisenkern einer Spule werden diese zur Berechnung der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Energie benutzt, die dabei in Hysteresis- und Wirbelstromarbeit zerfällt. Die bisher übliche Berechnung der letzteren wird kurz besprochen und darauf ein Näherungsverfahren entwickelt, welches auf dem der Elastizitätslehre analogen Satz des Extremums der Wirbelstromarbeit beruht. Das Verfahren wird auf dünne Platten sowie auf Drähte angewandt und die formale Übereinstimmung der Resultate mit denen der Torsion aus der Analogie zwischen den elektrischen und elastischen Gleichungen nachgewiesen.

Geometrisches zur elektrischen Festigkeitsrechnung.

Von

J. Spielrein.

Einleitung. Bei der jetzigen Entwicklung der Elektrotechnik ist es für den Konstrukteur sehr wichtig geworden, die elektrische Beanspruchung des Materials vorausberechnen zu können. Die vollständige Berechnung bietet große mathematische Schwierigkeiten, sie ist nur in wenigen, geometrisch einfachen Fällen gelungen. Man ist deswegen meistens auf angenäherte Lösungen angewiesen, in denen das „Erraten" und das „Probieren" eine große Rolle spielt. Leider wird aber dabei viel gesündigt, weil man öfters von den geometrischen Eigenschaften der in Frage kommenden elektrischen Felder eine unklare Vorstellung besitzt. Es schien mir deswegen nützlich, in der vorliegenden Arbeit auf die geometrischen Eigenschaften des elektrostatischen Kraftlinienfeldes etwas näher einzugehen.

1. Geometrische Darstellung der Divergenz und des Rotors. Wir betrachten das Feld eines Vektors $\mathfrak{A}$, den wir in der Form

$$\mathfrak{A} = A\,t, \quad t^2 = 1$$

schreiben; der Einheitsvektor t ist in jedem Punkt parallel zur Kraftlinientangente. Wir bilden die Divergenz und den Rotor von $\mathfrak{A}$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{div} A\,t = A \operatorname{div} t + t \operatorname{grad} A, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot} A\,t = A \operatorname{rot} t - [t \operatorname{grad} A]. \tag{2}$$

Wenn t konstant ist, so sind die Kraftlinien parallele Geraden, div t und rot t sind Null, und die Gleichungen (1) und (2) vereinfachen sich:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = t \operatorname{grad} A, \tag{1'}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = -[t \operatorname{grad} A]. \tag{2'}$$

Digitized by Google

Die Divergenz eines Vektors von konstanter Richtung ist durch die Änderung seines Betrages in dieser Richtung bestimmt, der Rotor dieses Vektors ist durch die Änderung seines Betrages quer zu seiner Richtung bestimmt.

Wenn aber die Kraftlinien gegeneinander geneigt oder gekrümmt sind, so treten zu den Ausdrücken für div $\mathfrak{A}$ und rot $\mathfrak{A}$ noch Glieder hinzu, deren geometrische Bedeutung wir jetzt bestimmen wollen. Wir nehmen an, daß das Feld flächennormal ist, daß also im Felde zu den Kraftlinien orthogonale Flächen existieren. Dann muß bekanntlich der Vektor t die Beziehung

$$t \operatorname{rot} t = 0$$

befriedigen[1]). Wir bezeichnen in jedem Punkt mit n und b die Einheitsvektoren parallel zu der Hauptnormale und zu der Binormale der durch diesen Punkt gehenden Kraftlinie und nehmen an, daß die Vektoren t, n, b ein Rechtssystem bilden, daß also $[t\,n] = b$. Wir bezeichnen in jedem Punkt die Krümmung der Kraftlinie mit k, die mittlere Krümmung der durch den Punkt gehenden Orthogonalfläche mit K. (Die mittlere Krümmung einer Fläche ist bekanntlich gleich der Summe der Krümmungen von zwei rechtwinkligen Normalschnitten dieser Fläche.) Dann gelten die einfachen Beziehungen[2]):

$$\operatorname{div} t = K, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} t = k\,b. \tag{4}$$

Wir bilden den Gradienten der Konstanten $t^2 = 1$:

$$\operatorname{grad}(t^2) = 0 = 2\,(t \operatorname{grad})\,t + 2\,[t \operatorname{rot} t],$$

woraus folgt:

$$[t \operatorname{rot} t] = -(t \operatorname{grad})\,t = -k\,n,$$

denn (t grad) t ist parallel zu n, und sein Betrag ist gleich dem Verhältnis des Winkels zwischen zwei benachbarten Tangenten der Kraftlinie zu dem von den Tangenten herausgeschnittenen Bogenelement der Kraftlinie. Es ist also

$$n \operatorname{rot} t = 0 \qquad t \operatorname{rot} t = 0,$$

so daß rot t parallel zu b ist, und

$$|\operatorname{rot} t| = b \operatorname{rot} t = [t\,n] \operatorname{rot} t = -[t \operatorname{rot} t]\,n = +k\,n^2 = k,$$

also

$$\operatorname{rot} t = k\,b$$

Um jetzt (3) zu beweisen, betrachten wir eine Orthogonalfläche im Felde. t ist in jedem Punkt der Fläche parallel zur Flächennormale. In einem Punkt P_0 der Fläche sei $t = t_0$. Wir betrachten zwei rechtwinklige Normalschnitte s_1 und s_2, deren Tangenten in P_0 zu den Einheitsvektoren a_0 und b_0 parallel sind (Fig. 1). Die Krümmungsradien von s_1 und s_2 seien R_1 und R_2. Zerlegt man t in seine Komponenten nach den drei festen Richtungen t_0, a_0, b_0:

$$t = \lambda\,t_0 + \alpha\,a_0 + \beta\,b_0,$$

so erhält man div t, indem man λ, α, β nach den Richtungen t_0, a_0, b_0 differenziert und die Ableitungen addiert. Im Punkte P_0 hat λ den maximalen Wert 1, seine Ableitung ist Null. Man sieht leicht, daß die Ableitungen von α und β gleich den Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ sind. Folglich wird

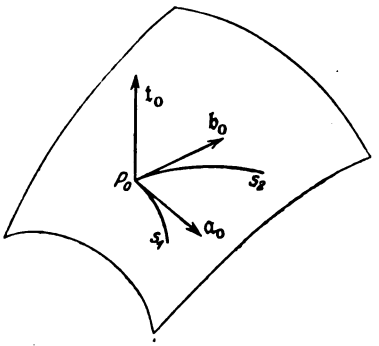


Fig. 1.

$$\operatorname{div} t = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = K.$$

Setzen wir diese Werte von rot t und div t in die Gleichungen (1) und (2) ein, so erhalten wir für ein flächennormales Feld:

[1]) Archiv f. El. 1915, S. 364.

[2]) R. Rothe, Anwendung der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinig. Bd. 21, 1913, Oktober-Dezember.

Digitized by Google

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = A K + t \operatorname{grad} A, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = A k b - [t, \operatorname{grad} A]. \tag{6}$$

Die Formel (5) ist schon von v. Ignatowsky angegeben worden[1]).

2. Geometrische Eigenschaften des Laplaceschen Feldes. Wenn ein Vektor $\mathfrak{A}$ gleichzeitig wirbelfrei und quellenfrei ist, so kann man $\mathfrak{A}$ als Gradienten einer Potentialfunktion φ darstellen, die der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. (Im rechtwinkligen Koordinatensystem wird diese Differentialgleichung zu $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$). Ein Feld, das diesen Bedingungen genügt, heißt auch ein Laplacesches Feld. Wir wollen jetzt untersuchen, welche geometrischen Eigenschaften die Kraftlinien eines Laplaceschen Feldes besitzen. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen, daß man bei einem beliebigen flächennormalen Felde den Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ so wählen kann, daß das Feld wirbelfrei oder quellenfrei wird: im quellenfreien Felde muß A der Bedingung

$$A K + t \operatorname{grad} A = 0 \tag{5'}$$

genügen, im wirbelfreien Felde der Bedingung

$$A k b - [t \operatorname{grad} A] = 0. \tag{6'}$$

Es ist aber nicht immer möglich A so zu wählen, daß das Feld gleichzeitig wirbel- und quellenfrei wird, denn in diesem Falle muß A die beiden Gleichungen (5') und (6') gleichzeitig befriedigen, was nur möglich ist, wenn

$$\operatorname{grad}(\ln A) = \frac{1}{A} \operatorname{grad} A = -K t + k n, \tag{7}$$

wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Diese vektorielle Gleichung können wir in drei skalare Gleichungen zerlegen:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} = -K, \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial n} = k, \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial b} = 0, \tag{7'}$$

wo unter $\frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial A}{\partial n}$, $\frac{\partial A}{\partial b}$ die Ableitungen von A in den Richtungen der Tangente, der Normale und der Binormale zu verstehen sind. In einem Laplaceschen Feld ist die logarithmische Ableitung des Betrages des Feldvektors in der Richtung der Hauptnormale gleich der Krümmung der Kraftlinie, die logarithmische Ableitung in der Richtung der Tangente gleich der mittleren Krümmung der zu der Kraftlinie orthogonalen Fläche, die Ableitung von A in der Richtung der Binormale ist Null. grad A liegt in der Schmiegungsebene der Kraftlinie.

Der Vektor $-K t + k n$ ist wirbelfrei, so daß

$$\operatorname{rot} K t = \operatorname{rot} k n. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) sind charakteristisch für das Laplacesches Feld. Aus (7') entnehmen wir weiter: Wenn der Betrag des Feldvektors auf jeder Kraftlinie konstant ist, so muß die mittlere Krümmung jeder Orthogonalfläche gleich Null sein; wenn der Betrag des Feldvektors auf jeder Orthogonalfläche konstant ist, so müssen die Kraftlinien geradlinig sein, was nur möglich ist, wenn die Orthogonalflächen parallel sind. (Wenn man auf einer Fläche eine beliebige Kugel herumrollen läßt, so beschreibt der zum Berührungspunkt diametral entgegengesetzte Punkt der Kugel eine zur gegebenen parallele Fläche.) Die weiteren Betrachtungen beschränken wir auf das parallelebene und das meridianebene Feld[2]).

[1]) W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis I, S. 84 (197).

[2]) Diese Bezeichnung ist von F. Emde vorgeschlagen worden.

Digitized by Google

a) Parallelebenes Feld. Wenn die Orthogonalflächen zylindrisch sind (nicht unbedingt kreiszylindrisch), so werden die Kraftlinien senkrecht zu den Zylindererzeugenden, der Feldvektor wird paralleleben. Die mittlere Krümmung einer Zylinderfläche ist gleich der Krümmung ihres Normalschnittes senkrecht zu den Erzeugenden. In jeder solchen Normalebene bilden die Kraftlinien dieselbe Schar von Kurven, zu denen die Niveaulinien eine orthogonale Schar von Kurven bilden. Die Gleichung (8) nimmt in diesem Fall die einfache Form an:

$$\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0. \qquad 8')$$

Wenn also im parallelebenen Feld die Kraftlinien Kurven konstanter Krümmung sind (Kreise oder Geraden), so müssen auch die Niveaulinien Kurven konstanter Krümmung sein. Wenn eine der Kraftlinien ein Kreis oder eine Gerade ist, so werden die Niveaulinien in den Schnittpunkten mit dieser Kraftlinie ein Maximum oder ein Minimum ihrer Krümmung haben.

b) Meridianebenes Feld. Wenn das Feld eine Symmetrieachse hat, so sind alle Niveauflächen Rotationsflächen um die Symmetrieachse (abgesehen von dem Fall, wo die Kraftlinien konaxiale Kreise sind). Die Meridianlinien der Rotationsflächen bilden in jeder Meridianebene eine Schar von Niveaulinien. Der Krümmungsradius einer Niveaulinie im Punkte P_0 sei R, (Fig. 2), der Normalenabschnitt zwischen P_0 und der Rotationsachse sei N. Dann ist bekanntlich die mittlere Krümmung der Rotationsfläche in P_0:

$$K = \frac{1}{N} \pm \frac{1}{R}. \qquad 9)$$

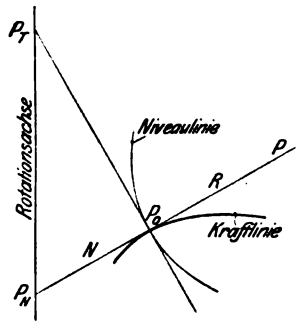


Fig. 2.

(N ist der Krümmungsradius des zur Meridianebene senkrechten Normalschnittes.) Man wählt das Plus- oder das Minuszeichen, je nachdem $P_0 P$ und $P_0 P_N$ gleichgerichtet oder entgegengerichtet sind. K ist positiv, wenn die Niveaufläche konkav gegen die Rotationsachse ist. Die Kraftlinien liegen in den Meridianebenen orthogonal zu den Niveaulinien, t ist parallel zu $P_0 P$, n ist parallel zu $P_0 P_T$ und b ist senkrecht zur Meridianebene.

Die Gleichung (8) nimmt in diesem Fall die Form an:

$$\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{k}{N}. \qquad 8'')$$

Der Verlauf der Kraftlinien eines meridianebenen Feldes in einer Meridianebene kann nur dann dem parallelebenen Felde entsprechen, wenn entweder $N = \infty$ oder $k = 0$ ist. Im ersten Falle sind die Niveauflächen parallele Ebenen, im zweiten Falle sind sie parallele Rotationsflächen konstanter Krümmung In beiden Fällen sind die Kraftlinien geradlinig.

Es ist

$$\text{rot } K\,\mathfrak{t} = K \text{ rot } \mathfrak{t} - [\mathfrak{t} \text{ grad } K] = K\,k\,\mathfrak{b} + [[\mathfrak{b}\,\mathfrak{n}] \text{ grad } K] = K\,k\,\mathfrak{b} + \mathfrak{n}\frac{\partial K}{\partial b} - \mathfrak{b}\frac{\partial K}{\partial n},$$

und

$$\text{rot } k\,\mathfrak{n} = k \text{ rot } \mathfrak{n} - [\mathfrak{n} \text{ grad } k],$$

$$k \text{ rot } \mathfrak{n} = k \text{ rot } [\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}] = k\{(\mathfrak{t} \text{ grad})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b} \text{ grad})\,\mathfrak{t} + \mathfrak{b} \text{ div } \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \text{ div } \mathfrak{b}\},$$

$$-[\mathfrak{n} \text{ grad } k] = [[\mathfrak{t}\,\mathfrak{b}] \text{ grad } k] = \mathfrak{b}\frac{\partial k}{\partial t} - \mathfrak{t}\frac{\partial k}{\partial b}.$$

Die Linien, deren Tangente der Einheitsvektor b ist, sind konaxiale, zu t und n senkrechte Kreise, so daß:

$$\text{div } \mathfrak{b} = 0, \qquad (\mathfrak{t} \text{ grad})\,\mathfrak{b} = 0.$$

Digitized by Google

Außerdem ist in dem meridianebenen Felde

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \frac{\partial k}{\partial b} = 0,$$

so daß:

$$\text{rot } K\, t = \left(K\, k - \frac{\partial K}{\partial n}\right) b,$$

$$\text{rot } k\, n = \left(K\, k + \frac{\partial k}{\partial t}\right) b - (b \text{ grad}) t,$$

und aus (8)

$$b\left(\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t}\right) = (b \text{ grad}) t.$$

Schließlich bemerken wir, daß (b grad) t gleich ist der Ableitung in der Richtung von b der zur Äquatorialebene parallelen Komponente von t, denn die axiale Komponente von t ändert sich nicht in der Richtung von b. Man sieht leicht ein, daß diese Ableitung gleich $\frac{b}{N}$ ist, denn $P_0 P_N$ ist parallel t (Fig. 2) und seine Projektion auf die Äquatorialebene ist gleich dem Abstand des Punktes P_0 von der Rotationsachse. Faßt man diese Resultate zusammen, so erhält man die Formel (8′).

Man könnte zunächst versucht sein, in folgender Weise zu überlegen: Aus (7′) folgt, daß

$$\frac{\partial K}{\partial n} = -\frac{\partial^2 (\ln A)}{\partial t\, \partial n}, \qquad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 (\ln A)}{\partial n\, \partial t}$$

woraus für ein beliebiges Laplacesches Feld:

$$\frac{\partial K}{\partial n} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0.$$

Diese Überlegung ist aber falsch, denn es handelt sich hier um Ableitungen nach einer Richtung, für die im allgemeinen

$$\frac{\partial^2 (\ln A)}{\partial t\, \partial n} \text{ nicht gleich } \frac{\partial^2 (\ln A)}{\partial n\, \partial t} \text{ ist.}$$

Anwendungen im elektrostatischen Felde. Wir betrachten das Feld zwischen zwei geladenen Leiteroberflächen. Der Betrag der Feldstärke sei E, der Einheitsvektor der Kraftlinientangente sei t, und die Dielektrizitätskonstante sei ε. Dann wird in jedem Punkt des Feldes

$$\text{die Feldstärke } \mathfrak{E} = E\, t, \text{ die Verschiebung } \varepsilon\, \mathfrak{E} = \varepsilon\, E\, t.$$

Der Betrag der Feldstärke muß im ganzen Raum unterhalb eines bestimmten Grenzwertes bleiben, der von der Beschaffenheit des isolierenden Mediums abhängt. Wenn E diesen Grenzwert überschreitet, so tritt Zerstörung des Dielektrikums ein (Luft, Porzellan, usw.), die zu einem Kurzschluß führen kann. Wir wollen jetzt die Änderung von E in einem Felde gegebener Form untersuchen. Wenn man es auch bei Hochspannung meistens mit Wechselstrom zu tun hat, so kann man doch bei nicht ferromagnetischen Körpern den elektrischen Einfluß der zeitlich variablen magnetischen Induktion vernachlässigen, ebenso wie den magnetischen Einfluß der Verschiebungsströme und das Feld als statisch annehmen. Im elektrostatischen Felde ist die elektrische Feldstärke wirbelfrei:

$$\text{rot } E\, t = 0 = k\, E\, b - [t, \text{grad } E]. \tag{10}$$

Ferner, wenn keine Ladungen im Dielektrikum vorhanden sind, wird

$$\text{div } (\varepsilon\, E\, t) = 0 = \varepsilon\, E\, K + t \text{ grad } \varepsilon\, E. \tag{11}$$

Diese Gleichungen können wir auch in skalarer Form schreiben:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n} = k, \qquad \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \tag{10′}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = -K. \tag{11′}$$

Wir betrachten zuerst den Fall, daß ε = const., daß also das Dielektrikum im ganzen Feld homogen ist. Das Feld ist dann zugleich quellenfrei und wirbelfrei, und es gilt für die

Digitized by Google

Form des Feldes die einschränkende Bedingung (8). Die Gleichungen (10') und (11') vereinfachen sich zu

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = -K, \quad \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n} = k, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0. \qquad 12)$$

Die Formel (12) kann beim Entwurf eines Kraftlinienbildes unterstützen, sie erlaubt auch die Richtigkeit eines fertigen Kraftlinienbildes zu prüfen.

Betrachten wir z. B. das Kraftlinienbild einer Luftdurchführung im Aufsatz von K. Kuhlmann über Hochspannungsisolatoren (1915, S. 207 dieser Zeitschrift). Die Niveauflächen sind Rotationsflächen um die Achse des inneren Bolzens, die Figur stellt einen Meridianschnitt des Feldes dar. Auf der Oberfläche des inneren Bolzens ist für jede Kraftröhre der Betrag der Feldstärke eingetragen. Wir sehen, daß die Krümmung der Kraftlinien auf der Oberfläche des Bolzens nach dem Gesetz $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = k$ verläuft, wenigstens mit der Genauigkeit, die man erreicht, wenn man die Werte von E für die Kraftröhren als für die Kraftlinien gültige Werte annimmt. So ist z. B. die Breite der Kraftröhren, die mit 1260 und 1000 bezeichnet sind, im Mittel gleich 6,5 mm. Die Krümmung der Grenzkraftlinie zwischen diesen Röhren ist dann ungefähr

$$k = \frac{1}{\frac{1000 + 1260}{2}} \cdot \frac{(1260 - 1000)}{6{,}5}\,\mathrm{mm}^{-1}$$

oder der Krümmungsradius $\frac{1}{k}$ gleich rund 5 cm.

Zur Prüfung nach der Formel $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = -K$ ist die Kenntnis der Werte von E längs der Kraftlinien erforderlich, die dort nicht angegeben worden sind; diese Prüfung wäre aber besonders interessant, weil man so die Zulässigkeit der beim Entwurf dieses Kraftlinienbildes gemachten Annahmen kontrollieren könnte. K. Kuhlmann hat seine Bilder in der Weise erhalten, daß er ein parallelebenes Feld in einer Meridianebene entworfen und dann angenommen hat, daß man das gesuchte Feld mit hinreichender Genauigkeit durch Rotation um die Bolzenachse erhalten kann. Die Zulässigkeit des Verfahrens kontrolliert er durch Vergleich mit zwei typischen Röhrengestalten. Diese Kontrolle ist aber nicht überzeugend, weil die von K. Kuhlmann gewählten zwei typischen Röhrengestalten in einem elektrostatischen Felde unmöglich sind. Sind in einer Meridianebene (Fall 2) die Niveaulinien konzentrische Kreise und die Kraftlinien deren Radien, so erhält man bei der Rotation um die Achse als Niveauflächen parallele Kreisringflächen; die Kraftlinien aber bleiben geradlinig, so daß nach Formel (8'') die Kreisringflächen eine konstante mittlere Krümmung haben sollten, was bekanntlich nicht der Fall ist. Ebenso ist auch der Fall 1 im allgemeinen unmöglich.

Wir wollen jetzt versuchen, die günstigste Gestalt der Leiteroberflächen bei einer Luftdurchführung zu bestimmen. Schon wegen der zylindrischen Form des Leiters werden wir die Leiterachse als Rotationsachse des Feldes nehmen. Es ist klar, daß man bei gegebener Spannung den kleinsten Maximalwert der Feldstärke erhält, wenn E im Felde möglichst gleichmäßig verteilt wird. Wir versuchen deswegen die Oberflächen, sowohl die der äußeren Hülle, als auch die des stromführenden Leiters, so zu gestalten, daß E im ganzen Feld konstant bleibt. Will man, daß E auf den Äquipotentialflächen konstant bleibt, so muß nach (12) k = 0 sein, die Kraftlinien müssen geradlinig, die Äquipotentialflächen parallele Flächen konstanter Krümmung sein. Will man, daß E auch längs der Kraftlinien konstant bleibt, so muß die mittlere Krümmung K der Äquipotentialflächen Null sein. Die einzigen Rotationsflächen, deren mittlere Krümmung gleich Null ist, sind aber Katenoiden, daß sind Flächen, die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Basislinie

Digitized by Google

entstehen. (Nur bei der Kettenlinie ist der Normalenabschnitt N gleich und entgegengerichtet dem Krümmungsradius R.) Die Gleichung dieser Kettenlinien in Zylinderkoordinaten ist:

$$r = \alpha \operatorname{Cof} \frac{z}{\alpha}.$$

Man sieht aber sofort, daß die Kurvenschar, die man durch Änderung des Parameters α erhält, nicht aus parallelen Kurven besteht, sondern aus homothetischen, die sich dabei noch in verschiedenen Punkten schneiden. Es ist also nicht möglich, ein axialsymmetrisches Feld mit konstantem Betrag des Feldvektors zu erhalten, man kann aber versuchen, nach Möglichkeit beiden Forderungen $k = o$ und $K = o$ annähernd zu genügen.

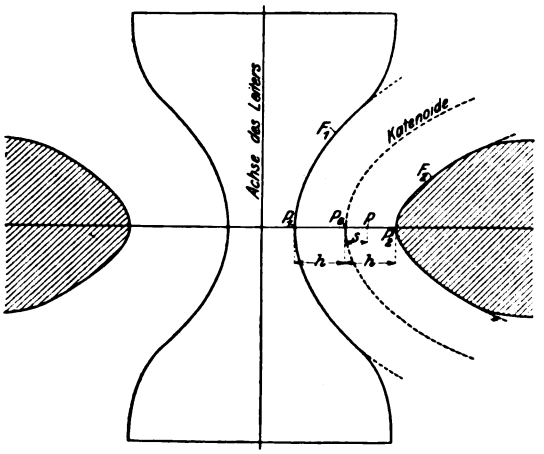


Fig. 3.

Eine solche Durchführung ist in der Fig. 3 angedeutet. Wir betrachten die Katenoide, deren punktiert gezeichnete Meridianlinie die Gleichung

$$r = r_0 \operatorname{Cof} \frac{z}{r_0}$$

hat. Wir nehmen als Leiteroberflächen F_1 und F_2 zwei zu dieser Katenoide parallele Flächen, deren Meridianlinien ihre Scheitelpunkte in P_1 und P_2 haben. Wir setzen $P_1 P_0 = P_0 P_2 = h$. Die Krümmung von F_1 in P_1 ist gleich

$$K_1 = \frac{1}{r_0 - h} - \frac{1}{r_0 + h},$$

die Krümmung von F_2 in P_2 ist gleich

$$K_2 = \frac{1}{r_0 + h} - \frac{1}{r_0 - h} = -K_1.$$

Wir können annehmen, daß wenigstens in der Nähe der Linie $P_1 P_2$ auch die zwischenliegenden Äquipotentialflächen zu F_1 und F_2 parallel bleiben. Die Krümmung einer solchen Äquipotentialfläche in ihrem Scheitelpunkt P ist dann

$$K = \frac{1}{r_0 + s} - \frac{1}{r_0 - s},$$

wo der Abstand $P_0 P = s$ positiv oder negativ ist, je nachdem P von der Rotationsachse weiter oder ihr näher als P_0 liegt. Die Änderung von E längs der Kraftlinie $P_1 P_2$ ist dann durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{ds} = -K = \frac{1}{r_0 - s} - \frac{1}{r_0 + s}.$$

Im Punkte P_0 ($s = o$) sei $E = E_0$, im Punkte P_2 ($s = h$) sei $E = E_2$.

Dann erhalten wir durch Intregration:

$$\ln \frac{E_2}{E_0} = \int_{E_0}^{E_2} \frac{dE}{E} = \int_0^h \left(\frac{1}{r_0 - s} - \frac{1}{r_0 + s}\right) ds = \ln\left(\frac{r_0^2}{r_0^2 - h^2}\right),$$

und

$$E_0 = E_2\left[1 - \left(\frac{h}{r_0}\right)^2\right].$$

Digitized by Google

Die Feldstärke hat den kleinsten Wert im Punkte P_0 und den größten Wert

$$E_{max} = E_1 = E_2$$

in P_1 und P_2. Die Spannung $\mathfrak{E}$ zwischen P_1 und P_2 wird:

$$\mathfrak{E} = \int_{-h}^{+h} E\,ds = E_0 \int_{-h}^{+h} \frac{ds}{1 - \left(\frac{s}{r_0}\right)^2} = E_0 r_0 \ln \frac{r_0 + h}{r_0 - h} = E_{max} \frac{(r_0^2 - h^2)}{r_0} \ln \frac{r_0 + h}{r_0 - h},$$

oder, wenn $r_0 + h = r_2$ und $r_0 - h = r_1$:

$$\mathfrak{E} = E_{max} \cdot \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Wären die beiden Leiteroberflächen konzentrische Zylinder mit den Radien r_1 und r_2, so wäre die Spannung $\mathfrak{E}$ als Funktion von E_{max} durch den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = E_{max} \cdot r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

gegeben. Man sieht, daß bei derselben maximalen Feldstärke in unserem Fall die zulässige Spannung im Verhältnis $\frac{2}{1 + \frac{r_1}{r_2}}$ größer genommen werden kann.

Eine, wenn auch entfernte Ähnlichkeit mit dem vorgeschlagenen Verfahren bietet das von W. Petersen angegebene Bild einer Durchführung[1]), wo zur „Beruhigung" des Feldes eine zum Bolzen konzentrische leitende Hülse angebracht ist. Auch der von K. Kuhlmann (loc. cit. S. 224, Fig. 22a) benutzte Metallschirm im Inneren des Transformatorkastens übt eine ähnliche Wirkung aus.

Wenn man sich nicht auf Konstruktionen mit homogenem Dielektrikum beschränkt, so kann man, wenigstens theoretisch, durch passende Wahl von ε die Verteilung von E im Felde beeinflussen. Setzt man z. B. in (11')

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -K$$

ein, so erhält man $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$. So kann man z. B. in einem Zylinderkondensator ein konstantes E erhalten: die Äquipotentialflächen sind in diesem Falle konzentrische Zylinder, deren Krümmung $K = \frac{1}{r}$ ist. Wollen wir ein längs der Kraftlinien konstantes E haben, so genügt es $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{1}{r}$ zu setzen oder nach Integration: $\varepsilon r = \text{const}$ Eine solche Ausführung für Kabelisolation ist auch tatsächlich versucht worden[2]).

Bei der wirklichen Ausführung von Konstruktionen mit inhomogenem Dielektrikum sind aber noch viele andere Umstände zu berücksichtigen, die das Problem einer besonderen Untersuchung wert erscheinen lassen.

Bemerkung. Nach der Korrektur dieses Aufsatzes ist mir die Arbeit von M. Lagally „Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung" (Zeitschrift für Math. u. Phys. 1915, Bd. 63, S. 360) bekannt geworeen. Sie enthält manche interessante Eigenschaften des Laplaceschen Feldes, und auch die Formeln (7') sind dort abgeleitet und diskutiert worden.

[1]) W. Petersen, Hochspannungstechnik, S. 67, Fig. 48.

[2]) Siehe z. B. Jona, ETZ. 1906, S. 731.

Digitized by Google

Versuch einer Bestimmung der in Ölschaltern auftretenden Drucke.

Von

L. Fleischmann.

Mit der Veröffentlichung der vorliegenden kurzen Arbeit beabsichtige ich das Interesse der Fachgenossen auf ein Gebiet hinzulenken, das mir der weiteren Untersuchung wert erscheint. Der zunächst so einfach erscheinende Ausschaltvorgang eines Ölschalters ergibt bei näherem Zusehen eine Fülle von Fragen thermochemischer, mechanischer und elektrischer Natur. Diese üben alle auf das den Techniker am meisten berührende Problem des beim Ausschalten auftretenden Druckes Einfluß aus. Wir wollen zunächst in großen Umrissen diese Vorgänge schildern, um dann unter wesentlich vereinfachenden Annahmen eine Berechnung der auftretenden Drucke vorzunehmen. In seiner allgemeinsten Form würde das Problem folgendermaßen lauten: Gegeben sei die Stromcharakteristik eines oder mehrerer Wechselstromgeneratoren in Abhängigkeit von der Zeit und von dem Widerstand des Außenkreises. Gegeben sei ferner die mechanische Schaltgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich die Kontaktflächen voneinander bewegen, und die Dimensionen des Ölkastens. Gesucht wird der im Schalter auftretende Druck im Falle eines Kurzschlusses. Unter der Stromcharakteristik ist hier der nichtstationäre Strom zu verstehen, der bei einer plötzlichen Änderung der Belastung auftritt.

Im ersten Augenblick fällt diese Stromcharakteristik mit dem nichtstationären Kurzschlußstrom zusammen, in dem Maße aber, in welchem im Schalter durch den Ausschaltvorgang die Länge des Lichtbogens wächst, nimmt der Widerstand des äußeren Kreises zu, und es tritt ein anderer nichtstationärer Stromverlauf ein. Um diesen im voraus bestimmen zu können, müßte der Zusammenhang zwischen Stromstärke, Länge des Lichtbogens und der Spannung am Bogen bekannt sein. Hier die Ayrtonsche Formel anwenden zu wollen, dürfte als eine allzu kühne Extrapolation betrachtet werden. Man wird also die Aufgabe zunächst schon einmal dahin einschränken müssen, daß einem durch eine oszillographische Aufnahme des Ausschaltvorganges der Strom und die Spannung am Lichtbogen bekannt seien und daß man hieraus die kW-Sekunden ermittelt hat. Der Lichtbogen wirkt nun thermisch auf das Öl ein, ein Teil wird erwärmt, ein Teil wird verdampft und ein weiterer Teil dissoziiert, z. B. wird Wasserstoff und Azetylen gebildet. Über die Temperatur, die hierbei herrscht, ist man auf Vermutungen angewiesen. Wir werden bei den weiter unten folgenden Rechnungen 3000 Grad zugrunde legen. Die Drucke, die beim Verdampfen und der Dissoziation auftreten, werden einesteils mit Schallgeschwindigkeit durch die Flüssigkeit bis zu den Gefäßwandungen übertragen und dort wieder zurückgeworfen, andernteils werden sie auch einem Teil der Flüssigkeit eine Bewegung erteilen. Wegen der sehr kurzen Zeit, während der diese beschleunigenden Kräfte wirken können, treten auch bei freier Oberfläche der Flüssigkeit erhebliche Drucke auf. Von allen diesen Vorgängen müssen wir nun absehen, und wir denken uns den Vorgang im Schalter wie folgt. Zunächst setzen wir das Schaltgefäß als kugelförmig voraus und vollständig mit Öl gefüllt. Dann nehmen wir an, daß uns die Energie, die im Lichtbogen auftritt, bekannt sei, und drittens setzen wir voraus, daß vom Öl ein Teil vollständig in überhitzten Dampf von überall gleicher Temperatur verwandelt wird, während der übrige Teil des Öles seine ursprüngliche Temperatur beibehält. Eine obere Grenze der Beanspruchung des Schaltgefäßes läßt sich, wenn wir von der Zusammendrückbarkeit des Öles absehen, leicht angeben. Diese läßt sich nämlich aus der Formänderungsarbeit des Kastens berechnen und die Formänderungsarbeit selbst muß gleich sein den Wattsekunden des Lichtbogens.

Digitized by Google

Wir wenden uns also zunächst der Bestimmung der Formänderungsarbeit eines kugelförmigen Gefäßes zu Für eine Kugel mit den Begrenzungsradien a und b ist die Tangentialspannung σ_t für irgend einen zwischen den Radien a und b gelegenen Punkt mit dem Radius x

$$\sigma_t = \frac{p\,a^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b^3}{x^3}\right)$$

p = Druck pro cm², die Radialspannung

$$\sigma_r = \frac{p\,a^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{x^3}\right),$$

die Formänderungsarbeit α pro Volumeneinheit ist, wenn m das Verhältnis der Dehnung zur Querzusammenziehung bezeichnet

$$\alpha = \frac{1}{E}\left[\sigma_t^2 + \frac{\sigma_r^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_t^2 + 2\,\sigma_t\,\sigma_r)\right],$$

setzt man $\frac{p\,a^3}{b^3 - a^3} = K$, so ist

$$\alpha = \frac{K^2}{E}\,3\left\{\frac{m-2}{2\,m} + \frac{1}{4}\frac{m+1}{m}\frac{b^6}{x^6}\right\}$$

und die Gesamtformänderungsarbeit

$$A = \frac{K^2\,3}{E}\int_a^b\left(\frac{m-2}{2\,m} + \frac{1}{4}\frac{m+1}{m}\frac{b^6}{x^6}\right)4\pi x^2\,dx$$

$$A = \frac{p^2}{E}\frac{4\pi a^3}{b^3 - a^3}\left[\frac{m-2}{2\,m}a^3 + \frac{m+1}{4\,m}b^3\right].$$

Für $\frac{4\pi a^3}{3}$ setzen wir V_c, das Volumen des Gefäßes, ist ferner die Wandstärke $h = b - a$ klein gegenüber a, und wird m zu $\frac{10}{3}$ angenommen, so ergibt sich

$$A = \frac{p^2}{E}V_c \times 0{,}5\,\frac{a}{h}.$$

Für andere Gefäßformen ergeben sich ähnliche Ausdrücke, so findet man z. B. für ein zylindrisches Gefäß

$$A = \frac{p^2}{E}V_c \times 0{,}95\,\frac{a}{h}.$$

Betragen die Kilowattsekunden im Lichtbogen 500, und hat das Gefäß einen Durchmesser von 100 cm, eine Wandstärke von 3 mm, und beträgt der Elastizitätsmodul E 2×10^6 kg/cm², so wäre die obere Grenze des Druckes p durch die Beziehung bestimmt

$$500 \times 10200 = \frac{p^2 \times 5{,}22 \times 10^5 \times 0{,}5 \times 50}{2 \times 10^6 \times 0{,}3}$$

$$p = 485\ \text{kg/cm}^2.$$

Man ersieht aus diesem Resultat, daß ohne Berücksichtigung der thermischen Vorgänge ein Aufschluß über die Größenordnung der wirklich auftretenden Drucke nicht zu erhalten ist.

Die Lichtbogenenergie Q wird unseren früheren Annahmen gemäß dazu verbraucht, G Gramm der Flüssigkeit vollständig zu verdampfen und dann das Gas auf $T_1{}^0$ zu erwärmen. Wir setzen voraus, daß die kritische Temperatur überschritten ist, und wir nennen die

Digitized by Google

Wärmemenge, welche wir der Flüssigkeit pro Gewichtseinheit bis zur Erreichung der kritischen Temperatur T_k zuführen müssen, g; bezeichnen wir ferner die spezifische Wärme des gebildeten Gases mit c_v, so muß folgende Gleichung bestehen:

$$Q = G\,[g + c_v\,(T_1 - T_k)] + A. \qquad 1)$$

In dieser Gleichung ist uns G und die Formänderungsarbeit A unbekannt. Vernachlässigen wir die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, dann muß die Volumenvergrößerung des Gefäßes gleich dem gebildeten Gasvolumen vermindert um das Volumen der vergasten Flüssigkeitsmenge sein. Ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit δ und v das spezifische Gasvolumen, so gilt die Beziehung

$$G\,p\left(v - \frac{1}{\delta}\right) = p^2\,V_c\,0{,}5\,\frac{a}{h}. \qquad 2)$$

Nach den Gasgesetzen ist ferner $p\,v = R_1\,T_1$, woraus folgt

$$G = p^2\,\frac{V_c}{E}\,0{,}5\,\frac{a}{h}\,\frac{1}{R_1\,T_1} - \frac{p}{\delta}.$$

Dieses in die Gleichung (1) eingesetzt, ergibt

$$Q = p^2\,\frac{V_c\,0{,}5\,a}{E\,h}\left\{\frac{c_v\,(T_1 - T_k)\,\delta + g\,\delta}{R_1\,T_1\,\delta - p} + 1\right\}.$$

Da die nötigen Daten für das übliche Schalteröl nicht zur Verfügung stehen, so wollen wir als Flüssigkeit Benzol C_6H_6 annehmen. Für dieses ist R_1 1,086 kgcm, $c_v = 0{,}264$, $g = 180$ cal, $\delta = 0{,}874$, $T_k = 300^0$, T_1 nehmen wir zu 3000^0 an. Q betrage wieder 500 kWsec. Wir wollen alle Größen auf kg und cm beziehen, dann lautet die Gleichung:

$$500 \times 10200 = \frac{p^2 \times 5{,}22 \times 10^5 \times 0{,}5 \times 50}{2 \times 10^6 \times 0{,}3}\left\{\frac{[0{,}264\,(3000 - 300) + 180] \times 0{,}874 \times 43 + 1}{1{,}086 \times 3000 \times 0{,}74 - p}\right\}.$$

Die Ausrechnung ergibt $p = 132$ kg/cm², einen Wert, der auch zur Zerstörung des Gefäßes führen muß. Denn $\sigma_t = \frac{p\,a}{2\,h}$ ergibt $\frac{132 \times 50}{0{,}6} = 11\,000$ kg/cm². Dieses ist natürlich ein Wert, für den die Formeln für die Formänderungsarbeit ihre Gültigkeit verlieren.

Wir können nun rückwärts ausrechnen, welche Energiemenge der Schalter ohne Gefahr für das Gefäß aushalten kann, indem man vom zulässigen Wert von σ_t ausgeht. Es ergibt sich $p = \frac{2\,h\,\sigma_t}{a}$

$$Q = \sigma_t^2\,\frac{V_c}{E}\,2\,\frac{h}{a}\left\{\frac{[c_v\,(T_1 - T_k)\,\delta + g\,\delta]\,43}{R_1\,T_1\,\delta - \frac{2\,h}{a}\,\sigma_A} + 1\right\}.$$

Wie bereits im Anfange erwähnt, stellen diese Resultate nur ganz grobe Annäherungswerte dar. Da man aber meines Wissens bisher die Größe der auftretenden Drucke in Schaltern rechnerisch überhaupt noch nicht festzustellen versucht hat, so ist vielleicht mit den hier angegebenen Rechnungen ein kleiner Schritt vorwärts getan.

Digitized by Google

Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des Ferromagnetismus.

I. Anfangssuszeptibilität und Annäherungsgesetz.

Von

W. Steinhaus und **E. Gumlich.** Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Einleitung. Bevor im folgenden untersucht wird, ob ein Zusammenhang zwischen der Größe der Anfangssuszeptibilität und dem Gesetze besteht, nach welchem sich die Intensität der Magnetisierung mit immer weiter wachsender Feldstärke dem Sättigungswerte nähert, wird es zweckmäßig sein, an einige Beobachtungen zu erinnern, auf denen wir unsere Betrachtungen aufbauen wollen.

Bekanntlich sind unsere ferromagnetischen Materialien makroskopisch betrachtet „isotrop", d. h. ihre physikalischen Eigenschaften sind in allen Richtungen dieselben. In den kleinsten Teilen aber sind sie „anisotrop", wie schon die mikrographische Untersuchung zeigt; sie bestehen aus einer Unzahl von wirr durcheinander liegenden kleinen Kristallen, deren Eigenschaften in den verschiedenen Richtungen verschieden sind. Die zunächst gefundene Isotropie ist also nur eine scheinbare, vorgetäuscht durch die gleichmäßige Verteilung kleiner anisotroper Bestandteile in allen Richtungen. Solche Stoffe bezeichnet man daher auch als „pseudoisotrop".

Es ist selbstverständlich, daß die physikalischen Eigenschaften so kompliziert gebauter Substanzen nicht einfach sein können, wenn schon die der Bestandteile in den verschiedenen Richtungen verschieden sind. Es wird also zur Herleitung des magnetischen Verhaltens nötig sein, auf die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Kristalle zurückzugreifen.

1. **Die Magnetisierung des anisotropen Ferromagnetikums.** Schneidet man aus einem ferromagnetischen Kristall, z. B. Pyrrhotin, senkrecht zu seiner kristallographischen Hauptachse eine Platte heraus, so findet man nach Pierre Weiß[1]), daß sie auch ohne Feld in einer Richtung stark magnetisiert ist. Aus dieser Platte möge man nun wieder einen Streifen herausnehmen, und zwar gerade in der Richtung der vorhandenen Magnetisierung, und dann diesen Streifen auf seine magnetischen Eigenschaften untersuchen. Bringt man ihn in ein seiner Magnetisierung gleichgerichtetes Feld, so findet man, daß die Intensität mit zunehmender Feldstärke sich nur noch wenig vergrößert, wie hoch man auch die Feldstärke wachsen läßt. Das Probestück ist also im wesentlichen schon bis zur Sättigung magnetisiert. Läßt man in der entgegengesetzten Richtung ein Feld von Null an zunehmen, so ändert sich die Magnetisierung zunächst nicht; erst wenn das Feld einen bestimmten kritischen Wert $\mathfrak{H}_c$ (Koerzitivkraft) erreicht hat, springt sie plötzlich in den entgegengesetzt gleichen Wert. Weitere Zunahme des Feldes in dieser Richtung bleibt ohne merklichen Einfluß; ebenso ein Zurückgehen der Feldstärke auf Null. Erst bei dem kritischen Wert $\mathfrak{H}_c$ in der ursprünglichen Richtung „klappt" die Magnetisierung wieder „um".

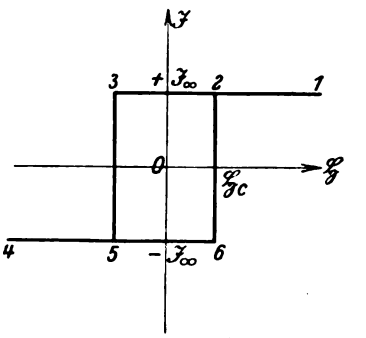


Fig. 1.

Fig. 1 stellt dieses Verhalten in Form einer Magnetisierungskurve dar. Es sei besonders hervorgehoben, daß die Wege 1 — 2 — 3 und 4 — 5 — 6 vollkommen reversibel sind, während die Wege 3 — 5 und 6 — 2 nur in dieser Richtung durch-

[1]) Pierre Weiß: Journ. de Phys. (4) **4**, 469, 1905 und (4) **6**, 661, 1907.

Digitized by Google

laufen werden können, also irreversibel sind. Bei diesem Probestück ist also nur eine irreversible Änderung der Magnetisierungsintensität möglich.

Fall 2. Hätten wir aus der Kristallplatte den Streifen senkrecht zur Magnetisierungsrichtung herausgenommen, so hätte er eine Quermagnetisierung, aber keine Längskomponente gezeigt. Diese wäre erst in einem Felde aufgetreten, und zwar zunehmend mit wachsender Feldstärke. Die Querkomponente hätte sich entsprechend verkleinert, bzw. vergrößert, doch so, daß die Resultante immer die Sättigungsmagnetisierung ergeben hätte. Die Magnetisierung wäre also nicht ihrer Größe, sondern nur ihrer Richtung nach geändert worden, und diese Richtungsänderung wäre reversibel erfolgt. Die Längskomponente hätte den Wert J_∞ erst bei sehr großer Feldstärke angenommen. Die Magnetisierbarkeit wäre also kleiner gefunden worden als im ersten Falle.

Bei dieser Betrachtung ist die Möglickeit eines „Umklappens" der Magnetisierung aus ihrer ursprünglichen Richtung in die des Feldes nicht berücksichtigt, weil es einmal für das folgende unerheblich ist, andererseits aber die Vorstellung wesentlich schwieriger machen würde.

Genau dasselbe hätten wir erhalten, wenn wir den Streifen parallel der kristallographischen Hauptachse geschnitten hätten, nur wäre dann die Magnetisierbarkeit noch wesentlich kleiner gewesen.

Diese beiden Probestücke würden also eine mehr oder weniger große, rein reversible Magnetisierbarkeit gezeigt haben.

Fall. 3. Wie sich ein Stab, der in beliebiger Zwischenrichtung geschnitten ist, verhalten muß, ist aus dem vorhergehenden leicht zu übersehen. Je weiter sich diese Richtung von der ursprünglichen Magnetisierung entfernt, um so größer muß die Koerzitivkraft und um so kleiner der irreversible Magnetisierungsbeitrag werden.

2. Die Magnetisierung des pseudoisotropen Ferromagnetikums. Wir wollen jetzt nach den magnetischen Eigenschaften eines Konglomerats von wirr durcheinanderliegenden kleinen Kristallen fragen, deren Achsenrichtungen nach allen Seiten gleichmäßig verteilt sind. Es ist ohne weiteres klar, daß in diesem Falle in jedem Stadium der Magnetisierung bei einer beliebigen Feldänderung eine komplizierte Übereinanderlagerung von irreversiblen und reversiblen Prozessen auftreten muß. Ehe wir nun schrittweise die einzelnen Stadien verfolgen, müssen wir einen bestimmten, definierten Anfangszustand festsetzen, von dem wir ausgehen wollen. Wir wählen dazu den Nullpunkt, den Zustand des entmagnetisierten Materials. In der Praxis wird dieser Zustand erreicht durch einen Entmagnetisierungsprozeß; das Material wird einem Wechselfelde von hinreichender Anfangsamplitude ausgesetzt, welches sich dann stetig bis zu Null verkleinert. Aus der Erfahrung wissen wir, daß wir dabei immer kleinere und kleinere Magnetisierungszyklen beschreiben, die schließlich im Nullpunkt endigen. Was kann nun über den so erreichten Zustand theoretisch ausgesagt werden auf Grund unserer Vorstellung vom Aufbau des Materials? Daß wir uns bei dieser Betrachtung auf die irreversiblen Vorgänge beschränken können, ist leicht einzusehen.

Wir greifen aus unserem Material 8 Kristalle heraus, deren Magnetisierungsrichtungen in der Weise (oder gerade entgegengesetzt) verteilt sind, wie Fig. 2 angibt, und setzen sie dem Wechselfelde abnehmender Stärke aus. Während der ersten Halbperiode habe das Feld die Richtung des gefiederten Pfeiles in Fig. 3, dann ist bei hinreichend großer Amplitude der Zustand am Ende der ersten Halbperiode der durch Fig. 3 angegebene, und zwar unabhängig von der ursprünglich in Fig. 2 angenommenen Verteilung.

In der zweiten Halbperiode hat das Feld entgegengesetzte Richtung, erhebt sich aber seinem absoluten Betrage nach nicht ganz bis zu demselben Maximum wie vorher, und zwar wollen wir annehmen, daß seine Komponente in der Richtung der beiden Kristalle 4 und 6 nicht mehr genügt, die Magnetisierung dieser Kristalle umzukehren. Am Ende der zweiten Halbperiode haben wir also das Bild in Fig. 4.

Digitized by Google

In der dritten ist das Feld wieder umgekehrt und sein Maximum wieder kleiner, so daß auch die Magnetisierungsrichtung der Kristalle 3 und 7 jetzt ungeändert bleibt usw. Die entsprechenden Richtungen sind dann durch Fig. 5 und 6 gegeben.

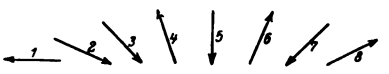


Fig. 2.

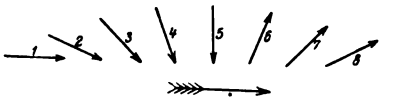


Fig. 3.

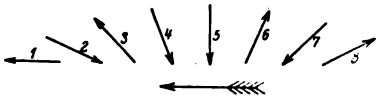


Fig. 4.

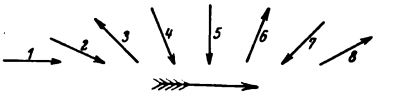


Fig. 5.

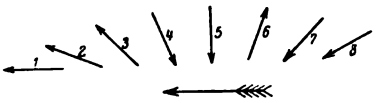


Fig. 6.

Von da an bleibe das Wechselfeld gleich Null. Es ist leicht zu übersehen, daß jetzt das System dieser 8 Kristalle nahezu keine magnetische Wirkung in der Richtung des Wechselfeldes äußern kann, da sich ihre Komponenten in dieser Richtung nahezu aufheben. Vollständig wird dies der Fall sein bei einem pseudoisotropen Material, wie dem Eisen, bei dem außerordentlich viele Kristalle in allen möglichen Richtungen angeordnet sind.

Der durch den Entmagnetisierungsprozeß erreichte Zustand ist also definiert durch die vollkommen gleichmäßige Verteilung der Magnetisierungsrichtungen der Kristalle nach allen Seiten.

Ein so vorbehandeltes Material wollen wir nun bis zur Sättigung magnetisieren. Zunächst sei von reversiblen Prozessen noch abgesehen. Bis die Feldstärke von Null ansteigend den oben erwähnten Wert $\mathfrak{H}_c$ erreicht, wird keine Änderung in der Magnetisierung eintreten können. Von da an werden alle Kristalle, deren Magnetisierungskomponente dem Feld entgegengesetzt ist, nacheinander die Richtung ihrer Magnetisierung umkehren, sobald die Feldkomponente in der Magnetisierungsrichtung den Wert $\mathfrak{H}_c$ erreicht. Der Intensitätszuwachs wird also zuerst groß sein, nimmt dann aber immer mehr ab und kann bei hohen Feldstärken schließlich überhaupt vernachlässigt werden. Die Magnetisierung hat also etwa den in Fig. 7 dargestellten Verlauf.

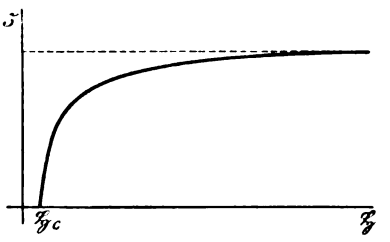


Fig. 7.

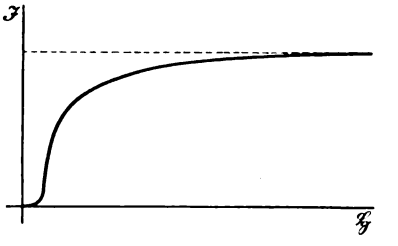


Fig. 8.

Bisher war stillschweigend vorausgesetzt, daß $\mathfrak{H}_c$ für alle Kristalle unseres Materials denselben Wert hätte; nach der Theorie der Kristallmagnetisierung wird $\mathfrak{H}_c$ aber bis zu einem gewissen Grade von der Größe der Kristalle abhängig sein, und zwar so, daß bei sehr kleinen Kristallen auch $\mathfrak{H}_c$ klein ist. Bei unserem Material wird sich also die Magnetisierungskurve nicht erst dann, wenn das Feld den Wert $\mathfrak{H}_c$ erreicht hat, von der $\mathfrak{H}$-Achse lösen sondern schon im Nullpunkt, doch so, daß an dieser Stelle die Anfangssuszeptibilität $\left[\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}\right]_0 = 0$ ist, vergl. Fig 8.

Digitized by Google

Im gleichen Sinne wirkt auch noch der Einfluß der benachbarten Kristalle aufeinander; davon soll später noch die Rede sein. Also sowohl in nächster Nähe des Nullpunktes, als auch bei hohen Werten von $\mathfrak{H}$ verläuft die Kurve horizontal, hier ist kein irreversibler Magnetisierungszuwachs vorhanden.

Diesem Magnetisierungsverlauf überlagert sich nun noch der aus den reversiblen Vorgängen stammende Zuwachs. So erhält die Kurve z. B. im Anfang die Neigung, die der Anfangssuszeptibilität $\left[\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}\right]_0 = \varkappa_0$ entspricht.

Bei hohen Feldstärken nähert sich die Magnetisierung erst viel später einem Sättigungswert als im Falle der Fig. 7.

Somit haben wir eine qualitative Darstellung der Vorgänge auf der Nullkurve gewonnen. In ähnlicher Weise könnte man auch die Hystereseschleife behandeln; doch gehört das nicht direkt zu der vorliegenden Aufgabe.

Will man auch quantitative Aussagen machen, so ist fürs erste eine Beschränkung auf besonders einfache Fälle geboten. Ein solcher Fall ist z. B. die Annäherung an die Sättigung, von der Stelle der Kurve an gerechnet, von wo an die Summe der noch möglichen irreversiblen Prozesse vernachlässigt werden kann, wo also die Kurve der Fig. 7 die Sättigungslinie praktisch erreicht hat.

Von hier an braucht also nur noch mit reversiblem Magnetisierungszuwachs gerechnet zu werden, ebenso wie der Wert der Anfangssuszeptibilität dadurch charakterisiert ist. Um nun aber quantitativ etwas aussagen zu können, muß noch kurz an die Gesetzmäßigkeiten der reversiblen Magnetisierung erinnert werden.

3. Die reversible Suszeptibilität. Magnetisiert man ein Ferromagnetikum bis zu einer beliebigen Intensität, geht dann mit der Feldstärke um ein kleines Stück $\Delta\mathfrak{H}$ zurück, macht diesen Schritt $\Delta\mathfrak{H}$ wieder vorwärts und so einige Male hin und her, so bleibt der darstellende Punkt nahezu vollständig auf dem Endstück des absteigenden Astes der zugehörigen Hystereseschleife; die beiden Endwerte der Intensität ändern sich schließlich nicht mehr, und der Wert von $\frac{\Delta\mathfrak{J}}{\Delta\mathfrak{H}}$ bleibt konstant. Dieses $\frac{\Delta\mathfrak{J}}{\Delta\mathfrak{H}}$ nennt man nach Gans die „reversible Suszeptibilität", weil sie nur durch die reversiblen Prozesse, die im Material vor sich gehen, bedingt ist. Streng genommen, trifft dies natürlich nur für $\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}$ zu, d. h. der Wert der reversiblen Suszeptibilität müßte, ebenso wie der der Anfangssuszeptibilität (welche ja identisch ist mit der reversiblen bei der Magnetisierung Null) durch Extrapolation aus einer Reihe von Werten von immer kleiner werdenden $\Delta\mathfrak{H}$ gewonnen werden. Für den so erhaltenen Wert wären dann, ebenso wie auch bei der Anfangssuszeptibilität, einzig und allein die reversiblen Prozesse maßgebend.

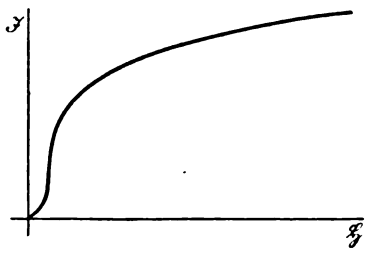


Fig. 9.

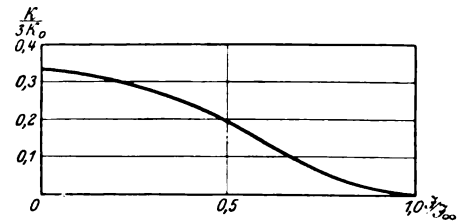


Fig. 10.

Herr Gans hat nun bei einer Reihe von Materialien die reversible Suszeptibilität gemessen. Dabei zeigte sich zunächst, daß sie im wesentlichen eine reine Funktion der Magnetisierung ist, d. h. sie ergab sich nahezu gleich groß, ob sie auf der Nullkurve, auf dem aufsteigenden oder dem absteigenden Aste bestimmt wurde, wenn sie nur bei der-

Digitized by Google

selben Magnetisierungsintensität genommen wurde. Ein geringer Einfluß der Hysterese war freilich vorhanden.

Darüber hinaus aber zeigte es sich sogar, daß diese Funktion bei allen untersuchten Materialien dieselbe war, wenn die Suszeptibilität $\varkappa$ und die Intensität $\mathfrak{J}$ auf die Anfangssuszeptibilität $\varkappa_0$ und die Sättigungsintensität $\mathfrak{J}_\infty$ als Einheiten bezogen wurden.

Durch leider bisher nicht veröffentlichte Betrachtungen gelang es dann Herrn Gans, die Form dieser universellen Funktion zu finden. Sie lautet in Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varkappa_r}{3\varkappa_0} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x} \\ \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} &= \mathfrak{Ctg}\, x - \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Die Fig. 10 stellt ihren Verlauf dar.

Die anschauliche Bedeutung dieser Funktion ist, daß die reversible Suszeptibilität bei jeder bestimmten Magnetisierung so groß ist, wie sie auch sein würde, wenn das Material reversibel dem Langevinschen Gesetze gehorchte; oder anders ausgedrückt: beim Fehlen irreversibler Prozesse würde die Magnetisierungskurve eines Ferromagnetikums durch das Langevinsche Gesetz gegeben sein. In den Gleichungen bedeutet der Parameter x die „reduzierte" Feldstärke $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0}$. Der Reduktionsfaktor $\mathfrak{H}_0$ ist leicht aus den Anfangsbedingungen abzuleiten. Wir wollen bilden:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty}}{\mathrm{d}\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0}}\right]_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{J}_\infty}\left[\frac{\mathrm{d}\mathfrak{J}}{\mathrm{d}\mathfrak{H}}\right]_0 = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{J}_\infty}\varkappa_0$$

dies ist nach der 2. Gleichung von (1) gleich

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathfrak{Ctg}\, x - \frac{1}{x}\right)\right]_0 = \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}\right]_0 = \frac{1}{3}$$

Also ist

$$\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{J}_\infty}\varkappa_0 = \frac{1}{3}$$

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{\mathfrak{J}_\infty}{3\varkappa_0} \qquad 2)$$

4. Das Annäherungsgesetz. Nach dem vorhergehenden läßt sich nun auch angeben, welches Gesetz die gewöhnliche Suszeptibilität $\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}$ in der Abhängigkeit von der Magnetisierung befolgen muß, wenn es sich um ein Material mit nur reversiblen Prozessen handelt. Da in diesem Falle die Magnetisierung dem Langevinschen Gesetz gehorchen soll, so erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (2) folgende Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty}{x} &= \frac{\varkappa}{3\varkappa_0} = \frac{\mathfrak{Ctg}\, x}{x} - \frac{1}{x^2} \\ \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} &= \mathfrak{Ctg}\, x - \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Kurve I in Fig. 11 stellt ihren Verlauf dar:

Da nun bei hohen Feldstärken die Bedingung, daß praktisch nur noch reversibler Magnetisierungszuwachs möglich ist, nach unseren Vorstellungen bei jedem Material

Digitized by Google

erfüllt ist, so muß diese Funktion das Gesetz darstellen, nach welchem sich die Magnetisierungsintensität der Sättigung nähert.

Wir können aber noch eine Vereinfachung eintreten lassen, weil wir uns mit Sicherheit in einem Gebiet der Magnetisierung befinden, das oberhalb $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}8$ liegt. $\mathfrak{Ctg}\, x$ nähert sich nämlich so schnell der 1, daß die Abweichung bei $x = 5$ (d. i. $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}8$) nur noch $^1/_{10}$ $^0/_{00}$ beträgt. Also kann für unseren Fall $\mathfrak{Ctg}\, x$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden. Aus der zweiten Gleichung von 3 ergibt sich dann als Annäherungsgesetz:

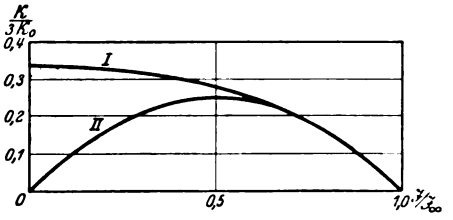


Fig. 11.

$$\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} = 1 - \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}}, \qquad 4)$$

oder aus der Zusammenfassung beider Gleichungen

$$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0} = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} - \left(\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty}\right)^2 \qquad 5)$$

Letztere ist die Gleichung einer Parabel, welche Kurve II in Fig. 11 darstellt. Natürlich kommt hier nur ihr letztes Stück in der Nähe von $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 1{,}0$ in Betracht.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie weit diese Funktion mit der Erfahrung in Übereinstimmung ist, wie gut also die gemessenen Punkte auf die theoretisch geforderte Linie fallen.

Wir hatten kürzlich an einer Reihe von Materialien in Ellipsoidform sowohl die Anfangssuszeptibilität als auch nach der neuen Joch-Isthmusmethode[1]) die $\varkappa$-Werte in der Nähe der Sättigung gemessen. Diese letzteren Zahlen sind soviel sicherer als die der früheren Isthmusmethoden, daß man hoffen konnte, mit ihrer Hilfe nunmehr auch das Problem des Annäherungsgesetzes zu fördern. Daß Ellipsoide sich auch zur Messung nach dieser Methode eignen, war schon vorher an Stäben, die nach der Beobachtung zum Ellipsoid abgedreht und dann wieder gemessen wurden, festgestellt worden. Das Dimensionsverhältnis der Ellipsoide war fast immer größer als 50.

Noch einige Worte über die Bestimmung des Sättigungswertes seien gesagt. Bisher geschah das in der Weise, daß man bei immer höheren Feldstärken den Wert $4\pi\mathfrak{J}$ maß und als Sättigungswert denjenigen ansprach, um den herum die Zahlen bei den höchsten Feldstärken schwankten. Nun bedeutet doch aber dies nicht, daß dann die Sättigung erreicht ist, sondern nur, daß jetzt die Unsicherheiten der Messung größer sind als eine weitere Zunahme von $4\pi\mathfrak{J}$. Den gesuchten Wert erhält man also richtiger, indem man im $\varkappa$-$\mathfrak{J}$-Blatt die Kurve um ein kleines Stück extrapoliert, bis sie die $\mathfrak{J}$-Achse schneidet; der so erhaltene Wert ist dann der der Sättigung, weil dort $\varkappa = 0$ oder $\mathfrak{H} = \infty$ ist.

Von den sieben verschiedenen Materialien wurden ein harter Stahl und zwei hochlegierte Eisenproben von diesen Betrachtungen ausgeschlossen, der erstere, weil die Meßgenauigkeit nicht befriedigend war, die letzteren trotz guter Bestätigung des Annäherungsgesetzes, weil der sonstige Kurvenverlauf bisher unerklärbare Eigentümlichkeiten zeigte.

Die vier verbleibenden Proben waren: weiches Eisen, weicher Stahl, Gußeisen und Heuslersche Legierung[2]).

---

[1]) Gumlich, Archiv für Elektrotechnik **2**, 461; 1914.

[2]) Wir verdanken diese in der Reichsanstalt vorschriftsmäßig gealterte Probe der Freundlichkeit des Herrn Dr. Heusler, Dillenburg. Die Zusammensetzung entspricht dem von Herrn Dr. Take, Marburg, bereits mehrfach untersuchten Material.

Digitized by Google

Tabelle 1.

Material	Bezeichnung	$4\pi\mathfrak{J}_\infty$	$4\pi\varkappa_0$
Weiches Eisen	AV 1h	21 480	290
Weicher Stahl	AV 6a	20 470	147
Gußeisen	V 37	16 690	47
Heuslersche Legierung . . .	V 156	2 780	20

Tabelle 2.

Weiches Eisen (Jochisthmusmessung).

$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
18 730	133,8	0,872	0,1538
19 410	96,1	0,904	0,1105
20 350	63,6	0,947	0,0731
21 110	42,2	0,983	0,0485
21 330	21,2	0,993	0,0244
21 340	12,44	0,993	0,0143
21 360	8,00	0,994	0,0092
21 360	4,65	0,995	0,0053

Tabelle 3.

Weiches Eisen (Magnetometermessung).

$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
18 190	170,5	0,847	0,1960
19 050	115,6	0,887	0,1329
20 010	77,0	0,932	0,0885
20 430	63,4	0,951	0,0729

Tabelle 4.

Weicher Stahl (Jochisthmusmessung).

$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
19 960	12,96	0,975	0,0294
20 160	8,28	0,985	0,0188
20 230	5,57	0,988	0,0127
20 290	4,44	0,991	0,0101
20 290	3,86	0,991	0,0088
20 280	3,15	0,991	0,0072
20 330	2,67	0,993	0,0061

Tabelle 5.

Gußeisen (Jochisthmusmessung).

$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
15 320	10,17	0,918	0,0721
15 850	6,52	0,950	0,0462
16 170	4,27	0,969	0,0303
16 280	3,60	0,975	0,0255
16 380	3,13	0,982	0,0222
16 380	2,56	0,982	0,0182
16 440	2,16	0,985	0,0153

Digitized by Google

Tabelle 6.
Heuslersche Legierung (Jochisthmusmessung).

$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
2670	2,60	0,959	0,0434
2690	1,74	0,969	0,0291
2710	1,075	0,976	0,0179
2750	0,752	0,988	0,0125
2760	0,615	0,993	0,0103
2770	0,525	0,997	0,0088
2760	0,430	0,993	0,0072

Die Figuren 12 bis 15 geben das Bild dieser Tabellen.

Da zeigt sich, daß beim Gußeisen (Fig. 14) unser Gesetz oberhalb $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}92$ so gut erfüllt ist, als nur irgend zu erwarten war. Auch bei der Heuslerschen Legierung (Fig. 15) liegen die Abweichungen noch innerhalb der Grenze der Meßgenauigkeit. Es sei hierbei besonders betont, daß die Kurve nicht in das System der einzelnen gemessenen

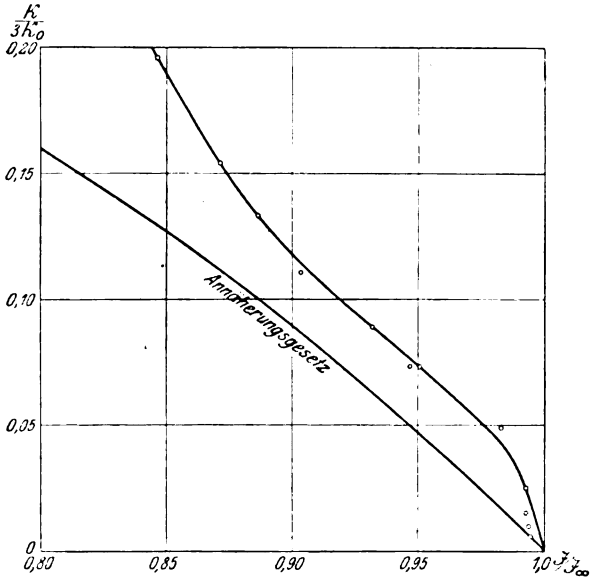


Fig. 12.

Punkte als wahrscheinlichster Verlauf hereingelegt ist, sondern umgekehrt die gemessenen Punkte neben die theoretisch gegebene Kurve eingezeichnet worden sind. Eine gewisse Willkür liegt nur in der Extrapolation auf den wahren Sättigungswert. Ein Fehler in dieser Beziehung kann aber höchstens eine kleine Verschiebung der Kurve, aber keine wesentliche Änderung der Kurvenneigung, auf die es hier besonders ankommt, bedingen.

Nicht so gut stimmt das Gesetz bei dem weichen Stahl (Fig. 13), und beim weichen Eisen (Fig. 12) sind ohne Zweifel erhebliche Abweichungen vorhanden. Wollte man diese so deuten, daß erst bei etwa $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}995$ ein Einmünden der gemessenen Werte in die theoretische Kurve erfolge, so müßte man annehmen, daß bis dahin, also z. B. noch bei 0,98 beträchtliche irreversible Prozesse möglich wären; das ist aber schon aus dem Grunde ausgeschlossen, weil in dieser Gegend zwischen auf- und absteigendem Ast nur ganz minimale Unterschiede bestehen können. Zudem ist es auffallend, daß im Gebiete von $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}89$ bis 0,98 die Neigung der Kurve identisch ist mit der der theoretischen. Das legt die Vermutung nahe, daß der Sättigungswert $4\pi\mathfrak{J}_\infty$ höher anzunehmen ist, und zwar zu etwa 22 180. [Natürlich ist hierunter nur der theoretische Sättigungswert,

Digitized by Google

nicht aber der praktisch erreichbare zu verstehen.] Wir würden dann die Tabellen 2a und 3a und die Kurve Fig. 12a bekommen.

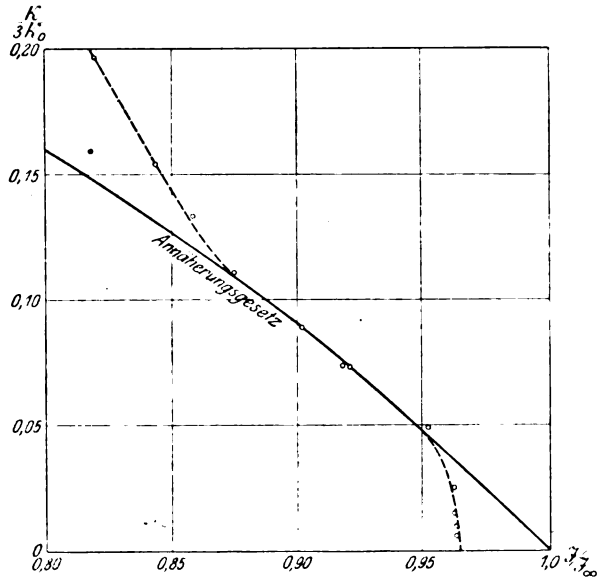


Fig. 12a.

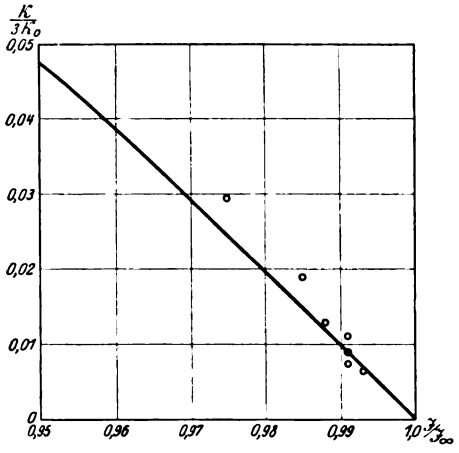


Fig. 13.

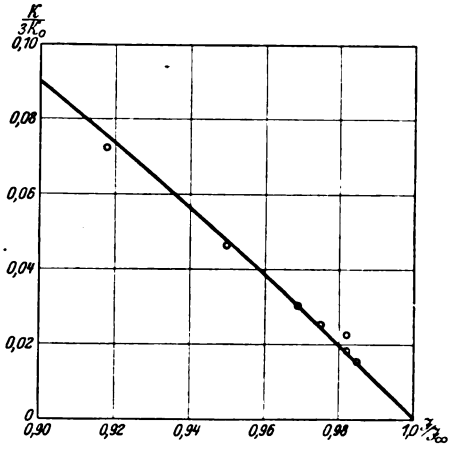


Fig. 14.

Das würde dann heißen: unterhalb $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty = 0{,}87$ sind noch in beträchtlichem Maße irreversible Prozesse vorhanden; zwischen 0,87 und 0,95 gilt das Annäherungsgesetz, und oberhalb 0,95 sind wieder Abweichungen vorhanden, und zwar in der Richtung, daß die Suszeptibilitäten kleiner sind als sie nach der Theorie sein müßten.

Tabelle 2a.
(Jochisthmusmessung).

$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
0,844	0,1538
0,875	0,1105
0,918	0,0731
0,952	0,0485
0,962	0,0244
0,962	0,0143
0,963	0,0092
0,963	0,0053

Tabelle 3a.
(Magnetometermessung)

$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\infty$	$\frac{\varkappa}{3\varkappa_0}$
0,820	0,1960
0,859	0,1329
0,902	0,0885
0,921	0,0729

Digitized by Google

Auf die Frage, welchen Grund diese Abweichungen haben, ob sie im Zusammenhang stehen mit dem „zu kleinen" Sättigungswert des Eisens bei sehr tiefen Temperaturen oder ob hier eine erste Andeutung für den Eisendiamagnetismus vorliegt, oder ob noch andere Gründe in Betracht kommen, soll hier noch nicht eingegangen werden, da es zweckmäßig erscheint, zunächst über das Annäherungsgesetz noch weitere Erfahrungen zu sammeln.

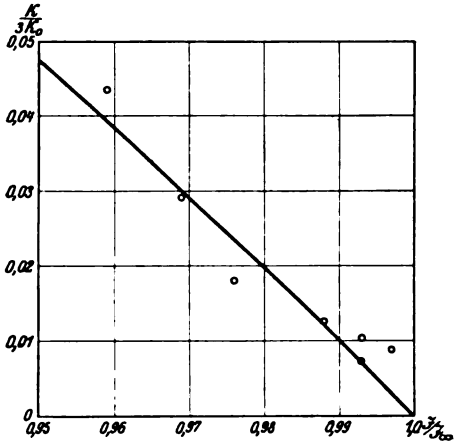


Fig. 15.

5. Zusammenfassung. Auf Grund der Überlegung, daß sowohl bei der Anfangssuszeptibilität als auch bei der Annäherung an die Sättigung lediglich reversible Prozesse als Beiträge zur Magnetisierung ins Gewicht fallen, läßt sich aus einer von Herrn Gans angegebenen Gleichung für die Abhängigkeit der reversiblen Suszeptibilität von der Intensität der Magnetisierung ein Annäherungsgesetz aufstellen. Dieses wurde an verschiedenen Materialien mit Hilfe der Joch-Isthmusmethode bei hohen Feldstärken bis zu etwa 7000 Gauß geprüft. Bei einigen Substanzen, wie z. B. bei Gußeisen, bestätigten die Messungen das Gesetz während bei anderen Materialien, u. a. beim weichen Eisen, bei den höchsten Feldstärken nicht unerhebliche Abweichungen auftraten.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 4. Heft. 1915.

Die Feldverteilung und Wirbelstrombildung in den Ankern von Dynamomaschinen bei Ummagnetisierung durch hochperiodige Wechsel- und Drehfelder.

Von

Dr.-Ing. **Ludwig Dreyfus**, Berlin-Niederschönhausen.

Inhalts-Übersicht.

Einleitung.
I. Transformatoren für hohe Periodenzahlen.
a) Die reduzierte Blechstärke.
b) Die Ergebnisse der Thomson'schen Theorie.
Die Verteilung der Induktion.
Die Wirbelstromverluste.
Die Verteilung der Wirbelströmung.
c) Umformung der Thomson'schen Theorie der Induktionsverteilung.
d) Erweiterung der Theorie: Die Feldverteilung im Luftspalt.
II. Das harmonische Wechselfeld in Dynamomaschinen.
a) Die Verteilung des außenerregten Ankerfeldes.
b) Die Verteilung des resultierenden Ankerfeldes.
c) Die Verteilung der Wirbelströmung.
d) Die Rückwirkung der Wirbelströmung auf den Luftspalt
e) Die Wirbelstromverluste.
III. Das harmonische Drehfeld in Dynamomaschinen.
IV. Praktische Beispiele.

Einleitung.

In einer sehr lesenswerten Arbeit über die „Energie der Wirbelströme" hat Dr. Rüdenberg[1]) die Feldverteilung und Wirbelstrombildung in lamellierten Ankern von Dynamomaschinen unter der Voraussetzung behandelt, daß die Rückwirkung der Wirbelströme auf das Hauptfeld vernachlässigbar klein sei. Die Grenzen, innerhalb deren diese Vernachlässigung statthaft ist, sind nicht angegeben. Jedenfalls liegen aber die gebräuchlichen 50-periodigen Wechselstrommaschinen innerhalb dieses Bereiches, und ebenso unsere schnellaufendsten Gleichstrommaschinen, die Turbogeneratoren bei denen die Frequenz der Ummagnetisierung kaum 60 Perioden übersteigt. Indessen lassen sich auch Beispiele von großer praktischer Bedeutung anführen, bei denen die Feldverzerrung durch die Wirbelströme eine wichtige Rolle spielt. Man denke nur an die Entwicklung der modernen Hochfrequenzgeneratoren, deren Tendenz, immer größere Leistungen mit immer höheren Periodenzahlen zu erzeugen, deutlich ersichtlich ist. Auch ist nicht zu vergessen, daß das Luftraumfeld der gewöhnlichen Gleich- und Wechselstrommaschinen nicht rein sinusförmig verteilt ist. Bekanntlich bewirkt sowohl die Polform als auch die Nutung stets das Auftreten höherer Feldharmonischen, deren Beitrag zur Gesamtsumme der Wirbelstromverluste zuweilen ziemlich erheblich ist.

Aus alledem ist zu ersehen, daß ein Bedürfnis nach zuverlässigen Formeln, die auch der feldschwächenden Wirkung der Wirbelströmung Rechnung tragen, garnicht so selten vorliegt. Und wenn es obendrein ein Autor verstehen sollte, diese Formeln ohne einen zu großen Aufwand von Rechnung herzuleiten, so darf er eines gewissen Interesses der Fachwelt

[1]) Sammlung elektrotechnischer Vorträge, herausgegeben von Prof. Dr. Voit, Stuttgart 1906: „Energie der Wirbelströme".

Digitized by Google

sicher sein. Ob mir dies in der vorliegenden Arbeit gelungen ist, muß ich freilich der Beurteilung meiner Leser überlassen.

Es ist hier nicht das erste Mal, daß man der Rückwirkung der Wirbelströmung gerecht zu werden versucht. Für die Pulsation eines Wechselfeldes gleichmäßiger Dichte in einem eisengeschlossenen Transformator wurde die Lösung schon vor mehreren Jahrzehnten von Thomson angegeben (J. J. Thomson, The Electrician, London 1892, XXVIII, S. 599). Von dort ist sie in verschiedene Lehrbücher der Elektrotechnik übergegangen (vgl. z. B. Arnold und La Cour, Wechselstromtechnik Bd. I, S. 406; Heinke, Handbuch der Elektrotechnik I 2. S. 496). Darauf folgte eine Reihe anderer Arbeiten, über welche die Literaturangaben in der oben zitierten Arbeit Rüdenbergs einigen Aufschluß gewähren. Ich erwähne jedoch nur die Arbeit von Thomson, weil sie die Grundlage unserer Rechnungen bilden wird.

Ob ich die Kenntnis dieser Arbeit einfach voraussetzen und auf ihr weiterbauen, oder ob ich die wichtigsten Ergebnisse noch einmal ableiten und so den Leser mit den analytischen Methoden vertraut machen sollte, war eine schwierige Frage. Im ersten Falle mußte ich fürchten einen größeren Leserkreis abzuschrecken, im zweiten Falle, einen kleineren Leserkreis zu langweilen. Als der beste Ausweg aus diesem Dilemma erschien es mir, die Resultate der Thomsonschen Arbeit möglichst vollständig zusammenzustellen, und durch verbindenden Text in das richtige Licht zu setzen, ohne sie jedoch analytisch zu begründen.

I. Transformatoren für hohe Periodenzahlen.

a) Die reduzierte Blechstärke. Wenn man die Wicklung eines Transformators oder einer Drosselspule mit Gleichstrom beschickt, so bildet sich im Eisen eine Kraftlinienströmung aus, die sich auf den größten Teil ihres Weges praktisch gleichmäßig über den Blechquerschnitt verteilt. Erregt man hingegen die Wicklung mit Wechselstrom von demselben Maximalwert, so wird das Maximum des Wechselflusses trotzdem nicht mit dem früheren Gleichstromwert übereinstimmen. Denn die Kraftlinienschwankung erzeugt in jedem Transformatorblech eine Wirbelströmung, deren magnetische Rückwirkung den Wechselfluß nach Größe, Phase und Verteilung beeinflußt, ganz abgesehen von der Verzögerung durch den Hystereseeffekt, auf den in dieser Arbeit nicht eingegangen wird.

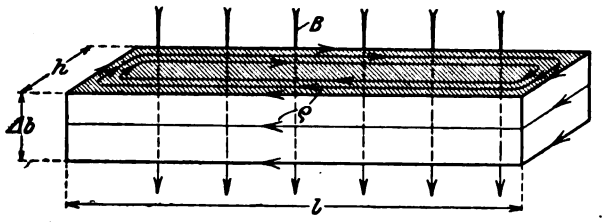


Fig. 1. Abschnitt eines Transformatorbleches.

Die Bahn der Wirbelströmung ist leicht anzugeben. Aus Symetriegründen verlaufen alle Stromfäden in Ebenen senkrecht zum Induktionsfluß, wie es das Blechelement der Fig. I illustriert. Da ferner die Länge l des Blechquerschnittes die Blechstärke h um ein Vielfaches übertrifft, so müssen sich die Stromfäden den Längsseiten bis in die Nähe der schmalen Randpartien anschmiegen, d. h. parallel zu den Seitenebenen der Bleche verlaufen. Erst hart an den Blechkanten setzt die Querströmung ein, welche die Wirbelströmung von der vorderen Blechhälfte auf die hintere hinüberleitet. Wenn wir aber diese schmalen Randzonen von unseren Betrachtungen ausschließen, so dürfen wir die Wirbelströmung ebenso wie die Induktionsströmung als eindimensional auffassen.

Ehe wir auf Details eingehen, können wir schon die Erscheinungen in großen Zügen voraussagen. Denn gegenüber einem Wechselfluß kann sich das Blech nicht anders verhalten, als ein Kurzschlußkreis der Primärwicklung eines Transformators gegenüber. Es ist daher anzunehmen, daß auch die Wirbelströmung den erregten Fluß zu unterdrücken und seine Phase gegenüber den primären Amperewindungen im Sinne einer Nacheilung

Digitized by Google

zu verschieben sucht. Da eine Kraftlinie in der Blechmitte mit allen Wirbelstromfäden verkettet ist, so wird hier die spezifische Induktion am kleinsten und die Phasenverschiebung gegen die erregenden Amperewindungen am größten ausfallen. Umgekehrt kann sich die entmagnetisierende Wirkung der Wirbelströme nicht auf die Randschichten erstrecken, da eine Kraftlinie der Randschicht überhaupt keinen Anteil der Wirbelströmung umschließt. Hier ist daher die Induktion allein durch die von außen aufgewendete magnetomotorische Kraft bestimmt und schwingt phasengleich mit dieser. Nach welchem Gesetz die Abnahme der Induktion und Phase vom Rande bis zur Mitte erfolgt, kann auf Grund derart elementarer Überlegungen natürlich nicht vorausgesagt werden.

Immerhin verhilft uns die Analogie mit dem Wechselstromtransformator dazu, die Bedeutung einer für alle Wirbelstromerscheinungen ungeheuer wichtigen Hilfsgröße richtig zu erkennen. Ich ziele auf die sogenannte „reduzierte Blechstärke",

$$\xi = \alpha h \qquad 1)$$

wobei der Reduktionsfaktor

$$\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\mu}{1000} \cdot \lambda} \qquad 2)$$

die Wertigkeit der Periodenzahl ν, der Eisenpermeabilitat μ und seiner elektrischen Leitfähigkeit $\lambda \left(\frac{1}{\text{Ohm}} \text{ pro m und qmm} \right)$ zum Ausdruck bringt. Welche Werte auch diese Faktoren im einzelnen Falle besitzen, immer liefern periodische Magnetisierungsvorgänge mit gleichen „reduzierten Blechbreiten" ähnliche Strömungsbilder.

Aus der Theorie des Transformators erinnern wir uns, daß dort das Verhältnis

$$\frac{\text{Selbstreaktanz}}{\text{Ohmscher Widerstand}} = \frac{\omega L}{r}$$

eine ganz ähnliche Rolle spielt. Denn — gleiche Streuungsverhältnisse vorausgesetzt — wirken auf den Primärkreis eines gegebenen Transformators alle Sekundärkreise in derselben Weise zurück, wenn sie nur in diesem Verhältnis übereinstimmen. Für den Kurzschlußkreis, welchen ein Blech dem Wechselfluß darbietet, ist dieser Quotient allerdings eine etwas verschwommene Größe. Denn hier hat man es nicht mit einem, sondern unendlich vielen Stromfäden zu tun, und man kann somit nicht gut von dem „Widerstand" und der „Selbstinduktion der Wirbelströmung" reden. Wenn man trotzdem die Analogie weiter verfolgen will, so muß man sich schon die Wirbelströmung in einem einzigen Faden konzentriert denken.

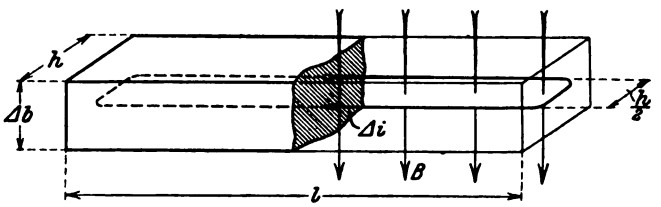


Fig. 2. Ersatzstromkreis.

In der Wahl dieser Stromlinie braucht man nicht ängstlich zu sein. Es handelt sich ja doch nur um qualitative Betrachtungen, aus denen keine quantitativen Schlüsse gezogen werden sollen. Wir nehmen den in Fig. 2 eingezeichneten mittleren Stromfaden an, dessen Abschnitte sich im Abstand $\frac{h}{2}$ parallel laufen. Der Widerstand der Stromschleife sei gleich dem Widerstande eines Eisendrahtes von gleicher Länge (2 l) und von dem halben Blechquerschnitt $\left(\Delta b \cdot \frac{h}{2} \right)$; also wenn man alle Maße in cm, die elektrische Leitfähigkeit in $\frac{1}{\text{Ohm}}$ pro m Länge und qmm Querschnitt ausdrückt

$$r = \frac{4l}{\Delta b \cdot h} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot 10^{-4}$$

Digitized by Google

Die entsprechende Induktivität berechnet sich zu

$$L = 0{,}4\pi\mu \cdot \frac{h \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{\Delta b} \cdot 10^{-8}$$

Somit liefert das gesuchte Verhältnis

$$\frac{\omega L}{r} = (\pi^2 \nu \mu \lambda 10^{-5})\, h^2 = \left(\frac{\xi}{2}\right)^2$$

und daraus folgt die wichtige Relation

$$\xi = 2\sqrt{\frac{\omega L}{r}} \qquad 3)$$

Was wir oben kurzerhand als „reduzierte Blechstärke" bezeichneten, ist also eine dimensionslose Größe und der Wurzel aus dem Verhältnisse eines induktiven und Ohmschen Widerstandes proportional.

Es ist wohl am besten, wenn man sich gleich an Hand einiger praktischer Beispiele die Grenzen klar macht, innerhalb deren sich diese charakteristische Größe bewegt, und zwar nicht nur bei Transformatoren, sondern auch bei Dynamomaschinen, für die ihre Bedeutung nicht geringer ist.

Erstes Beispiel: Legiertes Transformatorblech — 0,35 mm.

$h = 0{,}035 \quad \nu = 50 \sim \quad \mu = 1600 \quad \lambda = 1{,}6$

Hierfür wird

$$\alpha = 7{,}1$$

und

$$\xi = 0{,}25.$$

Normalerweise ist also ξ von gleicher Größenordnung — wenn auch meist etwas kleiner — wie die Blechstärke in mm, und darum erscheint mir die Bezeichnung „reduzierte Blechbreite" ganz glücklich gewählt.

Zweites Beispiel: Normales Ankerblech einer Synchronmaschine — 0,5 mm s. $h = 0{,}05 \quad \nu = 50 \sim \quad \mu = 1000 \quad \lambda = 4{,}0$

Hierfür wird

$$\alpha = 8{,}9$$

und

$$\xi = 0{,}45 \quad \text{(für die Grundwelle!)}.$$

Drittes Beispiel: Lamellierte Polschuhe einer 50-periodigen Synchronmaschine — 1 mm.

Dem Gleichfeld lagert sich in den Polschuhen ein Drehfeld über, dessen volle Wellenlänge der Zahnteilung des Stators gleichkommt. — 12 Zähne pro Polteilung.

$h = 0{,}1 \quad \nu = 24 \cdot 50 = 1200 \sim \quad \mu = 3000 \quad \lambda = 6{,}6.$

Sonach erhält man für die erste Harmonische der Zahnschwingung

$$\alpha = 97$$

und

$$\xi = 9{,}7.$$

Daß wir im vorliegendem Falle die Eisenpermeabilität so hoch einsetzten, hat seinen Grund in der üblichen geringen Sättigung der Polschuhe; in Fig. 3 habe ich die Magnetisierungskurve einer Polblechsorte wiedergegeben. Da die Amplitude der Zahnschwingung gegenüber dem Mittelwert der Gleichfeldinduktion $\overline{B}$ nicht sehr groß ausfällt, so ist hier die Eisenpermeabilität als das Verhältnis aus der Änderung der Induktion zur Änderung der Feldstärke zu definiert

$$\mu = \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta \frac{aw}{cm}}.$$

Digitized by Google

Für $\bar{B} = 8000$ liefert diese Gleichung den oben benutzten Wert. — Ähnlich liegen die Verhältnisse auch für die Gleichpoltype der Hochfrequenzgeneratoren, nur daß man dort mit viel höheren Sättigungen und demgemäß weit geringerer Permeabilität arbeitet.

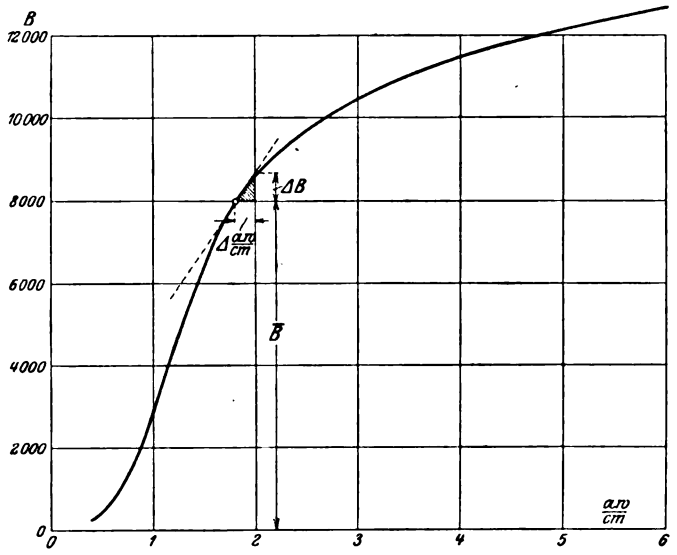


Fig. 3. Magnetisierungskurve eines Polbleches.

Viertes Beispiel: Hochfrequenzgeneratoren.

a) $\nu = 500$ Perioden — Legiertes Blech: 0,35 mm

$h = 0{,}035 \quad \mu = 300 \quad \lambda = 1{,}6.$

Hierfür wird

$a = 9{,}7$

und

$\xi = 0{,}34.$

b) $\nu = 10\,000$ Perioden — Legiertes Blech: 0,35 mm

$h = 0{,}035 \quad \mu = 300 \quad \lambda = 1{,}6.$

Hierfür wird

$\alpha = 43{,}5$

und

$\xi = 1{,}5$

c) $\nu = 30\,000$ Perioden — Legiertse Blech: 0,2 mm

$h = 0{,}02 \quad \mu = 300 \quad \lambda = 1{,}6$

$\alpha = 75$

und

$\xi = 1{,}5.$

Fünftes Beipsiel: Hochfrequenztransformator.

$\nu = 120\,000 \sim$ — Legiertes Blech: 0,1 mm

$h = 0{,}01 \quad \mu = 1000 \quad \lambda = 1{,}6$

$\alpha = 275$

$\xi = 2{,}75.$

Aus den angeführten Beispielen geht hervor, daß der praktisch wichtige Bereich der reduzierten Blechbreite selten höher als $\xi = \pi$ hinaufreicht; oder besser gesagt: daß die

Digitized by Google

Fortschritte der Walztechnik dem Elektroingenieur die Mittel an die Hand gegeben haben, innerhalb dieses Bereiches zu arbeiten. Daß er dies Gebiet nicht oft ohne Not veranlassen wird, das gewährleisten uns die Ergebnisse der Thomson'schen Theorie, über die ich nunmehr kurz berichten will.

b) Die Ergebnisse der Thomson'schen Theorie. Je größer die reduzierte Blechbreite ausfällt, um so mehr drängt sich die Feldströmung in den Randschichten zusammen und um so mehr bleibt die Phase der inneren Schichten gegenüber der Phase die Induktionsschwankung in den Randzonen zurück; dieses Grundgesetz der Feldverteilung haben wir schon aus der Analogie mit dem Transformator gefolgert. Die Aufgabe der analytischen Theorie ist es eine mathematische Funktion aufzustellen, welche diese Eigentümlichkeiten in Übereinstimmung mit den Maxwellschen Gleichungen zum Ausdruck bringt.

Dabei muß man allerdings eine Ungenauigkeit in Kauf nehmen: Es ist nämlich nicht gut möglich, die zeitliche und örtliche Variation der Permeabilität zu berücksichtigen: „örtlich", weil der Maximalwert der Induktion nach der Leitermitte hinabnimmt, was mit einem Anstieg der Permeabilität verbunden ist; „zeitlich", weil an jeder Stelle wieder die Permeabilität enzsprechend dem Momentanwert der Induktion schwankt. Man muß also in der Formel der reduzierten Blechstärke einen konstanten Mittelwert der Permeabilität einführen, am besten die „Wechselstrompermeabilität" der Randschichten. Läßt man sich aber diese Vernachlässigung gefallen, so muß man staunen, mit wie einfachen Mitteln die Theorie auskommt.

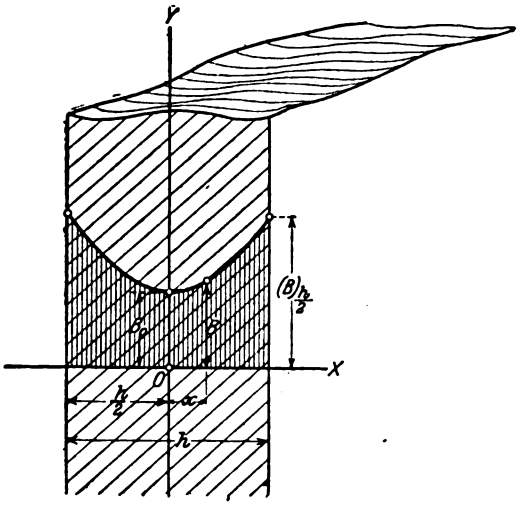


Fig. 4. Zur Induktionsverteilung im Transformatorblech.

Die Verteilung der Induktion. Das Gesetz der Induktionsverteilung über die Blechbreite h lautet unter Zugrundelegung des Koordinatensystemes der Fig. 4

$$B = \frac{\tilde{B}_0}{2}\left[e^{\alpha x}\sin(\omega t - \varphi_0 + \alpha x) + e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \varphi_0 - \alpha x)\right]^{1}). \quad 4)$$

Die Bedeutung der Konstanten B_0 und φ_0) ist unschwer zu erkennen, sobald man die Aussage der Gleichung für die Blechschnitte ($x = o$) nachprüft. Hierfür wird nämlich

$$B = \tilde{B}_0 \sin(\omega t - \varphi_0) \quad 5)$$

Mit andern Worten: $\tilde{B}_0$ ist der zeitliche Maximalwert der Induktion in der Blechmitte, und er ist hinter den magnetisierenden Amperewindungen um einen Winkel φ_0 verspätet, wenn für diese das Zeitgesetz

$$\frac{a\,w}{cm} = \frac{A\tilde{W}}{cm}\sin\omega t \quad 6)$$

---

[1]) Zeichenerklärung: Mit B bzw. ρ bezeichne ich Augenblickswerte,
„ $\tilde{B}$ „ $\tilde{\rho}$ „ „ zeitliche Maximalwerte,
„ $\hat{B}$ „ $\hat{\rho}$ „ „ örtliche Maximalwerte,
„ $\hat{\tilde{B}}$ „ $\hat{\tilde{\rho}}$ „ „ Maxima der Zeit und des Ortes.
Soll eine Wechselstromgröße als Zeitvektor gedeutet werden, so wird über dem Zeichen ein Punkt hinzugefügt:
$\dot{B}$, $\dot{\tilde{B}}$, $\dot{\hat{B}}$, $\dot{\hat{\tilde{B}}}$ bzw. $\dot{\rho}$, $\dot{\tilde{\rho}}$, $\dot{\hat{\rho}}$, $\dot{\hat{\tilde{\rho}}}$.

Digitized by Google

angenommen wird. Die Zahlenwerte beider Konstanten folgen aus der einen Grenzbedingung, die für die Randfasern eingehalten werden muß. Da das Gesamtvolumen der elektrischen Strömung über die ganze Blechbreite den Wert Null besitzt, so kann sich seine entmagnetisierende Wirkung nicht auf die äußersten Randfasern erstrecken. Hier — und nur hier — herrscht daher tatsächlich diejenige Induktion, welche wir bei Vernachlässigung der Wirbelstromrückwirkung über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt annehmen müßten, d. i.

$$(B)_{\pm \frac{h}{2}} = 0{,}4\,\pi\,\mu\,\frac{A\tilde{W}}{cm}\sin\omega t = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\sin\omega t. \qquad 7)$$

Führt man diese Bedingung in die Induktionsgleichung (4) ein, so folgt

$$\tilde{B}_0 = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}} \qquad 8)$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\,\mathfrak{Tg}\frac{\xi}{2}. \qquad 9)$$

Den Inhalt dieser Gleichungen veranschaulichen die Kurven der Figuren 5 und 6.

Bei konstanter Randinduktion nimmt die Induktion in der Leitermitte erst langsam und dann immer schneller ab, um sich bei großen Werten der reduzierten Blechbreite dem Nullwert asymptotisch anzunähern. Für kleine Werte von ξ, sagen wir: für $\xi \leq \frac{\pi}{2}$, kann man von den Reihenentwicklungen der $\mathfrak{Cof}$- bzw. cos-Funktion Gebrauch machen und sie hinter dem dritten Gliede abbrechen. Man erhält so

$$\tilde{B}_0 \doteqdot (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4\right]. \qquad 8a)$$

Für große Werte von ξ, etwa für $\xi \geq \pi$, kann man die trigonometrische Funktion gegen die hyperbolische streichen, und erhält

$$\tilde{B}_0 \doteqdot (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cof}\,\xi}} \doteqdot (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\cdot 2\,e^{-\frac{\xi}{2}}. \qquad 8b)$$

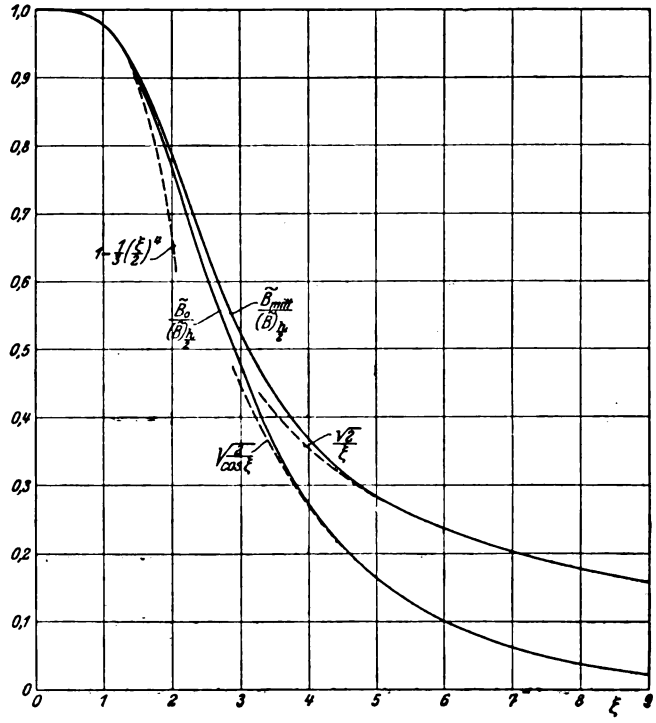


Fig. 5. Kurven zur Bestimmung der Induktion in der Blechmitte und des Mittelwertes der Induktion.

Ein besonders merkwürdiges Verhalten zeigt die Phasenverschiebung der Induktion in der Mittelfaser gegenüber den Randfasern: Im Mittel ist sie gleich der halben reduzierten Blechstärke, denn sie beträgt genau

für $\xi = \pi$: . . . . 90^0
„ $\xi = 2\pi$: . . . 180^0
allgemein „ $\xi = n\pi$: . . . n 90^0.

Digitized by Google

Jenseits der Grenze $\xi = \pi$ ist das Proportionalitätsgesetz auch in den Zwischenintervallen praktisch genau erfüllt. Nur zwischen den Leitwerken $\xi = 0$ bis $\xi = \pi$ weicht die Kurve nicht unbeträchtlich von der Interpolationsgeraden ab. Da reduzierte Blechstärken über $\xi = \pi$ nach unseren früheren Feststellungen zu den Seltenheiten gehören, so ist für gewöhnlich auch nicht damit zu rechnen, daß in der Blechmitte die Phasenverschiebung von 90° überschritten wird. — Jenseits $\xi = 2\pi$ interessiert übrigens die Phasenverschiebung kaum mehr, weil die Amplitude der Induktion bereits unter 10% der Randinduktion gesunken ist.

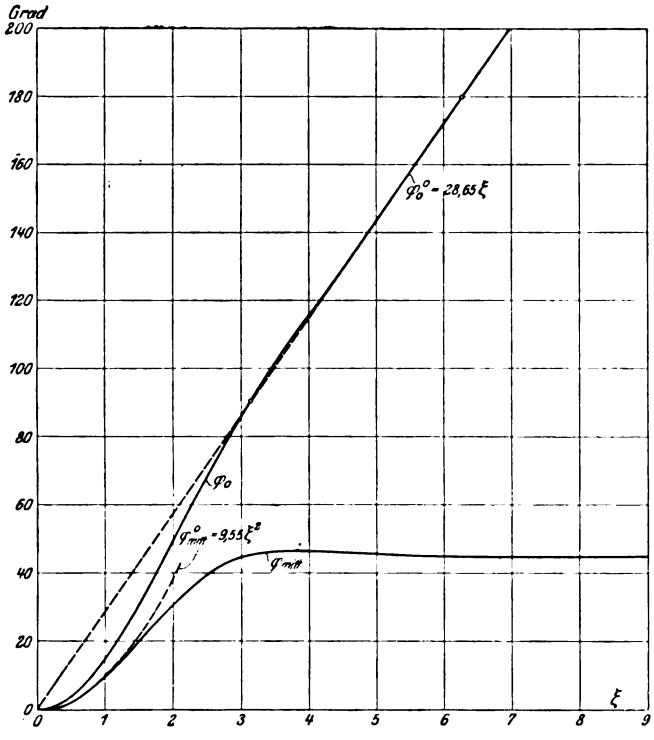


Fig. 6. Kurven zur Bestimmung der Phasenverschiebung des resultierenden Flusses und der Induktion in der Blechmitte.

Um uns das Pulsieren der Induktion in irgend einem Punkte zwischen Rand und Mitte vorzustellen, können wir uns eines sehr anschaulichen Bildes bedienen, auf das uns die besondere Fassung des Ansatzes (4) unmittelbar hinleitet. Betrachten wir zunächst den ersten Summanden: Die Funktion

$$\sin(\omega t - \varphi_0 + \alpha x)$$

charakterisiert eine Sinuslinie von der Wellenlänge $\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{cm}$, die von der in Fig. 7 rechtsgelegenen Randfaser aus mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\frac{cm}{sec}$ gegen das Leiterinnere vordringt. Die Phase des Induktionsvektors nimmt daher genau proportional der Entfernung vom Rande ab, und schon im Abstand $\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{cm}$ schwingen die Moleküle in Gegenphase zur Randinduktion. Gleichzeitig verringert sich die Größe der Induktionsschwankung sehr schnell, wie uns der Multiplikator

$$\frac{\tilde{B}_0}{2} e^{\alpha x} = \tilde{B}_0 \frac{e^{\frac{\xi}{2}}}{2} \cdot e^{-\alpha\left(\frac{h}{2} - x\right)}$$

anzeigt. Rechnen wir das Maximum der Randinduktion zu 100%, so beträgt die Amplitude nur noch

$$100\, e^{-\pi} = 4\%,$$

wenn wir um die halbe Wellenlänge, bzw.

$$100\, e^{-2\pi} = 0{,}2\%,$$

wenn wir um die volle Wellenlänge gegen die Blechmitte fortschreiten. Bei großen reduzierten Blechstärken dringt die Welle also praktisch gar nicht weit in das Leiterinnere ein, sondern die Rückwirkung der Wirbelströmung schafft dort eine fast feldfreie Zone.

Daß sich das genaue Spiegelbild dieses Vorganges auch auf der linken Leiterhälfte abrollt, folgt schon aus Symmetriegründen und wird durch den zweiten Summanden der

Digitized by Google

Gleichung (4) bestätigt. Es ist, als ob von beiden Seiten 2 magnetische Wellen auf die Seitenebenen des Bleches aufprallten und unter starken Absorptionserscheinungen gegen die Mitte vordrängen. Ob diese Vorstellung immer zweckmäßig ist, darüber läßt sich allerdings verschieden urteilen. Jedenfalls besitzt sie den Vorteil großer physikalischer Anschaulichkeit.

Dem Techniker sind diese mehr qualitativen Überlegungen weniger geläufig. Woran er aber nicht vorbeikommt, das ist das Fazit, die Bilanz des ganzen Vorganges wenigstens in Bausch und Bogen zu ziehen. Für ihn lautet die Fragestellung wie folgt:

Wenn ich pro cm Länge eine bestimmte Erreger-Amperewindungszahl aufwenden kann, die mir bei Verwendung von Gleichstrom oder Wechselstrom geringer Periodenzahl einen bestimmten Fluß mit der gleichmäßig verteilten Induktion $(B)_{\frac{h}{2}}$ durch den Blechquerschnitt treiben würde: wieviel Prozent dieses größtmöglichen Flusses erreiche ich dann bei schneller Wechselstrommagnetisierung, welche Phase besitzt dieser Fluß gegenüber dem Erregerstrom, und mit welchen Verlusten ist seine Erzeugung verbunden?

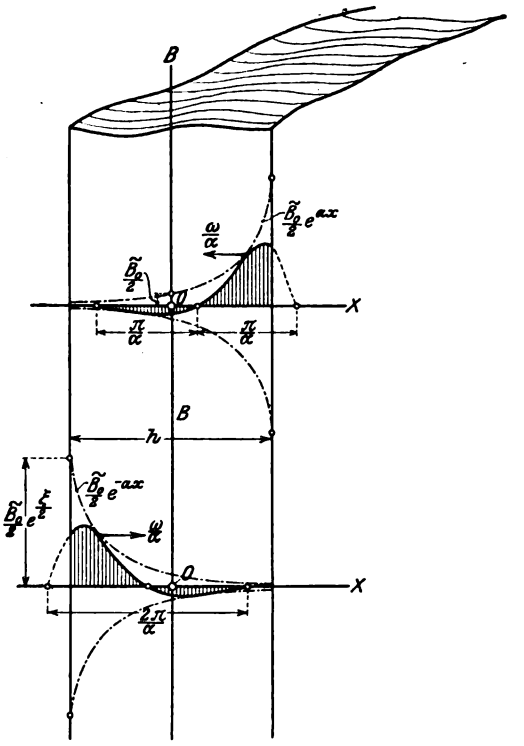


Fig. 7. Darstellung der Induktionsverteilung durch 2 magnetische Wellen.

Die Frage nach der resultierenden Kraftlinienzahl beantworten wir, indem wir den Mittelwert der Induktion über die ganze Blechbreite angeben. Hierfür findet man

$$\dot{\tilde{B}}_{mitt} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{\tilde{B}}\,dx = \frac{(\dot{\tilde{B}})_{\frac{h}{2}}}{\xi}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi} + j\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}\right]^{1}). \qquad 10)$$

In dieser Fassung erscheint der Vektor der mittleren spezifischen Induktion als die Summe zweier Komponenten, von denen die eine in Phase mit den erregenden Amperewindungen pulsiert, während die andere zeitlich um 90° nacheilt. Die Größe des Vektors ergibt sich als die Wurzel aus der Quadratsumme beider Komponenten zu

$$\tilde{B}_{mitt} = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\xi}\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}}. \qquad 11)$$

Seine Phase ist hinter der Randinduktion, d. h. den magnetisierenden Amperewindungen um einen Winkel

$$\varphi_{mitt} = \operatorname{arc\,tg}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi} \qquad 12)$$

verspätet. Beide Gleichungen werden durch die Kurven der Diagramme 5 und 6 interpretiert.

---

[1]) In dieser Schreibweise bezeichnet $j\,\dot{\tilde{B}}$ einen Vektor, der mit $\dot{\tilde{B}}$ seiner Größe nach übereinstimmt, ihm aber um 90 elektrische Grade nacheilt. Bekanntlich kann man dem Symbol „j" die Bedeutung $\sqrt{-1}$ beilegen und mit ihm genau so rechnen, wie mit imaginären bzw. komplexen Größen

Digitized by Google

Für kleine reduzierte Blechstärken führt die Reihenentwicklung der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen auf die Näherungsgleichungen

$$\tilde{B}_{mitt} = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4\right] \qquad 11a)$$

$$\text{bzw. } \varphi_{mitt} = \frac{\xi^2}{6} \qquad 12a)$$

und wie die Figuren zeigen, sind diese Formeln bis zu $\xi = \frac{\pi}{2}$ recht gut verwendbar. — Darauf folgt das für die Hochfrequenztechnik so wichtige Gebiet der mittleren reduzierten Blechbreiten, für das einfacheren Nährungsgleichungen nicht gut angegeben werden können. Den Schluß macht das Gebiet der großen reduzierten Blechstärken $\xi \geq \pi$, indem die Kurven wieder einen einfachen Verlauf zeigen. Hier nähert sich die Phasenverschiebung des resultierenden Flusses mehr und mehr dem Grenzwert 45^0, während die mittlere Induktion umgekehrt proportional der reduzierten Blechbreite abnimmt

$$\tilde{B}_{mitt} = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\xi} \qquad 11b)$$

Der Grund für diese einfache Gesetzmäßigkeit ist natürlich ebenso einfach wie das Gesetz selbst. Bei großen Werten von ξ kann eben die Blechmitte als feldfrei angesehen werden. Die magnetischen Wellen, die von beiden Seiten eindringen, stören sich gegenseitig fast gar nicht mehr und erzeugen an beiden Seitenebenen stets dieselbe Induktionsverteilung, gleichgültig, wie breit das Blech selbst sein mag. So kommt es, daß der resultierende Fluß praktisch unabhängig von der Blechstärke und seine mittlere Höhe ihr umgekehrt proportional wird.

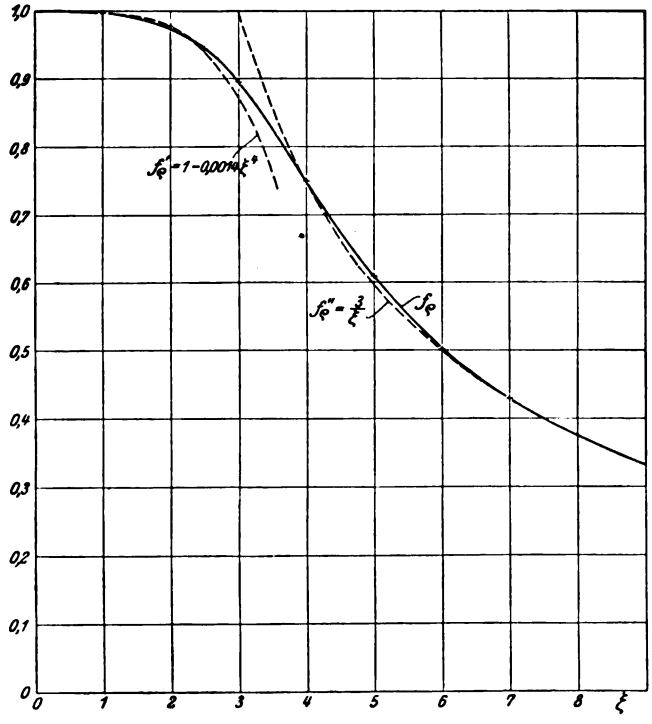


Fig. 8. Kurve des Rückwirkungsfaktors f_ρ.

Die Wirbelstromverluste. Das Auftreten einer Phasenverschiebung zwischen dem erregenden Strom und dem erregten Fluß ist stets ein untrügliches Zeichen dafür, daß sich der Magnetisierungsvorgang nicht verlustlos abwickelt. Denn die resultierende Kraftlinienzahl erzeugt im Erregerkreis eine Induktionsspannung, die eine dem Stromvektor entgegengesetzt gerichtete Komponente besitzt und zu ihrer Überwindung eine ebensogroße Wattkomponente der dem Erregerkreis aufgedrückten Klemmspannung erfordert. Auf Grund dieser einfachen Überlegung ist es möglich, die Wirbelstromverluste allein mit Hilfe der eben diskutierten Gesetze der mittleren Induktion abzuleiten, ohne auf die Verteilung der Wirbelströmung selbst einzugehen. Bezieht man diese Verluste auf die Volumeneinheit, so ergibt sich

$$\frac{W^{Watt}}{V^{cdm}} = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) \cdot f_\rho \cdot \left[\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{B}_{mitt}}{1000} \cdot h^{mm}\right]^2. \qquad 13)$$

Digitized by Google

wobei der Faktor

$$f_\rho = \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\xi} \qquad 14)$$

die magnetische Rückwirkung der Wirbelströme berücksichtigt. Ich bezeichne ihn daher als den „Rückwirkungsfaktor". Für das Produkt

$$\sigma_w = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) f_\rho \doteqdot \frac{\lambda}{6} \cdot f_\rho \qquad 15)$$

hat sich in der Praxis bereits der Ausdruck „Wirbelstromkoeffizient" eingebürgert.

Unter diesen Gleichungen ist das Hauptgewicht auf den Rückwirkungsfaktor zu legen. Denn die Erkenntnis, daß bei Vernachlässigung des Gegenfeldes der Wirbelströme die Wirbelstromverluste mit dem Quadrat der Induktion, der Periodenzahl und der Blechbreite wachsen, sitzt jedem Elektroingenieur in Fleisch und Blut. Warum es sich handelt, ist nur, um wieviel diese Verluste durch die Rückwirkung der Wirbelströmung verkleinert werden. — Hierüber erteilt uns die Kurve der Fig. 8 der besten Aufschluß: In dem Gebiete

$$\xi \leqq 3{,}5$$

läßt sie sich mit genügender Annäherung durch den Ansatz

$$f'_\rho = 1 - 0{,}0014\,\xi^4 \qquad 14a)$$

wiedergeben. Die Reduktion der Verluste ist also bis etwa $\xi = \pi$ unerheblich. Dann jedoch sinkt der Rückwirkungsfaktor sehr schnell und kann für

$$\xi \geqq 3{,}5$$

genau genug mit dem Betrage

$$f''_\rho = \frac{3}{\xi} \qquad 14b)$$

eingesetzt werden. Die Erklärung für diese einfache Gesetzmäßigkeit ist dieselbe, die wir oben im Anschluß an Gleichung (11b) gaben. Hat sich einmal die ganze Induktionsströmung auf die Randschichten zurückgezogen, so vergrößert eine Verbreiterung des Bleches nur die feldfreie Zone; sie vermag aber nicht, in den Randschichten die Verteilung der Induktion, der Wirbelströmung und der Wirbelstromverluste zu beeinflussen.

Die Verteilung der Wirbelströmung. Die Wirbelstromdichte ρ ist mit der spezifischen Induktion durch die elektromagnetische Grundgleichung

$$0{,}4\,\pi\,\mu \cdot \rho = -\frac{\partial B}{\partial x} \qquad 16)$$

verknüpft. Kombiniert man diesen Ansatz mit der Feldgleichung (4,) so erkennt man, daß die Lösung die Form besitzen muß

$$\rho = C\,[e^{\alpha x} \sin(\omega t - \varphi + \alpha x) - e^{\alpha x} \sin(\omega t - \varphi - \alpha x)]. \qquad 17)$$

Die Wirbelströmung besitzt also fast genau denselben Charakter wie die Feldverteilung; nur daß die beiden Sinuswellen, die vom Rande aus mit stark gedämpfter Amplitude in das Innere eindringen, entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen (vgl. Fig. 9). Die maximale Stromdichte tritt wie immer in den Randfasern auf. Ihre Amplitude folgt aus dem induzierten Fluß bzw. der mittleren Induktion zu

$$(\dot{\rho})_{\frac{h}{2}} = \omega \frac{\lambda}{10} \cdot j \frac{\dot{B}_{mitt}}{1000} \cdot \frac{h}{2} = (\dot{\rho}_0)_{\frac{h}{2}}\,\Phi(\xi). \qquad 18)$$

Dabei bezeichnet

$$(\dot{\rho}_0)_{\frac{h}{2}} = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{\lambda}{10}\left[j \frac{(\dot{B})_{\frac{h}{2}}}{1000} \cdot \frac{\nu}{100} h^{m/m}\right] \ldots . \frac{Amp.}{q^{m/m}} \qquad 19)$$

den Vektor der Stromdichte, die bei Vernachlässigung des Gegenfeldes der Wirbelströmung

Digitized by Google

in den Randfasern auftreten würde. Daß die wirkliche Stromdichte nach Größe und Phase von diesem Gesetz abweicht, berücksichtigen wir durch die Funktion

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\xi}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi} + j\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}\right]. \qquad 20)$$

Diese Größe besitzt Vektorcharakter, und als Vektordiagramm ist auch die Kurve der Fig. 10 zu deuten. Ich wählte hier absichtlich diese von dem bisherigen Gebrauch abweichende Darstellung, da es mir vorteilhaft erschien, daß sich der Leser auch mit

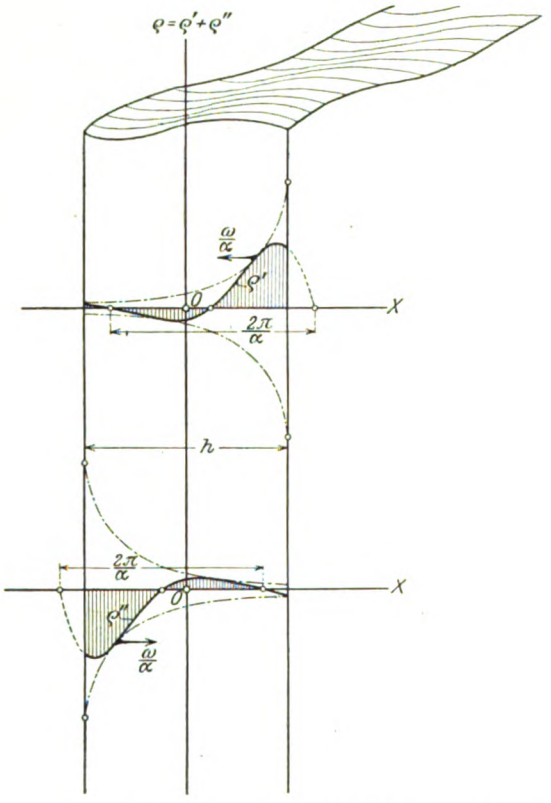


Fig. 9. Darstellung der Wirbelstromverteilung durch 2 Wellenzüge.

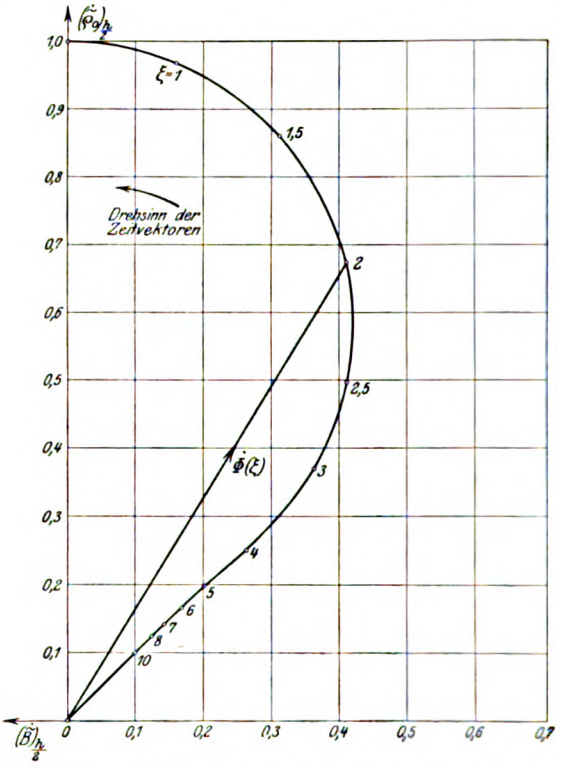


Fig. 10. Vektordiagramm zur Bestimmung der maximalen Stromdichte in den Randfasern.

dieser Art der Darstellung vertraut mache. Daß sich dabei ebenfalls die beiden Zonen $\xi \leqq \frac{\pi}{2}$ bzw. $\xi \geqq \pi$ deutlich abheben, wird dem aufmerksamen Beobachter wohl sogleich auffallen. Im ersten Bereiche weicht die Größe der Randströmung nur wenig von $(\tilde{\rho}_0)_{\frac{h}{2}}$ ab. In der letzten Zone eilt ihre Phase dem Magnetisierungsstrom um 135° nach, während ihre Größe mit ausreichender Genauigkeit zu

$$(\tilde{\rho})_{\frac{h}{2}} = (\rho_0)_{\frac{h}{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\xi} \qquad 20b)$$

angenommen werden darf.

c) **Umformung der Thomson'schen Theorie der Induktionsverteilung.** Als ich die Feldverteilung im Blechinnern in zwei magnetische Wellen auflöste, die von beiden Seiten mit stark abklingender Amplitude der Mitte zueilten, hob ich zwar die physikalische Anschaulichkeit dieses Bildes hervor, ohne jedoch einen leisen Zweifel an seiner unbedingten Zweckmäßigkeit zu unterdrücken. Was mir damals im Sinne lag, möchte ich hier etwas näher ausführen.

Digitized by Google

Ich halte dies Bild solange für zweckmäßig, als man sich das Resultat der Superposition der beiden Wellenzüge auch wirklich plastisch vorzustellen vermag. Das ist in der Tat der Fall, wenn sich die beiden Wellen nicht merklich überlappen, weil zuvor ihre Amplitude zu gering geworden ist, also bei großen reduzierten Blechstärken $\xi \geq 2\pi$. Dies ist aber gerade das Gebiet, das der Techniker mit gutem Grund möglichst vermeidet. Für die meisten praktisch wichtigen Fälle ist $\xi \leq \pi$, so daß sich über die ganze Blechbreite höchstens eine Halbwelle der magnetischen Wellenzüge ausbreitet. Von einer feldfreien Zone in der Blechmitte kann vollends auch nicht näherungsweise gesprochen werden, und wenn auch die angegebene Lösung nichtsdestoweniger vom mathematischen Standpunkt aus als die einfachste mögliche Formulierung angesehen werden mag, so bietet sie doch der Vorstellung nicht geringe Schwierigkeiten. Daher will es mir scheinen, als ob der Techniker zumeist dem im folgenden abgeleiteten Ansatz den Vorzug geben müßte.

Bei der neuen Lösungsform, auf die ich ziele, handelt es sich um nichts anderes, als um eine harmonische Analyse der durch Gleichung (4) ausgesprochenen Feldverteilung. Die volle Wellenlänge der Grundwelle muß dabei gleich der Blechstärke h angenommen und gerade und ungerade Harmonische berechnet werden. Da die Blech-Mittelebene eine Symmetriefläche der Feldverteilung bildet, so kommen nur cos-Glieder in Betracht. Die Amplituden der einzelnen Harmonischen beziehe ich nach Größe und Phase auf den Mittelwert der Induktion, für den die Gleichung

$$\tilde{B}_{mitt} = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\xi} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}} \qquad 11)$$

noch einmal in Erinnerung gebracht werden möge. Auf diese Weise erhält man allgemein für den Vektor der n-ten Harmonischen der Feldverteilung

$$\dot{\tilde{B}}_n = \pm 2\,\dot{\tilde{B}}_{mitt}\left[\frac{1}{1+4\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4} - j\,\frac{2\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^2}{1+4\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4}\right]\cos n\,\frac{2\pi}{h}x, \qquad 21)$$

wobei das + Zeichen den geraden, das — Zeichen den ungeraden Oberwellen zugeordnet ist.

Zunächst scheint allerdings nicht viel damit gewonnen, daß wir den geschlossenen Ausdruck 4 für die Induktionsverteilung durch eine unendliche Reihe ersetzt haben. Der Vorteil leuchtet aber sofort ein, so wie man die Aussage der letzten Gleichung für kleine Werte von ξ, sagen wir für

$$\xi = 0 \text{ bis } \xi = \frac{\pi}{2}$$

nachprüft Hierfür wird nämlich der Ausdruck $4\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4$ stets sehr groß gegenüber der Einheit (er beträgt schon für die erste Harmonische mindestens 64), und man kann daher für die resultierende Feldverteilung mit sehr guter Annäherung setzen

$$\dot{\tilde{B}} = \dot{\tilde{B}}_{mitt} \pm \dot{\tilde{B}}_{mitt} \sum_{1,2,..}^{\infty} \frac{\cos n\,\frac{2\pi}{h}x}{2\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4} \mp j\,\dot{\tilde{B}}_{mitt} \sum_{1,2,..}^{\infty} \frac{\cos n\,\frac{2\pi}{h}x}{\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^2}. \qquad 21a)$$

Die durch die erste Fouriersche Reihe ausgedrückte Feldverteilung, die phasengleich mit dem Mittelwert der Induktion pulsiert, ist in den angegebenen Grenzen vollständig zu vernachlässigen. Denn die Reihe ist außerordentlich stark konvergent, und schon die Amplitude der Grundwelle steigt nicht über 3% der mittleren Induktion. Die Rückwirkung der Wirbelströmung charakterisiert also die zweite Reihe. Diese ist zeitlich um 90° hinter der Schwankung der mittleren Induktion verspätet und stellt einen ge-

Digitized by Google

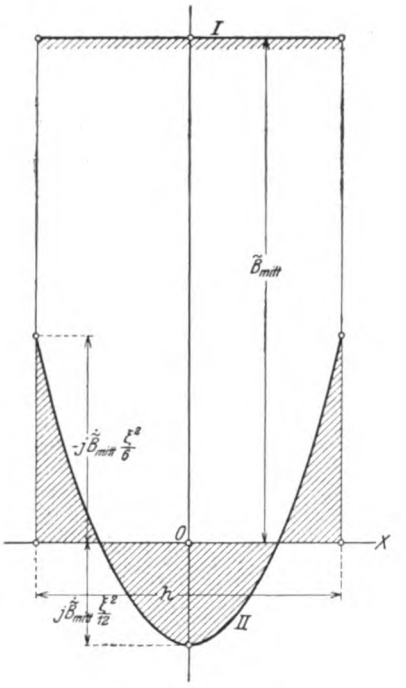


Fig. 11. $\xi = \frac{\pi}{2}$.

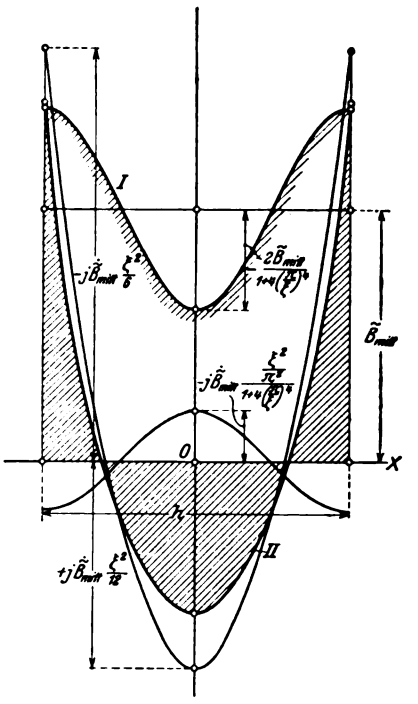


Fig. 12. $\xi = \pi$.

Fig. 11, 12, 13. Darstellung der Induktionsverteilung für verschiedene reduzierte Blechstärken.
Kurve I in Phase zu $\dot{\tilde{B}}_{mitt}$.
Kurve II in Quadratur zu $\dot{\tilde{B}}_{mitt}$.

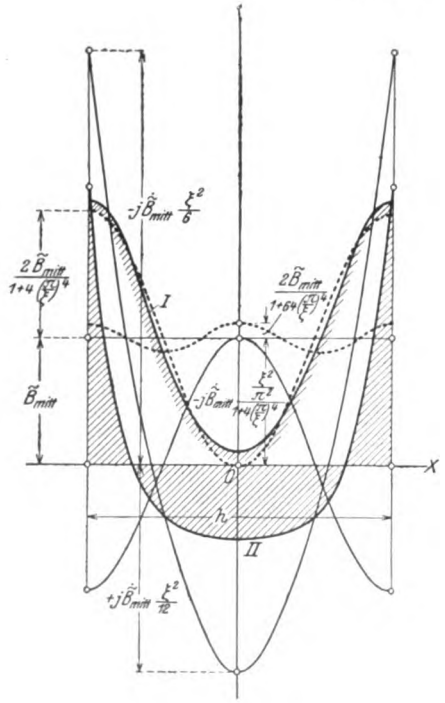


Fig. 13. $\xi = \pi\sqrt{2}$.

wöhnlichen Parallelbogen dar, der, wie in Fig. 11 angedeutet, gegen den Blechquerschnitt orientiert ist. Er entspringt in der Blechmitte mit der Ordinate

$$+ j\,\dot{\tilde{B}}_{mitt} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2$$

und erreicht in den Randfasern die Höhe

$$- j\,\dot{\tilde{B}}_{mitt} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2.$$

In richtiger Phase der gleichmäßig verteilten Induktion $\dot{\tilde{B}}_{mitt}$ übergelagert, beschreibt er in außerordentlich einfacher Weise die resultierende Feldverteilung. — Man kann hieraus mit Hilfe der elektromagnetischen Grundgleichung (16) auch das Gesetz der Wirbelströmung ableiten; dann erhält man als Charakteristik eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt, die in der rechtsgelegenen Randschicht die Ordinate $(\rho_0)_{\frac{h}{2}}$ — vgl. (19) — erklimmt. Es ist dasselbe Gesetz, das man erhalten würde, wenn man die Wirbelströmung von vornherein ohne Berücksichtigung ihrer Induktivität berechnet.

Digitized by Google

Bei der Einfachheit und Übersichtlichkeit dieser Darstellung wird man sich von ihr auch bei größeren Blechbreiten nicht gerne trennen. In der Tat läßt sich ihr Anwendungsbereich bis etwa $\xi = \pi\sqrt{2} = 4{,}5$ zwanglos erweitern. Es ist hierfür in dem Bereiche

$$\xi = \frac{\pi}{2} \text{ bis } \xi = \pi$$

nur nötig, der oben beschriebenen Feldverteilung noch eine erste Harmonische

$$\dot{\mathfrak{B}}_{1z} = -\dot{\mathfrak{B}}_{mitt} \frac{1}{1 + 4\left(\frac{\pi}{\xi}\right)^4} \left(2 + j\,\frac{\xi^2}{\pi^2}\right) \cos\frac{2\pi}{h}\,x \qquad 21\,b)$$

hinzuzufügen. Hierdurch wird die Ausbauchung der Parabel etwas breiter (Fig. 12), und auch der in Phase mit der mittleren Induktion schwingende Feldanteil beginnt gegen die Blechmitte eine Abnahme der spezifischen Induktion zu zeigen. — Diese wächst in dem Intervall

$$\xi = \pi \text{ bis } \xi = \pi\sqrt{2}$$

sehr schnell an und weicht dabei ein wenig von der Sinusform ab, was man, wenn man sehr genau sein will, durch Überlagerung einer zweiten Harmonischen

$$\dot{\mathfrak{B}}_{2z} = \dot{\mathfrak{B}}_{mitt} \frac{2}{1 + 64\left(\frac{\pi}{\xi}\right)^4} \cdot \cos 2\,\frac{2\pi}{h}\,x \qquad 21\,c)$$

berücksichtigen kann (Fig. 13).

So beherrscht die in diesem Absatz vorgetragene Methode gerade das praktisch so wichtige Gebiet, für das die klassische Fassung weniger geeignet ist. Ihre eigentliche Domäne liegt jenseits dieser Grenze, wo sich auch die meisten mitgeteilten Formeln ganz wesentlich vereinfachen.

d) Erweiterung der Theorie: Die Feldverteilung im Luftspalt. Nachdem wir die klassische Formulierung der Induktionsverteilung für unsere Zwecke etwas umgeformt haben, können wir die gewonnenen Ergebnisse noch zu einer Erweiterung der Theorie heranziehen. Ich habe eingangs hervorgehoben, daß die Resultate der Wirbelstromtheorie des Transformators die notwendige Grundlage für die Untersuchung ähnlicher Vorgänge in Dynamoankern bilden. Nun besitzen alle Dynamomaschinen einen Luftspalt, der mindestens der Blechbreite gleichkommt, sie gewöhnlich aber um ein Vielfaches übertrifft. Es wird daher das Verständnis der Vorgänge bei Dynamomaschinen wesentlich erleichtern, wenn ich zuvor auch beim Transformator die Rückwirkung eines Luftspaltes auf die Induktionsströmung aufkläre. Wenn ich dabei etwas länger verweile, als es für den angegebenen Zweck unbedingt erforderlich erscheint, so bitte ich dies zu entschuldigen. Das Problem kehrt in der Elektrotechnik auch in anderem Zusammenhange wieder, und es wird vielleicht manchem wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur nicht unerwünscht sein, wenigstens die Endformeln der Theorie in die Hand zu bekommen.

In Fig. 14 habe ich nach Gefühl eine Induktionsströmung skizziert, wie sie etwa zu erwarten wäre, wenn man den eisengeschlossenen magnetischen Kreis eines Transformators irgendwo, im Schenkel oder im Joch, durch einen Luftspalt $2\,\delta$ unterbräche. Schon die einfachste Überlegung sagt uns, daß die Induktionsströmung im Luftspalt keinesfalls so ungleichmäßig verteilt sein kann, wie sie nach den Untersuchungen der früheren Abschnitte im Blechinnern anzunehmen ist. Denn es fehlt im Luftspalt die Wirbelströmung, die allein jene Feldverteilung aufrecht erhalten könnte. Daher müssen schon innerhalb des Bleches, in einigem Abstand vom Luftspalt, die am Rande zusammengedrängten Induktionslinien der Blechmitte zustreben, und in ähnlicher Weise muß sich die Tendenz, die Feldverteilungskurve zu ebnen, auch im Luftspalt geltend machen. Oder in die

Digitized by Google

Sprache des Mathematikers übersetzt: Die der mittleren Induktion übergelagerten Feldharmonischen fallen bereits an der Grenze zwischen Luft und Eisen viel kleiner aus, als wir sie für das Blechinnere früher berechnet haben, und sie nehmen von der Blechkante $y = 0$ bis zur Niveauebene $y = -\delta$, die den Luftspalt halbiert, noch weiterhin ab.

In welcher Größe sie überhaupt aus dem Eisen in die Luft übertreten, hängt in erster Linie von der Permeabilität des Eisens ab. Denn nehmen wir einmal an, die Permeabilität der Luft sei gegenüber der des Eisens unendlich gering. Dann könnten bekanntlich die Induktionslinien aus dem Blech nur senkrecht zur Kante $y = 0$ in den Luftspalt übertreten. Die Blechkante wäre also eine Niveaulinie, der im Abstand $y = -\delta$ eine zweite parallele Niveaulinie gegenüberläge. Nimmt man noch hinzu, daß wegen der benachbarten Bleche die Kraftlinien in den äußersten

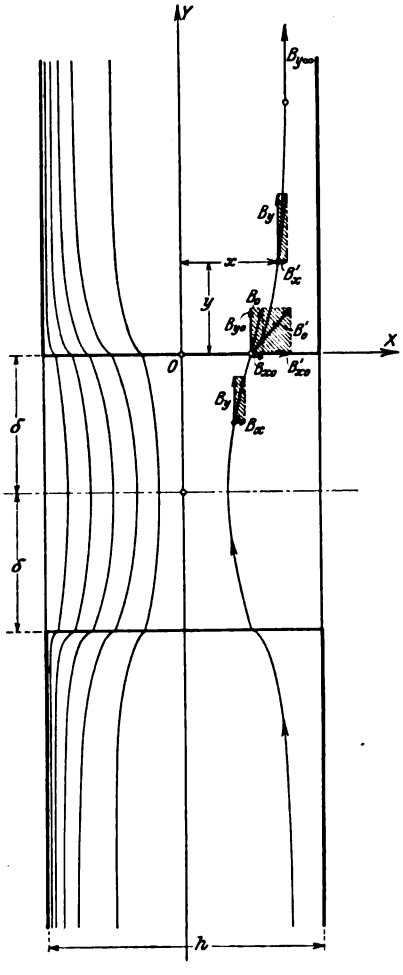


Fig. 14. Einzelblech eines Transformators mit Luftspalt.

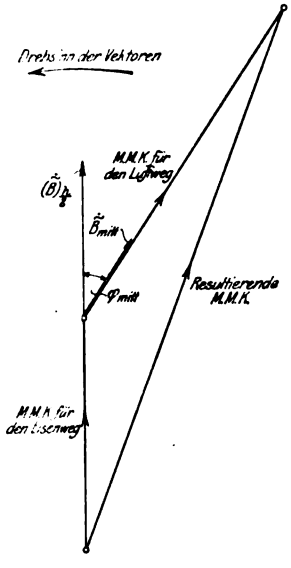


Fig. 15. Vektordiagramm der magnetomotorischen Kräfte.

Randfasern $x = \pm \frac{h}{2}$ den Luftspalt senkrecht überbrücken müssen, so erkennt man, daß zwischen den beiden Niveauflächen überhaupt nur ein homogenes Feld übertreten kann.

Die Dichte dieses Feldes stimmt natürlich nach Größe und Phase mit der mittleren Dichte $\dot{B}_{mitt}$ im Blechinnern überein. Daraus folgt die bemerkenswerte Tatsache, daß die für den Luftweg aufzuwendende M. M. K. phasengleich und proportional der mittleren Induktion ist, während sich die für den Eisenweg verbrauchte M. M. K. ausschließlich nach der Größe und Phase der Randinduktion und der dort herrschenden Permeabilität richtet. Die Phasenverschiebung zwischen beiden beträgt bei $\xi = 1$ etwa 10^0, bei $\xi = 2$ bereits 30^0 und für $\xi \geq 3$ etwa 45^0; sie wird also schon ziemlich bald so groß, daß sich ihre Berücksichtigung lohnt (Fig. 15) Auf jeden Fall muß man stets im Auge behalten, daß bei hochfrequenten Flüssen die Aufteilung der magnetomotorischen Kraft über Luftspalt und Eisen ganz wesentlich durch die Höhe der Periodenzahl mitbestimmt wird. Insbesondere kann die Verdrängung des Feldes gegen die Randfasern daselbst die Permea-

Digitized by Google

bilität so herabmindern, daß das Potentialgefälle im Luftspalt gegenüber der für den Eisenweg aufzuwendenden M. M. K. ganz in den Hintergrund tritt.

Wenn man die Permeabilität des Eisens gegenüber der der Luft nicht als „außerordentlich groß" betrachten kann, so ergeben sich ziemlich komplizierte Verhältnisse. Was man unter der Bezeichnung „außerordentlich groß" zu verstehen hat, kann ich erst später erläutern. Doch will ich vorgreifend bemerken, daß sich dem Grenzfalle $\mu = \infty$ die meisten für unser eigentliches Thema in Betracht kommenden praktischen Beispiele sehr annähern. Wen daher die im folgenden mitgeteilte exakte Theorie nicht interessiert, möge sie getrost überschlagen. Er wird trotzdem den Ausführungen der nächsten Abschnitte leicht folgen können. Im Grunde trachten wir ja nur danach, für eine bereits in großen Zügen erkannte und beschriebene Gesetzmäßigkeit eine passende analytische Formulierung zu finden. Oder um mit Gauß zu reden: Wir kennen schon das Resultat und suchen nur noch den Weg, der uns zu ihm hinführen soll.

Zweckmäßig betrachtet man die Harmonischen, in die wir den Induktionsfluß im Blechinnern zerlegt haben, ganz unabhängig voneinander. Dann liegt der Fall so: Wir wissen, daß für große Werte von y, oder sagen wir streng für $y = \infty$, die Induktion eine n^{te} Harmonische in Richtung der y-Achse

$$\dot{\mathfrak{B}}_{y\infty} = \hat{\mathfrak{B}}_{y\infty} \cos n \frac{2\pi}{h} x \text{ [1)]}$$

besitzt. Den unterscheidenden Index n lassen wir jetzt fort. Größe und Phase der Harmonischen können nach Gleichung (21) berechnet werden.

Wir wissen weiter, daß diese Welle an der Grenze zwischen Luft und Eisen mit stark verringerter Amplitude $\hat{\mathfrak{B}}_{y0}$, vielleicht auch mit veränderter Phase, ankommt. Wir setzen daher die y-Komponente der Eiseninduktion an irgendeiner Stelle gleich der geometrischen Summe aus dem berechneten Grundvektor $\dot{\mathfrak{B}}_{y\infty}$ und einer zusätzlichen Feldwelle

$$\dot{\mathfrak{B}}'_y = \hat{\mathfrak{B}}'_y \cos n \frac{2\pi}{h} x .$$

die mit wachsenden Werten von y stark abnimmt und sehr bald gegenüber $\dot{\mathfrak{B}}_{y\infty}$ vernachlässigt werden kann. Ich brauche wohl kaum zu betonen, daß der Maximalwert $\hat{\mathfrak{B}}'_y$ ausschließlich eine Funktion von y darstellt.

Würden wir das Verhalten der Y-Komponente kennen, so wäre es ein leichtes, die vollständige Induktionsverteilung anzugeben. Da die Kraftlinienströmung einer inkompressiblen Flüssigkeit vergleichbar ist, so muß notwendigerweise das Abnehmen der Induktion in der einen Richtung ein Anwachsen in der anderen Richtung zur Folge haben oder in Form einer bekannten Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{B}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}'_y}{\partial y} = 0. \qquad 22)$$

Aus dieser sogenannten „Kontinuitätsgleichung" folgt im vorliegenden Falle

$$\dot{\mathfrak{B}}'_x = -\int \frac{\partial \dot{\mathfrak{B}}'_y}{\partial y} \partial x = -\frac{\partial \hat{\mathfrak{B}}'_y}{\partial y} \int \cos n \frac{2\pi}{h} x \, \partial x$$

$$= -\frac{1}{n \frac{2\pi}{h}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathfrak{B}}'_y}{\partial y} \sin n \frac{2\pi}{h} x. \qquad 23)$$

[1)] Hinsichtlich der Zeichen vergleiche Anmerkung auf Seite 118.

Digitized by Google

Auch die Querkomponente $\dot{\bar{B}}'_x$ der Induktion ist also sinusförmig verteilt. Daß sie in den Seitenebenen und der Mittelebene der Bleche verschwinde, erfordern schon die Grenz- und Symmetriebedingungen. Darüber ist also kein Wort zu verlieren. Bemerkenswert ist aber, daß sie gerade dort ihr Maximum erreicht, wo die Längskomponente $\dot{\bar{B}}'_y$ verschwindet. Denn dadurch werden — im Abstand $\frac{h}{4}$ von der Mittelebene — zwei parallele Ebenen bestimmt, die von der zusätzlichen Induktionsstörung $\dot{\bar{B}}'$ allerorten senkrecht durchsetzt werden, also unter ganz ähnlichen Bedingungen stehen, wie sie die Thomsonsche Theorie voraussetzte. Es ist darum mehr als bloß wahrscheinlich, daß auch in unserem Falle die Querinduktion $\dot{\bar{B}}'_y$ ähnlichen Gesetzen wie den dort ermittelten gehorcht. Damals rechneten wir mit zwei kongruenten magnetischen Wellenzügen, die vom Rande aus mit stark abklingender Amplitude in den Blechkörper eindrangen. Jetzt, wo wir in Verfolgung der Analogie die Blechbreite in der Y-Achse messen, also unendlich groß annehmen müssen, verschwindet die Rückwirkung des einen Wellenzuges vollkommen, und wir erhalten einfach

$$\dot{\bar{B}}'_x = \dot{\bar{B}}_{y\infty} \cdot c\, e^{-\gamma y} (\cos(\varepsilon y + \varphi) + j \sin(\varepsilon y + \varphi)), \qquad 24$$

oder mit Worten: In den Ebenen

$$x = \pm \frac{h}{4}$$

gleicht die Verteilung der Querinduktion einer Sinuswelle von der Länge $\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{cm}$, die sich in der Y-Richtung mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{cm}{sec}$ fortpflanzt. Hart am Luftspalt beträgt die Amplitude der Pulsation

$$\dot{\bar{B}}'_{x0} = \dot{\bar{B}}_{y\infty} \cdot c$$

und ihre Phase eilt dem Vektor $\dot{\bar{B}}_{y\infty}$ um einen uns unbekannten Winkel φ nach. Diese Phasennacheilung wächst proportional dem von der Welle zurückgelegten Wege (ε y!), während gleichzeitig die Wellenhöhe nach dem Exponentialgesetz $e^{-\gamma y}$ erlischt. Der einzige Unterschied gegen die Thomsonsche Theorie liegt darin, daß die Faktoren γ und ε im allgemeinen von verschiedener Größe sind, weil es sich nicht mehr um eine eindimensionale, sondern um eine zweidimensionale Strömung handelt.

Es läßt sich auch leicht berechnen, welche Werte diesen beiden Unbekannten zukommen: Bekanntlich gelten für jedes zweidimensionale Wirbelstromproblem 2 Komponentengleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0{,}4\pi\mu\lambda\, 10^{-4} \frac{\partial B}{\partial t}. \qquad 25)$$

Wenden wir dieses Differentialgesetz, welches die Aussagen der elektromagnetischen Grundgleichung und des Induktionsgesetzes vereinigt, auf die Querkomponente B'_x an, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \dot{\bar{B}}'_x}{\partial x^2} = -\dot{\bar{B}}_{y\infty} c\, e^{-\gamma y} (\cos(\varepsilon y + \varphi) + j \sin(\varepsilon y + \varphi)) \cdot \left(n \frac{2\pi}{h}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\bar{B}}'_x}{\partial y^2} = \dot{\bar{B}}_{y\infty} c e^{-\gamma y} (\cos(\varepsilon y + \varphi) + j \sin(\varepsilon y + \varphi)) \cdot (\gamma^2 - \varepsilon^2)$$

$$+ \dot{\bar{B}}_{y\infty} c e^{-\gamma y} (\sin(\varepsilon y + \varphi) - j \cos(\varepsilon y + \varphi)) \cdot 2\gamma\delta$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{B}}'_x}{\partial t} = \dot{\bar{B}}_{y\infty} c e^{-\gamma y} (\sin(\varepsilon y + \varphi) - j \cos(\varepsilon y + \varphi)) \cdot 2\alpha^2. \qquad 25)$$

Digitized by Google

Der Ansatz 24 erfüllt also die Grundgleichung (25), wenn zwischen den Koeffizienten γ und ε die folgenden beiden Bedingungen eingehalten werden

und
$$\left.\begin{aligned}\gamma^2 - \varepsilon^2 &= \left(n\frac{2\pi}{h}\right)^2 \\ \gamma\varepsilon &= \alpha^2\end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

Daraus folgt

$$\gamma = \alpha\cdot\sqrt{2}\, n\frac{\pi}{\xi}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4}}+1} \doteqdot n\frac{2\pi}{h}\left[1+\frac{0{,}5}{\left(2n\frac{\pi}{\xi}\right)^4}\right] \qquad 27)$$

$$\varepsilon = \alpha\cdot\sqrt{2}\, n\frac{\pi}{\xi}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4\left(n\frac{\pi}{\xi}\right)^4}}-1} \doteqdot n\frac{2\pi}{h}\cdot\frac{1}{\left(2n\frac{\pi}{\xi}\right)^2}. \qquad 28)$$

Diese einfachen Untersuchungen haben uns zweierlei gelehrt: Sie bestätigen uns nicht nur die Richtigkeit des seinerzeit auf einem Analogieschluß aufgebauten Ansatzes 25 sondern sie übermitteln uns auch die Gesetze, welche die dabei noch unbestimmt gelassenen Koeffizienten γ und ε befolgen müssen. Durch die Kurven der Fig. 16 werden diese auch noch graphisch interpretiert. Es geht aus dieser Darstellung namentlich hervor, daß sich der Gültigkeitsbereich der beigefügten Näherungsgleichungen (27) und (28) über das ganze praktisch wichtige Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = \pi\sqrt{2}$ erstreckt.

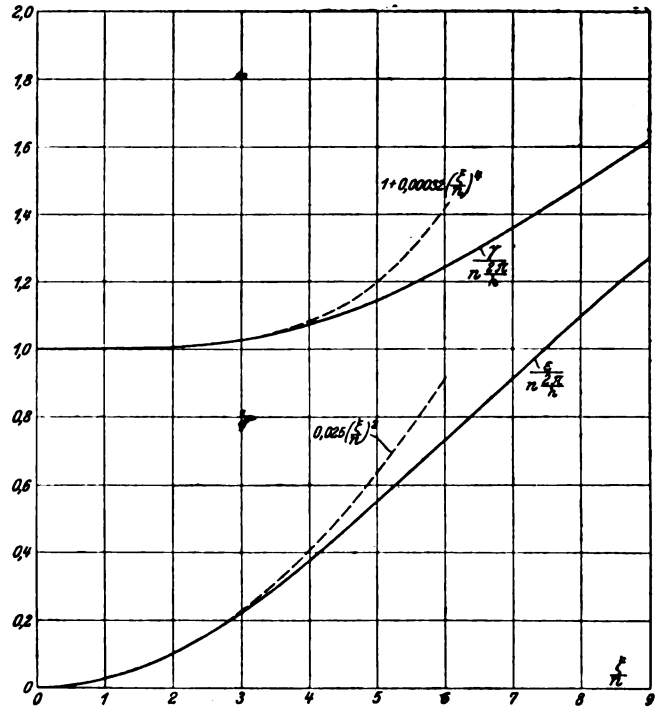


Fig. 16. Kurven zur Bestimmung des Koeffizienten γ und ε.

Interessant ist das Verhalten des Dämpfungsexponenten: Er weicht in den obengenannten Grenzen nur wenig von seinem Anfangswerte

$$(\gamma)_{\xi=0} = n\frac{2\pi}{h} \qquad 27\,a)$$

ab. Schreitet man also vom Luftspalt auch nur um eine halbe Blechbreite gegen das Blechinnere vor, so sinkt bereits der Scheitelwert der ersten Harmonischen ($n = 1$) auf 4%, gar nicht zu reden von den höheren Harmonischen, die noch viel schneller abnehmen. Offenbar beschränkt sich die ganze Ausgleichsströmung (B'_x bzw. B'_y auf die dem Luftspalt unmittelbar benachbarten Zonen; erst dort weichen die Induktionslinien merklich in ihrem geradlinigen Verlaufe ab, um der Blechmitte zuzustreben. — Bei größeren Werten von ξ, wie sie für unser Problem nicht mehr in Frage kommen, nähern sich die beiden Koeffizienten γ und ε asymptotisch dem Grenzwerte α, den sie auch in der Thomsonschen Theorie besitzen.

Aus der Formel (24) für die Querkomponente der Induktion berechnet man mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung (22) die Längskomponente der zusätzlichen Feldströmung zu

Digitized by Google

$$\dot{\bar{B}}'_y = \hat{\bar{B}}_{y\infty} \frac{n\frac{2\pi}{h}}{\gamma^2+\varepsilon^2} c\, e^{-\gamma y} \left\{ \left[\gamma \cos(\varepsilon y + \varphi) - \varepsilon \sin(\varepsilon y + \varphi) \right] + j \left[\gamma \sin(\varepsilon y + \varphi) + \varepsilon \cos(\varepsilon y + \varphi) \right] \right\}$$

$$= \hat{\bar{B}}'_x \frac{n\frac{2\pi}{h}}{\gamma - j\varepsilon}.$$

Unbekannt sind uns dabei nach wie vor die Verhältniszahl

$$c = \frac{\hat{B}'_{y0}}{\hat{B}_{y\infty}}$$

und die Phasenverschiebung φ. Das ist auch kein Wunder. Denn wir haben bisher das Problem nur ganz einseitig untersucht, nicht weiter, als die Induktionsströmung innerhalb des Bleches unmittelbar berührt wurde. Es ist jedoch klar, daß auf Größe und Phase der zusätzlichen Strömung der angrenzende Luftspalt nicht ohne Einfluß sein kann, und es steht zu erwarten, daß sich dieser Einfluß in den noch unbestimmten Konstanten offenbaren wird.

So verhält es sich auch wirklich: Ich will mich mit der Ableitung der Feldverteilung im Luftspalt nicht lange aufhalten. Sie bildet eine „wirbelfreie" oder „Potentialströmung", deren Komponenten die Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 B}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \qquad 30)$$

erfüllen, und für die man bei den obwaltenden Grenzbedingungen leicht die Lösung[1]) findet:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{B}}_x &= -\hat{\bar{B}}_{y\delta} \operatorname{Sin} n\frac{2\pi}{h}(\delta + y) \sin n\frac{2\pi}{h} x \\ \dot{\bar{B}}_y &= \hat{\bar{B}}_{y\delta} \operatorname{Cof} n\frac{2\pi}{h}(\delta + y) \cos n\frac{2\pi}{h} x \end{aligned}\right\} \qquad 31)$$

Im Luftraum ändert sich nur die Dichte der Induktionslinien; ihre Verteilung bietet zu jeder Zeit dasselbe Bild, das wir in Fig. 17 für die erste Harmonische entworfen haben. Je nachdem, wo man das Diagramm nach oben und unten begrenzt, gilt es für beliebige Verhältnisse von Luftspalt zu Blechstärke.

In Gleichung (31) habe ich die Luftinduktion auf die Amplitude der Längskomponente $\hat{\bar{B}}_{y\delta}$ in der Halbierungsebene des Luftweges bezogen. Im allgemeinen ist dies nur sehr klein gegenüber dem Scheitelwert

$$\hat{\bar{B}}_{y0} = \hat{\bar{B}}_{y\delta} \operatorname{Cof} n\frac{2\pi}{h}\delta, \qquad 32)$$

mit dem dieselbe Welle aus dem Eisen in den Luftraum übertritt. Setzen wir z. B. den Fall, der Luftspalt 2δ stimme mit der Blechbreite h überein (annähernd ist das in Fig. 17 der Fall), so erreicht schon die erste Harmonische ($n = 1$) den Luftspalt nur noch mit 9% ihres ursprünglichen Wertes, die zweite Harmonische gar nur noch mit 1% usw. Man kann ruhig sagen, daß im allgemeinen überhaupt nur die erste Harmonische der Wirbelstromrückwirkung den Luftspalt überbrückt, während alle Oberwellen, deren Ordnungszahl

$$n > \frac{h}{\delta}$$

erhalten wird, praktisch gar nicht bis zur mittleren Niveauebene gelangen. Für sie kommt daher auch die Größe des Luftweges gar nicht mehr in Betracht.

[1]) Siehe auch R. Rüdenberg, ETZ. 1906 S. 109.

Digitized by Google

Das Erlöschen der Querkomponente

$$\underline{\hat{B}}_{x0} = \underline{\hat{B}}_{y\delta} \mathfrak{Sin}\, n \frac{2\pi}{h} \delta \qquad 33)$$

erfolgt in ganz ähnlicher Weise, nur geht sie in der Symmetrieebene immer durch Null und wechselt dabei ihr Vorzeichen. Da sie aber — physikalisch gesprochen — die Mitte des Luftraumes ebensowenig erreicht wie die gleichwellige Längskomponente, so ist das ein geringfügiger Unterschied.

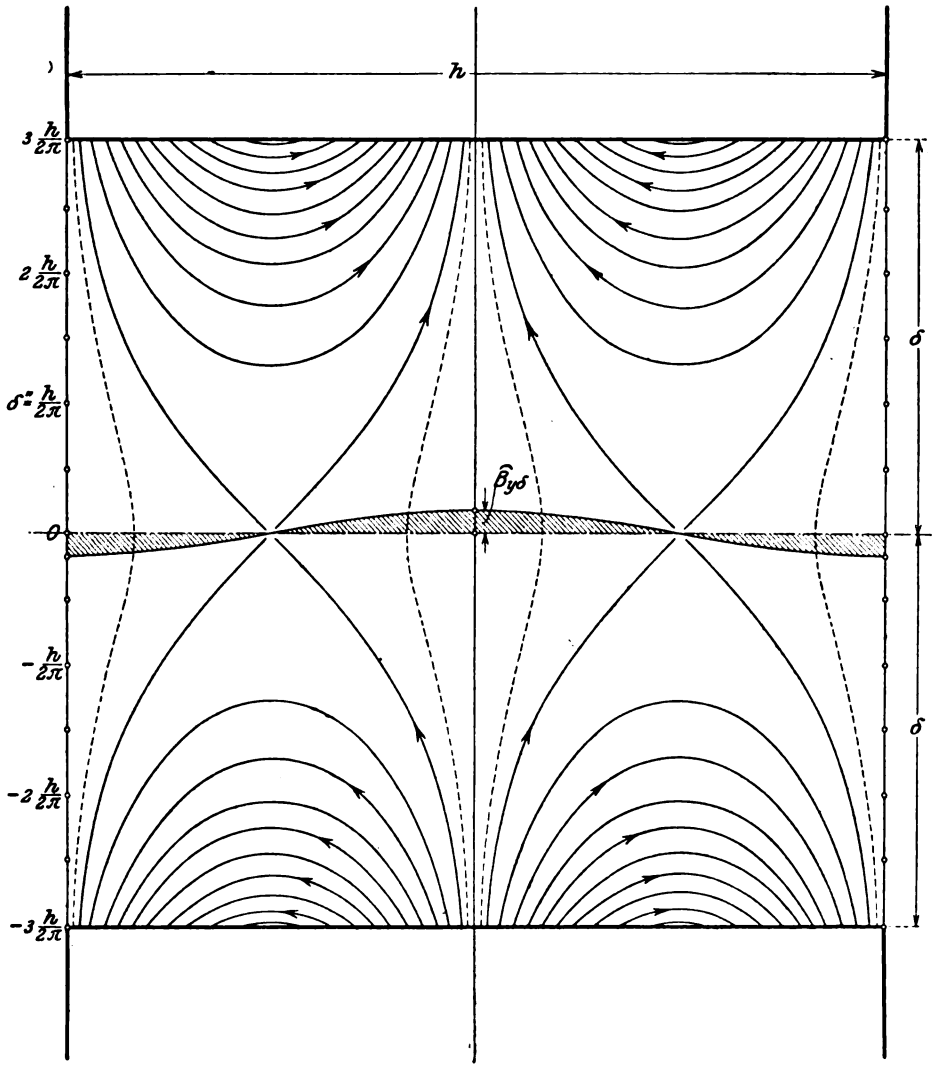


Fig. 17. Kraftlinienbild der 1ten Harmonischen im Luftspalt.

Mehr noch als die Feldverteilung interessiert den Techniker die magnetomotorische Kraft, welche die Induktionsströmung längs des Luftweges verbraucht. Schreibt man der Niveauebene in der Luftspaltmitte willkürlich das Potential Null zu, so stimmt das gesuchte Potentialgefälle mit dem Potential der unteren Blechkante (y = o) längs der Abszissenachse überein. Hierfür erhält man:

$$\underline{\hat{M}} = \int_{-\delta}^{0} \underline{\hat{B}}_y \, d_y = \underline{\hat{B}}_{y0} \cdot \delta \frac{\mathfrak{Tg}\, n \frac{2\pi}{h} \delta}{n \frac{2\pi}{h} \delta}, \qquad 34)$$

Digitized by Google

oder mit Worten: Das halbe Luftspaltgefälle ist gerade so groß, als wenn die mit dem Scheitelwert $\hat{B}_{y0}$ aus dem Eisen austretende Welle in unveränderter Verteilung einen Luftspalt

$$\delta'' = \delta - \frac{\mathfrak{Tg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta}{n\frac{2\pi}{h}\delta} \qquad 35)$$

zu überwinden hätte. Ist die Blechbreite sehr groß gegenüber dem Luftwege, so stimmen δ'' und δ wenigstens für die Harmonischen niederer Ordnung überein. Sind dagegen, wie für unser Problem, δ und h von gleicher Größenanordnung, sagen wir

$$\delta \geqq \frac{h}{3},$$

so ist für alle Harmonischen genau genug

$$\mathfrak{Tg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta = 1$$

$$\text{und} \quad \delta'' = \frac{h}{2\pi n}. \qquad 35\,a)$$

Wir kennen nun das allgemeine Verhalten der Induktionsströmung im Eisen und im Luftspalt. Was uns fehlt, ist nur noch, beide Strömungen unter Beobachtung des Brechungsgesetzes der magnetischen Kraftlinien ineinander überzuführen. Bekanntlich fordert dieses Gesetz, daß sich die Tangentialkomponenten der Induktion in den Randschichten wie die Permeabilitäten der aneinander grenzenden Medien verhalten, daß hingegen die Normalkomponente unverändert aus einem Medium in das andere übertritt. Für $y = 0$ ist also im Luftspalt:

$$\underline{\hat{B}}_{x0} = \frac{1}{\mu}\underline{\hat{B}}'_{x0}, \qquad 36)$$

während für Luft und Eisen gleichermaßen die Beziehung gilt:

$$\underline{\hat{B}}_{y0} = \underline{\hat{B}}_{y\infty} + \underline{\hat{B}}'_{y0}$$

$$= \underline{\hat{B}}_{y\infty} + \underline{\hat{B}}_{x0}\mu + \frac{n\frac{2\pi}{h}}{\gamma - j\varepsilon}. \qquad 37)$$

Endlich verlangen die behandelten Gesetze der Induktionsverteilung im Luftspalt, daß zwischen Tangential- und Normalkomponente ein bestimmtes Verhältnis obwalte, nämlich:

$$\frac{\underline{\hat{B}}_{y0}}{\underline{\hat{B}}_{x0}} = -\mathfrak{Ctg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta. \qquad 38)$$

Diese Gleichung ist die Schlüsselgleichung unseres Problems; aus ihr folgt sofort:

$$\left.\begin{aligned}\underline{\hat{B}}_{x0} &= -\frac{\underline{\hat{B}}_{y\infty}}{\mathfrak{Ctg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta + \mu\frac{n\frac{2\pi}{h}}{\gamma - j\varepsilon}} \\ &= -\frac{\underline{\hat{B}}_{y\infty}}{\mu}\cdot\frac{\left(\frac{\gamma}{n\frac{2\pi}{h}} + \frac{1}{\mu}\mathfrak{Ctg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma^2+\varepsilon^2}{\left(n\frac{2\pi}{h}\right)^2}\right) - j\,\frac{\varepsilon}{n\frac{2\pi}{h}}}{1 + \frac{2}{\mu}\mathfrak{Ctg}\, n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma}{n\frac{2\pi}{h}} + \frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Ctg}^2 n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma^2+\varepsilon^2}{\left(n\frac{2\pi}{h}\right)^2}}\end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Digitized by Google

$$\doteq -\frac{\hat{\hat{B}}_{y\infty}}{\mu}\left(1 - j\frac{1}{\left(2n\frac{\pi}{\xi}\right)^2}\right) \qquad 39a)$$

Ferner:

$$\hat{\hat{B}}_{y0} = -\hat{\hat{B}}_{x0}\,\mathfrak{Ctg}\,n\frac{2\pi}{h}\delta \doteq -\hat{\hat{B}}_{x0} \qquad 40)$$

und endlich:

$$\left.\begin{aligned}\hat{\hat{B}}'_{y0} &= \hat{\hat{B}}_{y0} - \hat{\hat{B}}_{y\infty} \\ &= -\hat{\hat{B}}_{y\infty}\frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma}{n\frac{2\pi}{h}}\right) + j\,\frac{\varepsilon}{n\frac{2\pi}{h}}\,\frac{1}{\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,n\frac{2\pi}{h}\delta}{1 + \frac{2}{\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma}{n\frac{2\pi}{h}} + \frac{1}{\mu^2}\,\mathfrak{Ctg}^2\,n\frac{2\pi}{h}\delta\cdot\frac{\gamma^2+\varepsilon^2}{\left(n\frac{2\pi}{h}\right)^2}}\end{aligned}\right\} \qquad 41)$$

$$\doteq -\hat{\hat{B}}_{y\infty}\left(1 - \frac{1}{\mu} + j\,\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\left(2n\frac{\pi}{\xi}\right)^2}\right). \qquad 41a)$$

Wir sind am Ende unserer Betrachtungen angelangt. Ich habe die Endformeln der strengen Theorie mitgeteilt, aber ich will sie nicht weiter diskutieren, da für unser Problem bei den üblichen Blechbreiten und Luftspalten die angegebenen Näherungsformeln genügen. Sie lehren uns, daß von jeder Feldwelle beliebiger Ordnung

$$\hat{\hat{B}}_n = \hat{\hat{B}}_{y\infty}$$

nur ein ganz geringer, von der Ordnungszahl unabhängiger Bruchteil

$$\hat{\hat{B}}_{y0} \doteq \frac{\hat{\hat{B}}_{y\infty}}{\mu} \qquad 40a)$$

in den Luftraum übertritt, nahezu in Phase mit der ursprünglichen Welle oder ihr etwas voreilend (Fig. 18). Fast niemals kommt das für B_{y0} längs des Luftweges verbrauchte Potentialgefälle gegen die für die mittlere Induktion B_{mitt} aufzuwendende M. M. K. in Betracht. Denn größere Beträge nimmt B_{y0} erst dann an, wenn das Verhältnis

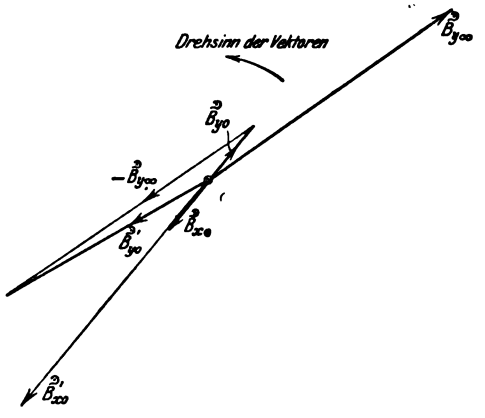


Fig. 18. Vektordiagramm der Feldharmonischen.

$$\frac{\mathfrak{Ctg}\,n\frac{2\pi}{h}\delta}{\mu}$$

gegenüber der Einheit nicht mehr vernachlässigt werden kann. Das träfe aber selbst bei großen Ansprüchen an die Rechengenauigkeit (Fehler $\leq 5\%$) für die erste Harmonische und $\mu = 200$ erst jenseits

$$h \geq 50\,\delta$$

zu.

II. Das harmonische Wechselfeld in Dynamomaschinen.

Bei allen elektrischen Maschinen kann man das Stator und Rotor verkettende Luftfeld in seine „Harmonischen" auflösen. Unter einer Luftfeldharmonischen versteht man eine zweidimensionale Induktionsströmung, deren Radial- und Tangentialkomponente

Digitized by Google

längs des Ankerumfanges jederzeit sinusförmig verteilt ist. Wenn man, wie im vorigen Abschnitt, die Permeabilität des Ankereisens als örtlich und zeitlich konstant betrachtet, so kann man jede Harmonische getrennt behandeln und die Ergebnisse der Rechnung nachträglich superponieren. Diesen Weg, der bei der Untersuchung der meisten Wechselstromerscheinungen zum Ziele führt, müssen wir auch im vorliegenden Falle einschlagen. Wir betrachten die Fehlharmonischen sozusagen als die einfachsten Bausteine, aus denen sich das komplizierte Gefüge einer Induktionsströmung zusammensetzen läßt. In ihnen offenbaren sich die physikalischen Grundgesetze am reinsten, und wir haben leichtes Spiel, sobald wir diese Gesetze beherrschen.

Ein harmonisches Feld, welches relativ zum Ankerkörper vollkommen in Ruhe bleibt, bezeichnet man als „harmonisches Gleichfeld". Verharrt nur die Feldachse in Ruhe, während die Amplitude nach einem Sinusgesetz der Zeit pulsiert, so spricht man von einem „harmonischen Wechselfeld". Schließlich kann der Fall noch so liegen, daß die Fehlharmonische ihre Amplitude beibehält, aber relativ zum Anker mit einer bestimmten Geschwindigkeit rotiert. Dann haben wir es mit einem „harmonischen Drehfeld" zu tun. — Von diesen 3 Feldformen erzeugt das Gleichfeld keine Verluste im Ankereisen. Das Drehfeld läßt sich bekanntlich in zwei harmonische Wechselfelder auflösen. Somit bildet das harmonische Wechselfeld den natürlichen Ausgangspunkt für die Theorie der Wirbelstromverluste aller elektrischen Maschinen.

a) Die Verteilung des außenerregten Wechselfeldes im Ankereisen. Ehe wir auf die Wirbelströmung im Ankereisen eingehen können, müssen wir wenigstens in großen Zügen über die Verteilung des Feldes im Ankereisen Bescheid wissen. Ich meine jetzt nicht das resultierende Feld, sondern das „äußere" Feld, so wie es zustandekommen müßte, wenn es nicht durch die Rückwirkung der Wirbelströme verzerrt würde. Daß diese Feldverteilung in jedem Augenblick mit der Induktionsströmung eines ebenso starken Gleichfeldes übereinstimmt, liegt auf der Hand. Vielleicht erregt es aber einiges Befremden, wenn ich den Leser zu versuchen bitte, ob er nicht die Grundgesetze dieser Feldverteilung einfach erraten kann. Das ist nämlich gar nicht so schwer. Man braucht sich nur den mutmaßlichen Verlauf der Induktionslinien aufzuzeichnen und sich dann zu überlegen, durch welche einfachste mathematische Funktion eine derartige Strömung wohl beschrieben werden könnte.

In Fig. 19 ist dieses Kraftlinienbild für einen glatten Anker entworfen. Da die Permeabilität μ des Ankereisens die des angrenzenden Luftraumes um ein Vielfaches übertrifft, so tritt das Luftfeld in den Anker nahezu radial über. Treffen auf den ganzen Ankerumfang p Wellenlängen der betrachteten Harmonischen, so gilt für die Radialkomponente des Luftfeldes an der Bohrungsfläche

$$(B_{r\,0})_1 = (\widehat{B}_{r\,0})_1 \cos p\,\varphi^1). \qquad 42)$$

Zwar besitzt das Luftfeld auch eine Tangentialkomponente $(B_{\varphi\,0})_1$. Sie beträgt aber nach dem Gesetz von der Brechung der Kraftlinien nur den μ-ten Teil der benachbarten Komponente $B_{\varphi\,0}$ im Ankereisen.

$$(B_{\varphi\,0})_1 = B_{\varphi\,0} \cdot \frac{1}{\mu} \qquad 43)$$

und wird daher gewöhnlich vernachlässigt.

Hingegen tritt die Radialkomponente $(B_{r\,0})_1$ in ihrem vollen Betrage in die Randschicht der Ankerkörpers über:

$$(B_{r\,0})_1 = B_{r\,0}. \qquad 44)$$

Da sie an der äußeren Mantelfläche vollkommen verschwunden sein muß, so muß sie beim Eindringen in den Anker nach irgendeinem Gesetze abnehmen. Was ist einfacher als sich vorzustellen, daß sie sich dabei ihre harmonische Verteilung bewahrt? Und so

[1]) Vgl. Zeichenerklärung Anmerkung Seite 104.

Digitized by Google

ist es auch in der Tat. In jedem Abstande y von der Ankerbohrung gilt für die Radialkomponente die Gleichung:

$$B_{ry} = \widehat{B}_{ry} \cos p\varphi, \tag{45}$$

wobei die Amplitude $\widehat{B}_{ry}$ ausschließlich eine Funktion der Eisentiefe y darstellt.

Dieses Abklingen der radialen Feldamplitude erfordert, daß gleichzeitig eine Tangentialkomponente $B_{\varphi y}$ einsetzt, die allmählich den Fluß einer Polteilung nach rechts und links ableitet, bis in der „neutralen Zone" $\varphi = \pm \frac{\pi}{2p}$ die ganze Strömung in die Tangentialrichtung abgelenkt ist. Diese Tangentialkomponente muß für gleiche po-

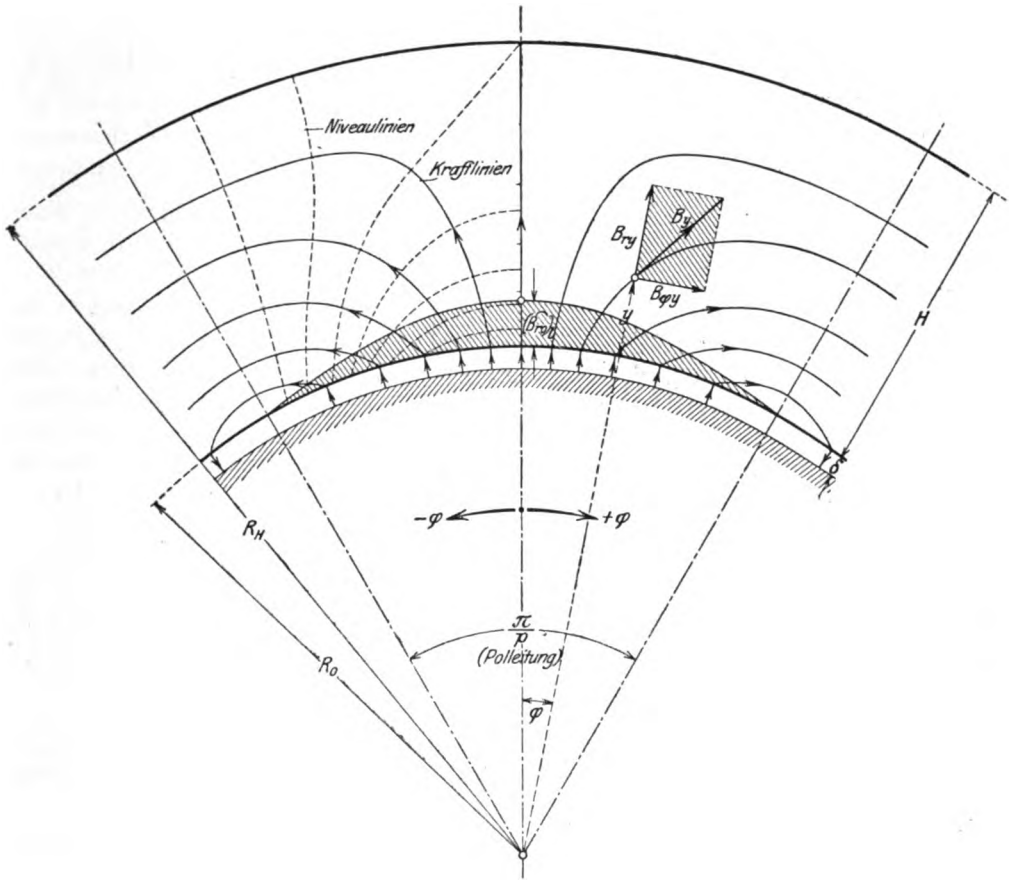


Fig. 19. Kraftlinienverteilung im glatten Anker.

sitive und negative Werte von φ gleiche Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, und sie muß ferner eine periodische Funktion des Centriwinkels φ sein, genau wie die Radialkomponente. Diese Überlegungen machen es wahrscheinlich, daß sie das Gesetz

$$B_{\varphi y} = \widehat{B}_{\varphi y} \sin p\varphi \tag{46}$$

erfüllt. Jedenfalls wäre dies die einfachste Lösung, und es läßt sich zeigen, daß wir auch damit das Rechte getroffen haben.

Wie $\widehat{B}_{ry}$ und $\widehat{B}_{r\varphi}$ bei Maschinen verschiedener Polzahl mit dem Bohrungsradius und der Eisentiefe variieren, braucht uns hier nicht zu beschäftigen. Wer sich dafür interessiert, möge auf die Arbeit von Rüdenberg über die „Energie der Wirbelströme" verwiesen werden. Für unsere späteren Untersuchungen ist allein das Verhältnis der

Digitized by Google

Radial- und Tangentialkomponente längs des Ankerumfangs von Wichtigkeit. Hierfür liefert die exakte Theorie den Wert:

$$\frac{\hat{B}_{r0}}{\hat{B}_{\varphi 0}} = q = \frac{\left(1 + \frac{\pi}{p}\frac{H}{t_p}\right)^{2p} - 1}{\left(1 + \frac{\pi}{p}\frac{H}{t_p}\right)^{2p} + 1}, \qquad 47)$$

den wir in Fig. 20 als Funktion des Verhältnisses $\frac{H}{t_p}$ abgebildet haben. Für hohe Polzahlen $p \geq 8$ kann man statt dessen die Gleichung

$$(q)_{p=\infty} = \mathfrak{Tg}\,\pi\frac{H}{t_p} \qquad 47a)$$

verwenden. Wenn die abgebildeten Kurven auch wegen der Voraussetzung konstanter Permeabilität keine allzugroße Genauigkeit für sich beanspruchen dürfen, so ist doch das Hauptergebnis von Wichtigkeit, daß bei den üblichen Verhältnissen $\frac{H}{t_p}$ die maximale Tangentialinduktion den Scheitelwert der Luftfeldharmonischen ein wenig übertrifft.

Die Induktionsströmung eines Gleichfeldes im Anker einer Dynamomaschine ist eine ausgesprochene „Potentialströmung". Wir bezeichnen eine Strömung in einem bestimmten Gebiet als wirbelfrei oder als „Potentialströmung", wenn beliebig gezogene, in sich zurücklaufende Raumkurven keine Ampereleiter umschließen. Da der ganze Anker stromfrei ist, ist diese Bedingung ohne weiteres erfüllt. — Um die Potentialströmung durch den Anker zu treiben, wird ein bestimmtes „Potentialgefälle", die „magnetomotorische Kraft" (M. M. K.) verbraucht. Schreibt man der Symmetrieebene in der neutralen Zone das Potential Null zu, so besitzt jedes außerhalb gelegene Eisenteilchen ein anderes Potential F; d. h. es ist eine bestimmte M. M. K., ein bestimmtes „Linienintegral der magnetischen Feldstärke"

$$F = \int H\,dl\cos(\dot{H}, \dot{l}) = \int H\,dl\cos\alpha$$

erforderlich, um die Induktionsströmung von dem betrachteten Punkte bis zur Symmetrieebene zu treiben. — Punkte gleichen Potentiales liegen auf „Niveauflächen", die überall senkrecht zur Kraftlinienströmung stehen. Sie sind in Fig. 19 strichliert eingetragen und besitzen gerade für unsere späteren Untersuchungen eine hervorragende Bedeutung[1]).

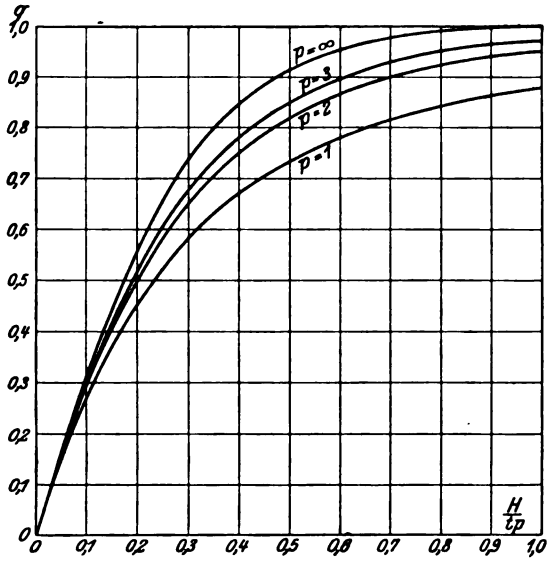


Fig. 20. Kurven des Verhältnisses $q = \frac{\hat{B}_{r0}}{\hat{B}_{\varphi 0}}$ für verschiedene Polzahlen.

Besonders wichtig ist die Potentialverteilung längs des Ankerumfanges. Da dieser von sämtlichen Niveaulinien geschnitten wird, so ändert sich sein Potential stetig, und zwar nach einer periodischen Funktion: In der neutralen Zone wird das Potential regelmäßig zu Null, um von da bis zur Polmitte im positiven oder negativen Sinne anzu-

[1]) Es wird vielleicht manchem interessieren, daß das analytische Gesetz dieser Niveaulinien für $p = \infty$ mit dem durch Gleichung (31) ausgesprochenen Gesetz der Feldverteilung im Luftspalt übereinstimmt.

Digitized by Google

steigen. Wie nicht anders zu erwarten, ist auch das Potential der Ankeroberfläche eine cos-Funktion des Centriwinkels, und zwar gilt:

$$F = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2p}} H_{\varphi 0} \cdot R_0 \, d\varphi = \frac{B_{r0}}{\mu} \cdot \frac{t_p}{\pi \cdot q} \cos p\varphi, \qquad 48)$$

genau dasselbe Potentialgefälle würde verbraucht, wenn das Luftfeld B_{r0} unter Beibehaltung seiner sinusförmigen Verteilung einen konstanten Luftweg

$$\delta_a = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{t_p}{\pi q} \qquad 49)$$

zurücklegen würde, und es erleichtert manche Betrachtungen, den magnetischen Widerstand des Ankers durch diesen ideellen Luftraum zu ersetzen.

b) Die Verteilung des resultierenden Feldes im Ankereisen. Wenn man von den Wirbelstromverlusten eines Transformators zur Wirkung eines harmonischen Wechselfeldes im Anker einer Dynamomaschine übergeht, so erscheint der Sprung zunächst ungeheuer groß. Denn abgesehen davon, daß es sich in beiden Fällen um eine ebene Induktions-

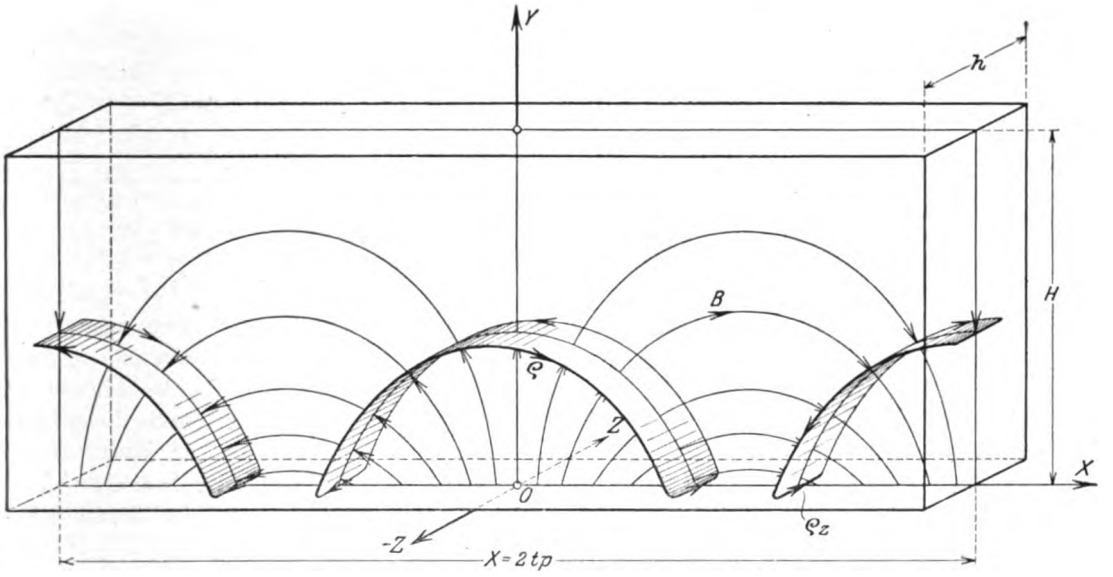


Fig. 21. Schema zur Veranschaulichung der Wirbelstrombildung.

strömung handelt, haben die beiden Wechselfelder wenig gemeinsames. Und trotzdem werden wir sehen, wie außerordentlich ähnlich sich beide Vorgänge in ihren kleinsten Teilen sind.

Um zu dieser Erkenntnis zu gelangen, müssen wir uns zunächst den mutmaßlichen Verlauf eines Wirbelstromfadens vorstellen. Fig. 21 mag uns dies erleichtern. Sie zeigt einen Blechabschnitt einer unendlich vielpoligen Maschine von der Länge zweier Polteilungen $X = 2\,t_p$ und ist so gezeichnet, als wenn das Blech durchsichtig wäre. In der Mittelebene ist die Induktionsströmung durch einige Kraftlinien angedeutet. Wenn man bedenkt, daß die Wirbelstromlinien einerseits das Bestreben haben, möglichst viele Kraftlinien zu umschließen, andererseits periodische Raumkurven von der Periodizität der Induktionsströmung bilden müssen, so wird man dazu geführt, die Bahn eines Wirbelstromfadens ρ ungefähr gemäß der eingezeichneten Kurve anzunehmen. Der Wirbelstromfaden verläuft zu beiden Seiten der Mittelebene genau kongruent, nur in entgegen-

Digitized by Google

gesetzter Richtung. Erst hart an der Bohrungsfläche des Ankers biegt er von der einen Blechhälfte nach der anderen hinüber. Legt man, wie in Fig. 21 angedeutet, durch die Abschnitte der Wirbelstromlinie vor und hinter der Mittelebene eine zylindrische Fläche, so tritt das Raumbild noch klarer hervor.

Diese Konstruktion ist aber weit mehr als ein bloßes zeichnerisches Hilfsmittel: Man braucht sich nur noch eine zweite unendlich benachbarte Zylinderfläche einzutragen, so wird aus dem Ankerblech ein Raumelement (Fig. 22) herausgeschnitten, das mit dem der Transformatortheorie zugrunde gelegten Blechabschnitt nach Fig. 1 eine gewisse Ähnlichkeit besitzt und auch ganz ähnliche Schlüsse ziehen läßt. Ich nenne

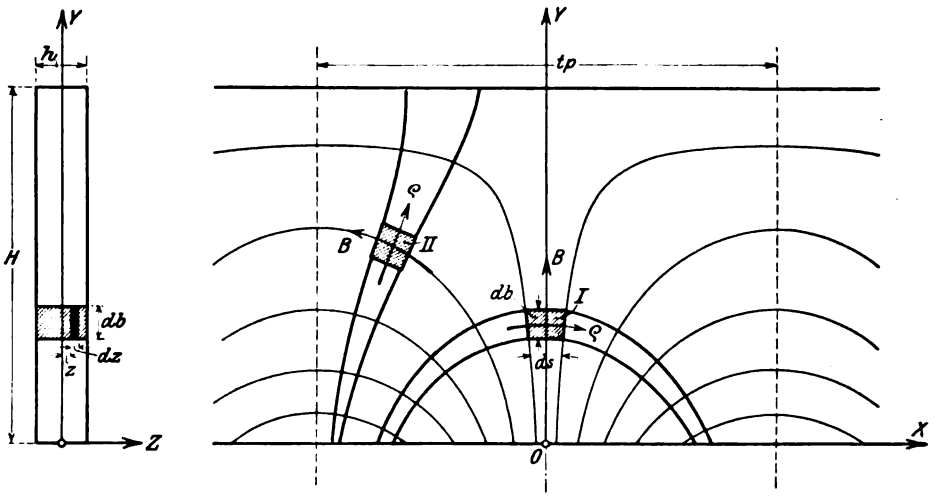


Fig. 22. Induktionsströmung und Stromschale.

dieses Gebilde eine „Stromschale", denn entlang ihren gewölbten Begrenzungsflächen gleitet die Wirbelströmung dahin. — Und nicht allein der eine Stromfaden, der uns ursprünglich zu der Konstruktion Veranlassung gab, auch in seiner Nachbarschaft tritt bis hart an die Bohrungsfläche des Ankers nirgends ein Stromfaden durch diese Leitflächen aus oder ein. — Die letzte Behauptung entbehrt allerdings noch der Begründung. Führt sie aber im Verlauf der Rechnung nicht zu Widersprüchen, so ist ihre Richtigkeit bewiesen. Denn das Wirbelstromproblem kann nicht mehrere richtige Lösungen besitzen.

Versuchen wir also, wie weit sich die Analogie zwischen der Stromschale und dem Blechelement des Transformators durchführen läßt! Die Wirbelströmung an den schmalen Randschichten wiederzugeben, darauf haben wir beim Transformator verzichtet. Die Querschnittslänge übertraf ja die Breite so erheblich, daß es keinen großen Unterschied machen konnte, ob wir für den rechteckigen Querschnitt des Transformatorbleches eine endliche oder eine unendliche Länge voraussetzten. Im letzten Falle trat im Endlichen eine Querströmung ρ_z senkrecht zur Blechebene überhaupt nicht auf. Also mußte ihr Sitz bei endlicher Länge ausschließlich in den Randpartien zu suchen sein. Genau dieselben Überlegungen berechtigen uns, auch bei der Stromschale die Querströmung ρ_z zu vernachlässigen, solange wir einen gewissen kleinen Abstand von den Mantelflächen des Ankers beobachten. Wenn man will, kann man auch durch umständliche Rechnungen nachweisen, daß man vom Rande nur 1 bis 2 Blechbreiten gegen das Ankerinnere zurückzulegen braucht, um eine zur Mittelebene vollkommen parallele Wirbelströmung anzutreffen.

Daraus folgen zunächst zwei wichtige Gesetzmäßigkeiten der resultierenden Feldverteilung:

Digitized by Google

1. Solange keine Querströmung ρ_z auftritt, verlaufen auch die Kraftlinien des resultierenden Feldes parallel zur Mittelebene des Bleches.

2. In jeder Ebene parallel zur Blechmittelebene, sagen wir kurz: in jeder „Schichtungsebene", bildet die resultierende Feldverteilung eine ebene Potentialströmung. Denn da diese durch die Wirbelstromfäden nicht — oder genauer gesagt nur zunächst der Ankerbohrung — durchsetzt werden, so umschließt auch eine beliebig gezogene ebene Kurve außerhalb der Randpartien keine Amperelciter.

Das letzte Ergebnis ist ungeheuer folgenschwer. Man überlege: In jeder Schichtungsebene eine wirbelfreie magnetische Strömung! — Was muß ich von einer so gearteten Strömung wissen, um ihre Ausbreitung über die ganze Blechebene berechnen zu können? Nur ihre Verteilung längs des Ankerumfanges oder längs der Symmetrielinie in der neutralen Zone, oder längs irgendeiner anderen, passend gewählten Kurve. Gelingt es uns also, diese Feldverteilung unter Berücksichtigung des Gegenfeldes der Wirbelströme herzuleiten, so haben wir damit den Schlüssel zur Ermittelung der Induktionsverteilung im ganzen Ankerkern in Händen.

Dabei ist nichts einfacher, als sich diesen Schlüssel zu verschaffen. Betrachten wir einmal das kleine Raumelement in der Mitte der Stromschale, welches sich in Fig. 22 als das kleine schraffierte Rechteck I projiziert! Es besitzt als Basis die Bogenlänge ds, eine Höhe db gleich der Dicke der Stromschale unter der Polmitte, und seine Tiefe erstrecke sich über die ganze Blechbreite h. — Warum habe ich dieses Raumdifferential gerade unter der Polmitte herausgeschnitten? Weil hier, wenn man näher zusieht, genau dieselben örtlichen Bedingungen vorliegen wie für irgendein Raumdifferential des Transformatorbleches, das nicht zu nahe den Blechkanten gelegen ist. Hier wie dort handelt es sich um ein kleines rechtwinkliges Parallelopiped. Hier wie dort durchflutet die Induktionsströmung 2 Begrenzungsflächen in senkrechter Richtung, verläuft also parallel zu 4 anderen Seitenflächen. Hier wie dort ist sie über 2 Seitenflächen gleichmäßig verteilt. Hier wie dort besitzt die Wirbelströmung nur eine Längskomponente und keine Querkomponente. Und fragen wir uns, welchem Umstande wir diese vollkommene Übereinstimmung zu verdanken haben, so muß die Antwort bei dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse lauten: Den Symmetrieeigenschaften der Feldverteilung bezogen auf die Polmittelebene.

Aus dieser Übereinstimmung der äußeren Bedingungen folgt aber auch die Übereinstimmung der Wirbelstrom- und Feldverteilung, vorausgesetzt, daß dem die Bedingungen, unter denen die benachbarten Raumteilchen stehen, nicht widersprechen. Ob dies der Fall ist oder nicht, wird sich ja im weiteren Verlauf der Untersuchung von selbst ergeben. Zunächst nehmen wir jedenfalls an, daß die Gesetze des Transformators auf unseren Fall der Dynamomaschine übertragen seien und schreiben wie dort:

$$\left.\begin{aligned} B &= (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\,(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}} \left[e^{\alpha z}\sin(\omega t - \varphi_0 + \alpha z) + e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \varphi_0 - \alpha z)\right] \\ \text{bzw. } \tilde{B} &= (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,2\alpha z + \cos 2\alpha z}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}} \end{aligned}\right\} \quad 4a)$$

und:

$$\dot{\tilde{B}}_{mitt} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{\tilde{B}}\,dz = \frac{(\dot{\tilde{B}})_{\frac{h}{2}}}{\xi}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi} + j\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}\right] \quad 10)$$

$$\text{bzw. } \tilde{B}_{mitt} = (\tilde{B})_{\frac{h}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}}. \quad 11)$$

Die erste Gleichung regelt die Verteilung der Induktion über die Blechbreite h;

Digitized by Google

die zweite lehrt uns aus der Randinduktion $(B)_{\frac{h}{2}}$ den Mittelwert der Induktion zu berechnen, der für den Gesamtfluß der Kraftröhre in der Polmitte maßgebend ist. Beide Male ist die Lage des Raumelementes nur durch die Angabe der Randinduktion bestimmt. Es kommt also gar nicht darauf an, welchen Abstand das Element von der Ankeroberfläche besitzt: Alle Raumelemente unter der Polmitte besitzen eine ähnliche Induktionsverteilung, und in allen ist der Mittelwert der Induktion im gleichen Verhältnis geringer als die spezifische Induktion der Blechwangen.

Auf diese erstreckt sich die entmagnetisierende Wirkung der Wirbelströmung natürlich ebensowenig als beim Transformator. Ihre Induktion ist einzig und allein durch die für den Anker zur Verfügung stehende, d. h. durch irgendeine fremderregte Wicklung aufgebrachte magnetomotorische Kraft bestimmt. Um ein harmonisches Gleichfeld zu erzeugen, müßte die M. M. K. längs des Ankerumfanges sinusförmig verteilt sein:

$$F = \hat{F} \cos p\varphi. \qquad 48a)$$

Gilt umgekehrt jetzt dieselbe Beziehung für die zeitlichen Momentanwerte, so stimmt in jedem Moment die Induktionsströmung längs der Seitenebenen der Bleche mit der eines harmonischen Gleichfeldes von gleichem Potentialgefälle überein.

Nur noch einen Schritt weiter und wir sind am Ziele: Wir wissen, daß in allen Schichtungsebenen die Induktionsströmung wirbelfrei ist, und wir kennen die Potentialströmung in den äußersten Seitenebenen. Wir wissen ferner, daß unter der Polmitte die Induktionsverteilung der inneren Schichten $\left(z < \frac{h}{2}\right)$ derjenigen der Randschichten durchweg ähnlich ist. Wir wissen endlich, daß allein aus der Verteilung der Induktion unter der Polmitte die Potentialströmung in irgendeiner Schichtungsebene abgeleitet werden kann. Daraus folgt mit zwingender Notwendigkeit, daß sich die Induktionsströmungen in allen Schichtungsebenen ähnlich sind. Sie liefern genau gleiche Strömungsbilder, deren Dichte nach einem Sinusgesetz der Zeit schwankt, und die sich nur durch die Schwingungsamplitude und -phase unterscheiden. Ich brauche wohl kaum besonders hervorzuheben, daß die Amplitude und Phase der Induktionsschwankung gegen die Blechmitte abnimmt. Wie wir bisher alle Ergebnisse der Transformatortheorie übernehmen konnten, so gilt auch das Bild von den 2 magnetischen Wellen, die von rechts und links unter Absorptionserscheinungen gegen die Blechmitte vordringen, ebensogut für das Ankerblech der Dynamomaschine; natürlich nicht minder der Ersatz dieses Bildes mit Hilfe der parabolischen Feldwelle.

c) Die Verteilung der Wirbelströmung im Ankereisen. Die Verteilung der Wirbelströmung ist mit der Induktionsverteilung durch eine kurze Kette von Schlußfolgerungen verknüpft. Soeben haben haben sich die Kraftlinienbilder verschiedener Schichtungsebenen als ähnlich herausgestellt. Legt man also durch irgendeine Kraftlinie senkrecht zur Schichtungsebene eine zylindrische Fläche, so treten durch diese Fläche längs der ganzen Blechbreite weder Kraftlinien ein noch aus. Diese Fläche kann infolgedessen nicht der Sitz irgendwelcher Induktionswirkungen sein; die Wirbelströmung kann in ihr keine Komponente besitzen, folglich muß sie überall auf ihr senkrecht stehen. Oder mit anderen Worten: Die Wirbelstromfäden sind Orthogonaltrajektorien der Kraftlinien, und die gewölbten Begrenzungsflächen der Stromschalen sind Niveauflächen der Induktionsströmung.

Das ist wiederum ein folgenschweres Resultat. Denn wenn dem so ist, so können wir ja aus der Stromschale an beliebiger Stelle ein kleines rechtwinkeliges Paralleliped herausschneiden, z. B. das Raumelement, das sich in Fig. 22 als das kleine schraffierte Rechteck II projiziert. Es wird von der Induktionsströmung um kein Haar anders induziert als jenes zuerst betrachtete Raumdifferential (Fig. 22) unter der Polmitte; also muß auch das Gesetz der Feld- und Wirbelstromverteilung an jeder Stelle des Ankerbleches

Digitized by Google

dasselbe sein, nämlich dasjenige, das wir bei der Untersuchung des Transformatorbleches kennengelernt haben. Hinsichtlich der resultierenden Feldverteilung haben wir diese Schlußfolgerung schon im vorigen Abschnitt gezogen; hinsichtlich der Wirbelströmung hingegen bringt sie ein ganz neues Resultat: Die Transformatorgleichungen der Wirbelströmung (17—20) beherrschen auch die Verhältnisse der Dynamomaschine und alle an sie geknüpften Überlegungen bleiben in Kraft.

Aber vorsichtig! Stoßen wir damit nicht vielleicht auf Widersprüche? Vermag denn die Stromschale sich diesen Gesetzen zu beugen, ohne daß Stromfäden aus ihr ein- oder austreten? Erhält man für das Volumen eines Stromfadens von Querschnitt zu Querschnitt wirklich einen unveränderlichen Wert? In der Tat, von dieser Probe hängt es ab, ob wir mit den wenigen Annahmen, die wir ohne Beweis in unsere Betrachtungen einflochten, Schiffbruch leiden oder ans Ziel gelangen.

Machen wir die Probe: Das Volumen eines Stromfadens an irgendeiner Stelle der Stromschale ist:

$$d\dot{\tilde{i}} = \dot{\tilde{\rho}} \cdot dz\, db$$

oder, wenn wir die Stromdichte schematisch durch den Ansatz

$$\dot{\tilde{\rho}} = (\dot{\tilde{B}})_{\frac{h}{2}} [f(z) + j\, g(z)]$$

ausdrücken:

$$d\dot{\tilde{i}} = (\dot{\tilde{B}})_{\frac{h}{2}} \cdot db \cdot [f(z) + j\, g(z)]\, dz.$$

Da die Funktionen f (z) und g (z) jür jede Schichtungsebene einen unveränderlichen Wert besitzen, so bleibt der ganze Ausdruck von Querschnitt zu Querschnitt konstant, wenn das Produkt

$$(\tilde{B})_{\frac{h}{2}}\, db$$

konstant ist. Dieses Produkt ist aber nichts anderes als die Potentialdifferenz zwischen den Begrenzungslinien der Stromschale in der betreffenden Schichtungsebene. Soeben haben wir gefunden, daß diese Kurven Orthogonaltrojektorien einer wirbelfreien Induktionsströmung bilden; ihre Potentialdifferenz ist also wirklich konstant über die ganze Ausdehnung der Stromschale. — Der Kreis unserer Betrachtungen hat sich widerspruchsfrei geschlossen.

d) Die Rückwirkung der Wirbelströmung auf den Luftspalt. Bei der vollständigen Analogie der Erscheinungen bedarf es wohl keines Beweises mehr, daß auch die Rückwirkung der Wirbelströme auf den Luftspalt denselben Grundgesetzen unterworfen ist, die wir seinerzeit für den Transformator mit Luftspalt ableiteten. Dort zählten wir die Größe δ von der Blechkante bis zu einer der Blechkante parallelen Niveaufläche. Bei der Dynamomaschine kann man als diese Äquipotentialfläche die dem Anker gegenüberliegende Polfläche ansprechen. Ob zwischen ihr und der Ankerfläche ein konstanter oder variabler Luftweg δ eingeschaltet ist, spielt für die Rückwirkung der Wirbelströmung gar keine Rolle. Denn wir haben seinerzeit erkannt, daß nur die gleichmäßig verteilte mittlere Induktion den Luftspalt überschreiten kann, nicht aber irgendeine übergelagert feldverzerrende Welle, wenigstens solange die Breite des Luftspaltes $^1/_3$ der Blechstärke übertrifft. Diese Grenze zu unterschreiten, verbietet sich aber schon aus rein konstruktiven Rücksichten.

Sonach sind alle Voraussetzungen für die Anwendung der Näherungsgleichungen (39a) und (40a) gegeben. Wir entnehmen ihnen, daß die Feldverzerrungen im Innern des Ankerbleches μ-mal größer ist als an der Grenze zwischen Luft und Eisen, und daß sie im Luftspalt sehr schnell noch weiter nivelliert wird. Bei der Bestimmung der für den Luftspalt verbrauchten M. M. K. braucht die Feldverdrängung daher überhaupt nicht in

Digitized by Google

Rechnung gesetzt werden. Hierfür ist nur der Mittelwert $\tilde{B}_{mitt}$ der Induktionsströmung maßgebend, der selbstverständlich für Luft und Eisen übereinstimmt.

Über die Aufteilung des gesamten zur Verfügung stehenden Potentialgefälles über Luft- und Eisenweg brauche ich mich nicht nochmals zu verbreiten. Es genügt wohl der Hinweis auf das Vektordiagramm 15 und die hieran geknüpften Bemerkungen, die ebensogut auf Dynamomaschinen wie auf Transformatoren passen.

e) Die Wirbelstromverluste im Ankereisen. Beim Transformator bezogen wir die spezifischen Wirbelstromverluste auf denjenigen Grenzwert, der bei Vernachlässigung der Feldverdrängung, oder wie man auch sagt, der „Hautwirkung", gedeckt werden müßte. Da diese Formel aber für reduzierte Blechstärken von $\xi \geq \pi$ zu ungünstige Werte liefern würde, so berichtigten wir sie durch den „Rückwirkungsfaktor":

$$f_\rho = \frac{3}{\xi} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\xi}. \qquad 14)$$

Genau denselben Kurs können wir auch bei der Dynamomaschine einschlagen: Bei Vernachlässigung der Hautwirkung müssen wir hier einem harmonischen Wechselfeld von der Radialamplitude $\hat{\tilde{B}}_{mitt}$ die spezifischen Verluste

$$\frac{W_o^{Watt}}{V^{cdm}} = \tilde{\sigma}_{wo} \cdot \left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\hat{\tilde{B}}_{mitt}}{1000} \cdot h^{m/m}\right)^2 \qquad 50)$$

und einen Wirbelstromkoeffizient

$$\tilde{\sigma}_{wo} = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6}\right) \times \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{t_p}{H \cdot q} \cdot \frac{2}{2 + \frac{\pi H}{p\, t_p}}\right)^{1)} \qquad 51)$$

zuschreiben. Wenn ich diesen Koeffizienten in 2 Glieder zerlegte, so geschah es in Erinnerung an die Theorie des Transformators, wo er durch den ersten Faktor gegeben war. Die Eigentümlichkeiten des Ankerfeldes kommen also erst im zweiten Gliede zum Ausdruck. Für eine vielpolige Maschine mit $\frac{H}{t_p} = \frac{1}{3}$ erhält man dafür

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{t_p}{H \cdot q} = 0{,}61.$$

Bei hochfrequenten Wechselfeldern fallen jedoch die Verluste geringer aus, und da die Wirbelströmung im Dynamoanker mit derjenigen im Transformatorblech in ihren kleinsten Teilen übereinstimmt, so bleibt auch der Reduktionsfaktor f_ρ in Kraft. Wir schreiben daher endgültig:

$$\tilde{\sigma}_w = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6} \cdot f_\rho\right) \times \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{t_p}{H \cdot q} \cdot \frac{2}{2 + \frac{\pi H}{p\, t_p}}\right). \qquad 52)$$

Untersuchungen von Rüdenberg[1]) machen es wahrscheinlich, daß dieser Wert infolge der Veränderlichkeit der Permeabilität auch bei idealer gegenseitiger Isolierung der Bleche etwas überschritten wird. Diese Abweichungen sind jedoch geringfügig gegenüber der Vergrößerung der Wirbelstromverluste, die man in der Praxis infolge schadhafter Blechisolation meistens konstatiert. Das ist auch leicht erklärlich. Denn wenn die Wirbelstromfäden auch nur an den beiden Enden einer Stromschale von einem Blech zu einem benachbarten ihren Weg finden, so ist es nicht anders, als wäre die Blechstärke für die ganze Stromschale verdoppelt, und demgemäß steigen dort die Wirbelstromverluste auf den vierfachen Normalwert. Man erkennt daraus, wie wichtig es ist, bei der Fabrikation der Nutenanker derartige Beschädigungen zu vermeiden, wie sie bei unsachgemäßer Bearbeitung der Ankeroberfläche, namentlich beim „Ausdornen" der Nuten, nur zu leicht entstehen.

[1]) Vgl. Rüdenberg, „Energie der Wirbelströme".

Digitized by Google

III. Das harmonische Drehfeld in Dynamomaschinen.

Ein Kunstgriff, dessen sich die Theorie der Wechselstrommaschinen häufig bedient, ist die Zerlegung eines harmonischen Drehfeldes in 2 harmonische Wechselfelder der synchronen Periodenzahl. Die Amplitude und Wellenlänge dieser Teilfelder stimmt mit der des Drehfeldes überein. Indessen differiert die Lage ihrer Achsen um $^1/_4$ Wellenlänge $\left(\frac{x}{4}\right)$ und ihre Phase um $^1/_4$ Periode $\left(\frac{T}{4}\right)$. Das dem so ist, läßt sich leicht beweisen. Wir brauchen nur in der Drehfeldgleichung

$$B = \hat{\hat{B}} \cos \frac{2\pi}{x}(x \mp vt)$$

die Kosinusfunktion weiter zu entwickeln, so entsteht:

$$B = \hat{\hat{B}} \cos \frac{2\pi}{x} x \cos \frac{2\pi}{T} t \pm \hat{\hat{B}} \sin \frac{2\pi}{x} x \sin \frac{2\pi}{T} t$$
$$= \quad B' \quad + \quad B''.$$

Damit ist bereits das oben ausgesprochene Gesetz der Feldspaltung analytisch ausgedrückt. Die beiden Teilfelder B' und B'' bezeichne ich als „koordinierte Wechselfelder".

Im vorliegenden Falle müssen wir umgekehrt verfahren: Wir haben die Gesetze der Wirbelstrom- und Feldverteilung für das harmonische Wechselfeld kennengelernt und haben sie nun auf 2 kongruente Wechselfelder anzuwenden, die zeitlich und örtlich um 90 Grade phasenverschoben sind. Schwierigkeiten irgendwelcher Art sind dabei nicht zu erwarten.

Von vornherein ist klar, daß das resultierende Feld im Ankereisen während der Rotation nur seine Lage, aber nicht seine Verteilung ändert. Wie wir seinerzeit bei der Untersuchung des Wechselfeldes in allen Schichtungsebenen harmonische Wechselfelder vorfanden, die sich nur durch ihre Phase und Amplitude unterschieden, so werden wir jetzt in allen Schichtungsebenen harmonischen Drehfeldern begegnen, die nur in ihrer Wellenhöhe und der relativen Lage ihrer Raumachsen voneinander abweichen. Jede Schichtungsebene bietet dasselbe Kraftlinienbild eines rotierenden Gleichfeldes, mit dem wir im zweiten Abschnitt unsere Untersuchungen eingeleitet haben. Was wir hier noch zu überlegen haben, ist lediglich, wie sich die zeitliche Nacheilung der Induktionsschwankung der inneren gegenüber den äußeren Schichten in eine räumliche Differenz der Drehfeldachsen übersetzt. Die analytischen Betrachtungen, die uns darüber aufklären, sind so einfacher Natur, daß sie jeder leicht für sich selbst anstellen kann. Das Resultat ist, daß sich die zeitliche Nacheilung eines koordinierten Felderpaares gegen zwei weitere koordinierte Wechselfelder in eine ebensogroße räumliche Nacheilung des ersten Drehfeldes gegen das zweite übersetzt. Der Zeitwinkel erscheint wieder als Ortswinkel in Polteilungsgraden.

Auf Grund dieser einfachen Transformation kann man sich, vom Wechselfeld ausgehend, die resultierende Drehfeldverteilung sehr anschaulich vorstellen: Fanden wir für das harmonische Wechselfeld, daß die Phase der Induktionsschwankung nach der Blechmitte zu hinter der der Randebenen verspätet ist, so müssen beim Drehfeld die rotierenden Kraftlinienbilder der weiter nach innen gelegenen Schichtungsebenen hinter denen der Seitenebenen um einen Winkel zunehmen, der nach der Blechmitte zu stetig anwächst. Bei einer reduzierten Blechbreite von $\xi = 2\pi$ würde das Drehfeld in der Polmitte sogar um eine volle Polteilung dem Drehfeld der Blechwangen nacheilen. Doch haben wir bereits früher betont, daß man selbst bei den höchsten erzeugten Nutzfrequenzen diesen Wert nicht erreicht. Nur parasitäre Frequenzen, wie z. B. höhere Harmonische oder Zahnpulsationen in lamellierten Polschuhen führen in dieses Gebiet.

Digitized by Google

Was für die Kraftlinienbilder zu Recht besteht, gilt mit demselben Rechte auch für die Verteilung der Wirbelströmung. Auch sie gewährt in allen Schichtungsebenen den Anblick ähnlicher, gleichmäßig rotierender Strombilder; auch bei ihr nimmt die Dichte der Strömungsbilder gegen die Blechmitte ab, während gleichzeitig die Raumachse zurückbleibt. Etwas komplizierter ist es nur, sich die gegenseitige Lage der Kraftlinien- und Wirbelstromverteilung richtig vorzustellen. Würden wir die Selbstinduktion der Wirbelstromfäden vernachlässigen, so würden die Raumachsen der magnetischen und elektrischen Strömung zusammenfallen[1]). Bei hohen Frequenzen bleibt jedoch die Wirbelstromverteilung gegen die Induktionsverteilung nicht unerheblich zurück. Man übersieht dies am besten, wenn man sich die Feld- und Stromverteilung in den Randebenen vergegenwärtigt:

Das Wirbelstrombild der vorderen Seitenebene muß bei Rechtsdrehung des Ankers phasengleich mit der mittleren Induktionsverteilung B_{mitt} rotieren (vgl. Fig. 23). Diese hinwiederum bleibt gegen die Randinduktion um einen Raumwinkel φ_{mitt} zurück, der nach Gleichung (12) in Polteilungsgraden berechnet oder aus Fig. 6 abgelesen werden kann.

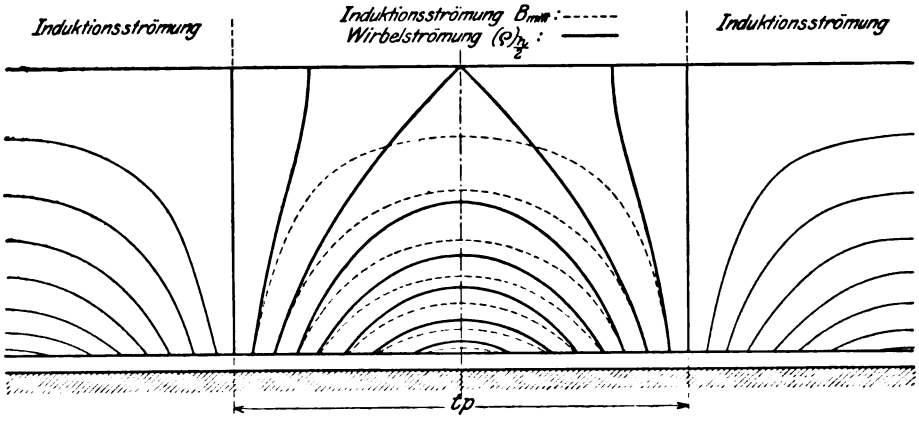


Fig. 23. Mittlere Induktionsströmung und Wirbelströmung der Randschichten beim Drehfeld.

Er wächst bei kleinen reduzierten Blechbreiten quadratisch mit ξ, wendet aber alsbald und darf für $\xi \geq \pi$ zu 45^0 angenommen werden. Um ebendenselben Winkel eilt sonach die Randinduktion der Stromverteilung in den Randschichten vor. — An dieser Phasenverschiebung ändert sich bei großen reduzierten Blechstärken nicht viel, wenn man die Feld- und Strombilder weiter nach innen gelegener Schichten vergleicht; denn im großen und ganzen nimmt sowohl die Phase der Induktion wie der Wirbelströmung mit der Entfernung vom Rande im selben Verhältnis ab. Auf analytischen Wege könnte man es leicht exakter ausdrücken, doch lohnt es nicht die Mühe.

Bezüglich der Aufteilung der M. M. K. über Luft und Anker gelten dieselben Ausführungen wie für das harmonische Wechselfeld. Ich kann mich daher gleich dem letzten Punkte zuwenden, auf den sich das Hauptinteresse des praktischen Ingenieurs konzentriert, d. i. den Wirbelstromverlusten.

Allerdings ist auch hierüber wenig Neues zu sagen: Wenn sich in einem gestreckten Leiter zwei Ströme gleicher Periodenzahl überlagern, deren Phase um 90^0 differiert, so sind die gesamten Jouleschen Verluste gleich der Summe der Verluste beider Stromkomponenten. Nicht anders verhält sich der räumliche Leiter, das Blechpaket, mit dem wir es zu tun haben. Auch hier differieren in jeder Schichtungsebene die koordinierten Strombilder um 90 Grade, und so ist auch hier der gesamte Wirbelstromeffekt gleich der

[1]) Allerdings sind die Bilder nicht kongruent, wie man nach Fig. 15 in Rüdenbergs Abhandlung oder nach Figur und Text in Arnolds Wechselstromtechnik Bd. I Seite 421 schließen möchte.

Digitized by Google

Summe der Verluste, die den beiden harmonischen Wechselfeldern — einzeln genommen — entsprechen würden. Da diese gleiche Größe besitzen, so betragen die Drehfeldverluste gerade das Doppelte, d. h. es gilt:

$$\frac{W^{Watt}}{V^{cdm}} = \overset{\circ}{\sigma}_w \cdot \left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{B}_{mitt}}{1000} \cdot h^{m/m} \right)^2 \qquad 53)$$

und

$$\overset{\circ}{\sigma}_w = \left(\frac{\pi^2}{10} \cdot \frac{\lambda}{6} \cdot f_\rho \right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{t_p}{H \cdot q} \cdot \frac{2}{2 + \frac{\pi H}{p\, t_p}} \right) = 2\, \tilde{\sigma}_w . \qquad 54)$$

IV. Praktische Beispiele.

Für die Anwendung der Theorie auf sinusförmig verteilte Wechselfelder oder Drehfelder brauche ich keine praktischen Beispiele durchzurechnen. Die reduzierten Blechbreiten, um die es sich dabei handeln kann, lassen sich nach den Untersuchungen des ersten Abschnittes genau genug übersehen, und im übrigen sprechen die Formeln und Kurven selbst eine deutliche Sprache. Höchstens ist eine Bemerkung über die Wirbelstromverluste in lamellierten Polschuhen am Platze. Denn hierüber herrschen in der Literatur unklare, wenn nicht gar irrtümliche Auffassungen. Rüdenberg[1]) zweifelt, ob es zulässig sei die Verluste der Zahnharmonischen ohne Berücksichtigung der „Hautwirkung" zu berechnen; Bragstad und La Cour[2]) vermuten eine Vergrößerung der Wirbelstromverluste durch die Feldverzerrung. — Wir ersehen aus Diagramm 8 bzw. Gleichung 14b; daß die tatsächlichen Verluste bei $\xi = 10$ nur noch 30% der ohne Berücksichtigung der Hautwirkung berechneten betragen, und ein Beispiel des ersten Kapitals zeigt uns, daß schon die Grundwelle des Zahnoberfeldes auf derart hohe reduzierte Blechstärken führt. Noch geringere Werte besitzt der Reduktionsfaktor für die höheren Zahnharmonischen, deren Amplituden zum Teil von der Größenordnung der Grundwelle sein können. Da jedoch die Wirbelstromverluste in lamellierten Polschuhen für die Arbeitsweise elektrischer Maschinen von untergeordneter Bedeutung sind, so wird man es in der Praxis mit den höheren Zahnharmonischen nicht so genau nehmen.

Nicht ganz so einfach liegen die Verhältnisse, wenn man die Theorie auf Hauptfeld-Formen anwenden will, die ausgeprägte Oberwellen besitzen. Sehen wir uns um, bei welchen Maschinentypen solche Felder eine große Rolle spielen, so kommen wir wieder auf die Hochfrequenzmaschinen: Aus gewissen Gründen ist es nämlich bei dem vorherrschend verwendeten 500-Perioden-Generator von Vorteil, wenn möglich mit rechteckigen, jedenfalls aber mit Spannungswellen von sehr steiler Wellenfront zu arbeiten. Man verwendet deshalb stets die Einlochwicklung und bemüht sich, möglichst rechteckige Feldformen zu erzeugen. Im folgenden will ich die Wirbelstromverluste der rechteckigen und angenähert rechteckigen Feldverteilung untersuchen. Natürlich muß ich dabei die Wirbelstromverluste der einzelnen Oberwellen superponieren, obwohl diese Rechenoperation eigentlich nur bei konstanter Permeabilität zulässig wäre.

Die Wirbelstromverluste einer rechteckigen Feldwelle. Nicht immer wird es notwendig sein, bei der Berechnung der Oberwellenverluste den Rückwirkungsvektor f_ρ einzuführen. Bei vielen gebräuchlichen Feldformen sind diese Verluste auch ohne Reduktion schon so gering, daß sich ihre genaue Berechnung nicht lohnt. Sie betragen beispielsweise für die dreieckförmige Feldverteilung nur etwa 5% von denen der Grundwelle. Daß wir aber jedenfalls bei der rechteckigen Feldform die abgeleitete Theorie berücksichtigen müssen, ist ohne weiteres selbstverständlich Denn andernfalls würde man für die Gesamtverluste einen unendlich hohen Wert berechnen.

[1]) „Energie der Wirbelströme" S. 83.
[2]) Arnold, Wechselstromtechnik Bd. I S. 422 u. f.

Digitized by Google

Das geht so zu: Für die spezifischen Verluste die Grundwelle $\hat{\hat{B}}_1$ gelten die Gleichungen (53/54); die Verluste irgendeiner Oberwelle $\hat{\hat{B}}_m$ sind sonach im Verhältnis

$$c_m = \frac{q_1}{q_m} \cdot m \left(\frac{\hat{\hat{B}}_m}{\hat{\hat{B}}_1} \right)^2 \cdot f_{\rho m} \qquad 55)$$

geringer. Den Faktor q_m (Gleichung 47) kann man für alle Harmonischen mit Ausnahme der Grundwelle gleich der Einheit setzen. Die totalen Wirbelstromverluste sind sonach im Verhältnis

$$c_t = 1 + q_1 \sum_{3,5}^{\infty} \left(m \frac{\hat{\hat{B}}_m^2}{\hat{\hat{B}}_1^2} \cdot f_{\rho m} \right) \qquad 56)$$

größer als die aus der Grundwelle abgeleiteten Verluste. Nun ist für die Rechteckswelle

$$\frac{\hat{\hat{B}}_m}{\hat{\hat{B}}_1} = \frac{1}{m}.$$

Somit wird

$$c_t = 1 + q_1 \sum_{3,5}^{\infty} \left(\frac{f \rho_m}{m} \right) \qquad 57)$$

oder bei Vernachlässigung der Hautwirkung ($f \rho_m = 1$)

$$c_{t0} = 1 + q_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \frac{1}{m} + \ldots \right) = \infty. \qquad 57a)$$

Ganz anders lautet das Resultat, wenn man für den Rückwirkungsfaktor die mitgeteilten Näherungsgleichungen benutzt, d. i. zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 3{,}5$

$$f'_{\rho m} = 1 - 0{,}0014\, \xi_m^4 = 1 - 0{,}0014\, \xi_1^4\, m^2 \qquad 14a)$$

und darüber hinaus

$$f''_{\rho m} = \frac{3}{\xi_m} = \frac{3}{\xi_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}. \qquad 14b)$$

Im ersten Abschnitt berechneten wir für die Grundwelle eines 500-Periodengenerators mit 0,35 mm starkem legiertem Ankerblech:

$$\xi_1 = 0{,}34.$$

Hierfür wäre also die erste Näherungsgleichung bis zur Harmonischen von der Ordnungszahl

$$m_{II} \doteq \left(\frac{3{,}5}{\xi_1} \right)^2 = 105 \qquad 58)$$

einschließlich anzuwenden.

Soweit ist alles klar. Die Frage ist nur: Wie summiert man eine unendliche Reihe von der Form:

$$U = \sum_{m_I,\, m_I + 2}^{m_{II}} \Phi(m),$$

bei der m alle ungeraden Werte zwischen den Grenzen m_I und m_{II} durchläuft? Die Antwort erteilt Fig. 24. Ich habe dort eine Funktion Φ (m) über den einzelnen ungeraden Zahlen aufgetragen und die Veränderlichkeit der Funktion durch einen treppenförmigen Linienzug markiert. Jedes einzelne Flächenelement besitzt die Basis 2 und die Höhe $\Phi(m)$. Die gesamte schraffierte Fläche beträgt also:

$$2 \sum_{m_I}^{m_{II}} \Phi(m),$$

und das ist gerade das Doppelte des gesuchten Summenwertes der unendlichen Reihe.

Digitized by Google

Nachdem wir die Auswertung einer unendlichen Reihe auf die Integration einer Fläche zurückgeführt haben, ist es klar, welchen Kurs wir weiterhin zu steuern haben. Man wird den treppenförmigen Linienzug durch die stetige Kurve

$$y = \Phi(m)$$

interpolieren, und diese Kurve zwischen den Grenzen

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= m_I - 1 \\ \text{und}\quad K_2 &= m_{II} + 1 \end{aligned}\right\} \qquad 59)$$

integrieren. Dann erhält man als Nährungswert:

$$U = \frac{1}{2}\int_{K_1}^{K_2} \Phi(m)\, dm. \qquad 60)$$

Nur darf man dabei eines nicht übersehen: Die Kurve $\Phi(m)$ muß sich zwischen den ungeraden Abzissen auch wirklich annähernd durch gerade Strecken wiedergeben lassen und darf nicht etwa — wie die durch Fig. 25 dargestellte Funktion — zwischen den ungeraden Abszissen stark ausgeprägte Maxima und Minima besitzen, welche der gebrochene Linienzug nicht andeutet. Bei den Beispielen dieses Abschnittes ist die Bedingung erfüllt; sie braucht es aber duchaus nicht immer zu sein.

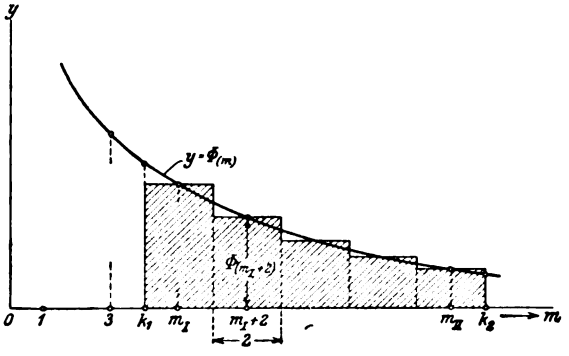


Fig. 24. Darstellung einer unendlichen Reihe durch eine Fläche.

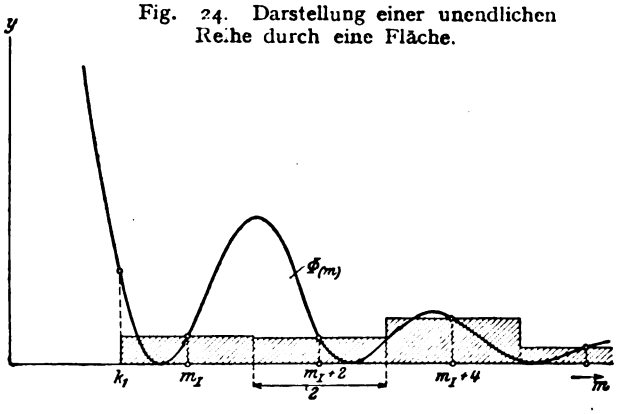


Fig. 25. Darstellung der unendlichen Reihe durch ein Integral unzulässig.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zur rechteckigen Feldwelle zurück, und versuchen wir, die Wirbelstromverluste der höheren Harmonischen mit Hilfe des mitgeteilten Kunstgriffes zusammenzufassen. Zwecks Erhöhung der Re hengenauigkeit empfiehlt es sich im allgemeinen, die Reihe erst mit der fünften Harmonischen zu beginnen, d. h. die Welle der dreifachen Periodenzahl getrennt zu berechnen. Denn die Ordinaten der $\Phi(m)$-Kurve sind stets in diesem Gebiet am größten, so daß ein kleiner Fehler schon verhältnismäßig viel ausmachen kann. In unserem Fall ist $\xi_3 = 0{,}59$ und $f\rho_3 = 1$. Wir schreiben daher

$$c_t = 1 + q_1\left(\frac{1}{3} + U\right) \qquad 56a)$$

und berechnen die unendliche Reihe zwischen K_1 und K_2 einerseits und K_2 und ∞ andererseits zu

$$U = \frac{1}{2}\int_{K_1}^{K_2} m\left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}_1}\right)^2 f'_{\rho m}\, dm + \frac{1}{2}\int_{K_2}^{\infty} m\left(\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}_1}\right)^2 f''_{\rho m}\, dm \qquad 61)$$

$$= \ln\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} - 0{,}00035\,\xi_1^4\,(K_2^2 - K_1^2) + 0{,}85. \qquad 62)$$

Digitized by Google

Daraus folgt mit

$$K_1 = 4, \quad K_2 = 106 \quad \text{und} \quad \xi_1 = 0{,}34:$$
$$U = 1{,}639 - 0{,}052 + 0{,}858 = 2{,}445.$$

Ferner:

$$c_t = 1 + q_1 \cdot 2{,}778;$$

und mit

$$q_1 = 0{,}78 \text{ entsprechend } p > 8 \text{ und } \frac{H}{t_p} = \frac{1}{3}$$

endgültig:

$$c_t = 3{,}16.$$

In unserm speziellen Falle beträgt also der gesamte Wirbelstromeffekt mehr als das Dreifache der durch die Grundwelle hervorgerufenen Verluste. Ich sage: „in unserm spezielle Falle". Denn c_t könnte ebensogut noch wesentlich größer ausfallen, wenn wir die reduzierte Blechstarke ξ_1 aus irgendeinem Grunde geringer gewählt hätten. — Im übrigen lehrt die Zahlenmäßige Auswertung, daß der durch den Faktor f'_p erzielten Korrektur keine praktische Bedeutung zukommt. (Der Wert von U wurde oben nur um 2% vermindert). Ich werde daher in Zukunft die Feldverdrängung bis zu

$$\xi_m \geq 3$$
$$\text{bzw. } K_2 \geq \left(\frac{3}{\xi_1}\right)^2 \qquad 58\,a)$$

vernachlässigen und erst jenseits dieser Grenze durch den Faktor f''_p in Rechnung setzen. Für die rechteckige Feldwelle ergibt sich auf diese Weise einfacher

$$c_t = 1 + q_1\left(1{,}33 + \ln\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\right). \qquad 62\,a)$$

Die Wirbelstromverluste einer trapezförmigen Feldwelle. Der Grenzfall der Feldwelle mit senkrechter Wellenfront wird niemals erreicht. Wohl aber kommen bei Hochfrequenzgeneratoren trapezförmige Wellen mit sehr steilem Anstieg vor. Es ist mehr als eine müßige mathematische Spielerei, wenn ich die Untersuchung auch auf diesen Fall ausdehne. Denn es wird sich zeigen, daß der Wirbelstromeffekt der höheren Harmonischen mit der Abschrägung der Wellenstirn sehr schnell abnimmt.

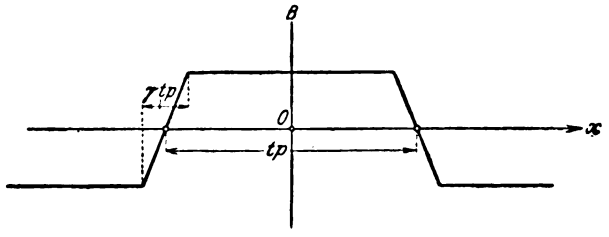


Fig. 26. Trapezförmige Feldwelle.

Für eine Trapezwelle nach Fig. 26, die über dem Bogen $\gamma\, t_p$ schräg ansteigt, ist das Verhältnis einer Oberwelle zur Grundwelle

$$\frac{\hat{B}_m}{\hat{B}_1} = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\sin m\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}.$$

Demgemäß ist für die charakteristische Funktion $\Phi(m)$ der Ausdruck

$$\Phi_{(m)} = \frac{1}{m^3} \cdot \left[\frac{\sin m\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}\right]^2 f_{\rho\, m}$$

einzuführen. Das ist nun zwar eine periodische Funktion, wie sie etwa Fig. 25 darstellt. Doch liegen für $\gamma \leq \frac{1}{3}$ die ungeraden Abszissen m_1, $m_1 + 2$ ... so nahe beieinander, daß

Digitized by Google

die unendliche Reihe trotzdem genau genug durch das entsprechende Intregral ersetzt werden kann. Vernachlässigt man zwischen m_I und m_{II} die Feldverdrängung durch die Wirbelströmung, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} c_t' &= 1 + q_1\left[\frac{1}{27}\left(\frac{\sin 3\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}\right)^2 + U'\right] \\ U' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}\right)^2 \cdot \left[\frac{1-\cos m\pi\gamma}{(m\pi\gamma)^2} + \frac{\sin m\pi\gamma}{m\pi\gamma} - \mathrm{Ci}(m\pi\gamma)\right]_{K_2}^{K_1=4} \end{aligned}\right\} \quad 63)$$

Die Wirbelstromverluste aller höheren Harmonischen umfaßt der Koeffizient

$$\left.\begin{aligned} c_t'' &= q_1 U'' \\ U'' &= 0{,}133\left(\frac{\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi\gamma}{2}}\right)^2 \cdot \\ &\left[3\frac{1-\cos m\pi\gamma}{(m\pi\gamma)^2} + 2\frac{\sin m\pi\gamma}{m\pi\gamma} + 4\cos m\pi\gamma + 2\pi\sqrt{2m\gamma}\,(2S(m\gamma\pi) - 1)\right]^{K_2} \end{aligned}\right\} \quad 64)$$

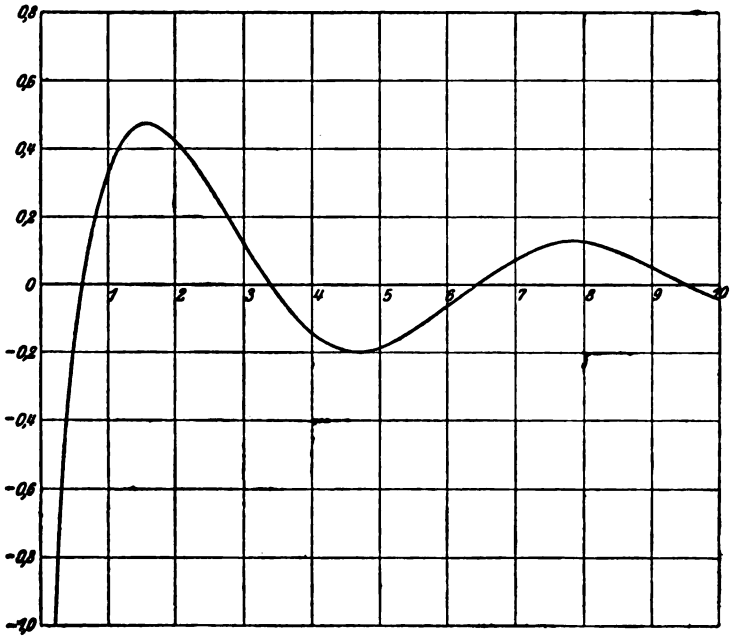


Fig. 27. Darstellung des Integralkosinus $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$.

Für den in Gleichung (63) auftretenden Intregralkosinus

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos v}{v}\,dv$$

Digitized by Google

sowie das Fresnelsche Intregral in Gleichung (64)

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \quad .$$

zieht man am besten Funktionentafeln zu Rate (vgl. z. B. Funktionentafeln von Dr. Jahnke und Emde, Teubner 1909). Wer solche nicht besitzt, kann die Auflösung mit genügender Genauigkeit den Diagrammen 27 und 28 entnehmen. Für $x \geq 2\pi$ darf man mit guter Annäherung setzen:

$$Ci(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

$$S(x) = 0{,}5 - \cos x \frac{1 - \frac{3}{4x^2}}{\sqrt{2\pi x}} - \sin x \frac{1}{2x\sqrt{2\pi x}} \cdot$$

Infolgedessen vereinfachen sich unsere letzten Gleichungen für

$$K_2 \gamma \geq 2$$

ganz wesentlich, und zwar stellt sich heraus:

$$U' = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \right)^2 \cdot \left\{ \left[\frac{1 - \cos 4\pi\gamma}{(4\pi\gamma)^2} + \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma} - Ci(4\pi\gamma) \right] - \frac{1}{(K_2 \pi\gamma)^2} \right\} \quad 63a)$$

$$U'' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \right)^2 \cdot \frac{0{,}8}{(K_2 \pi\gamma)^2}, \quad 64a)$$

somit

$$U = U' + U'' \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \right)^2 \cdot \left[\frac{1 - \cos 4\pi\gamma}{(4\pi\gamma)^2} + \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma} - Ci(4\pi\gamma) \right]$$

und

$$c_t = c_t' + c_t'' = 1 + q_1 \left[\frac{1}{27} \left(\frac{\sin 3\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \right)^2 + U \right] . \quad 65)$$

Das sind aber genau dieselben Formeln, die wir erhalten hätten wenn wir in Gleichung (63) die untere Grenze K_2 bis ins Unendliche erstreckt, d. h. die Wirbelstromverluste sämtlicher Harmonischen ohne Berücksichtigung der Hautwirkung berechnet hätten. Man muß daraus schließen, daß diese Hautwirkung für den Gesamteffekt überhaupt unerheblich ist, sobald der Anstieg der Feldwelle

$$\gamma \geq \left(\frac{2}{K_2} \right) = 2 \left(\frac{\xi_1}{3} \right)^2 \quad 66)$$

gemacht wird. Ein einfaches Zahlenbeispiel mag uns noch zeigen, welche Verteilung der Verluste wir in diesem Falle zu erwarten haben.

Greifen wir auf die bereits mehrfach benutzten Werte eines 500-Perioden-Generators zurück. Sein Stator ist aus 0,35 mm starken legierten Blechen geschichtet und besitzt eine reduzierte Blechstärke $\xi_1 = 0{,}34$. Dann ist die magnetische Rückwirkung der Wirbel-

Digitized by Google

ströme im Ankerkern zu vernachlässigen, wenn die Abschrägung der Wellenfront die Grenze

$$\gamma_{min} = 2 \cdot \left(\frac{0{,}34}{3}\right)^2 = \frac{1}{40}$$

überschreitet. Wir wählen aus anderen Rücksichten

$$\gamma = \frac{1}{12},$$

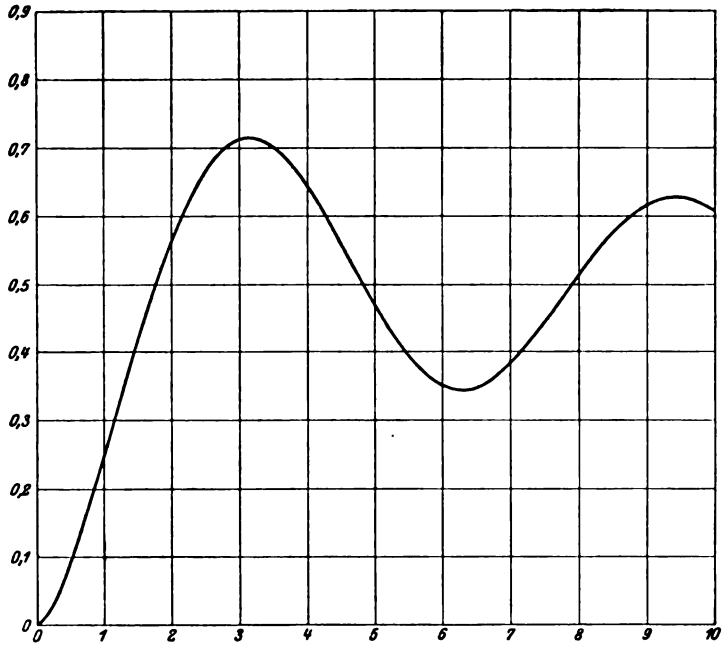


Fig. 28. Darstellung des Fresnelschen Integrals $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$.

dürfen also von der Näherungsgleichung (65) Gebrauch machen. Diese liefert:

$$U = \frac{1}{2} \cdot 1{,}005 \cdot [0{,}458 + 0{,}828 - 0{,}361] = 0{,}465$$

$$\frac{1}{27} \cdot \left(\frac{\sin 3\frac{\pi\gamma}{2}}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \right)^2 = 0{,}318.$$

Somit wird:

$$c_t = 1 + q_1\, 0{,}783$$

und für $q_1 = 0{,}78$

$$c_t = 1{,}61.$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß schon die geringe Abschrägung der Feldschwelle um $\gamma = \frac{1}{12}$ genügt, um die Wirbelstromverluste der höheren Harmonischen in mäßigen Grenzen zuhalten.

Zusammenfassung.

Die Thomsonsche Theorie der Wirbelströmung in Transformatorblechen wird auf ähnliche Vorgänge in Dynamoankern ausgedehnt. Die Hauptergebnisse lassen sich übertragen, einige Umformungen und Erweiterungen ergänzen das Bild.

Digitized by Google

Die magnetische Leitfähigkeit im Hochfrequenzmaschinenbau.

Von

Heinrich Faßbender.

Einleitung. Bei statischer und dynamischer Magnetisierung ist die magnetische Leitfähigkeit durch die Grundgleichung des magnetischen Kreises

$$\Phi = 0{,}4 \cdot \pi \cdot (N \cdot i) \cdot \Lambda$$

definiert. Die magnetische Leitfähigkeit ist für den Fall der statischen Magnetisierung in einfacher Weise zu berechnen. Es ist nämlich

$$\Lambda = \mu \cdot \frac{S}{l}.$$

Sobald Wirbelströme auftreten, gilt dieser einfache Zusammenhang zwischen dem Induktionsfluß Φ und der magnetomotrischen Kraft $0{,}4 \cdot \pi\,(N \cdot i)$ nicht mehr.

In der praktischen Elektrotechnik setzt man bekanntlich für Kreise mit Wechselstromerregung

$$\Phi_{max} = 0{,}4\,\pi \cdot N \cdot J_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \Lambda.$$

Hierin steckt zunächst die Annahme, daß der Magnetisierungsstrom bei sinusförmiger Induktion ebenfalls sinusförmig ist. Die magnetische Leitfähigkeit definiert man ebenso wie bei der statischen Magnetisierung und entnimmt aus der statischen Magnetisierungskurve den zu Φ_{max} gehörigen Wert der Permeabilität. Innerhalb der angestrebten Genauigkeit ist man dazu auch berechtigt, da bei 50 Perioden und einer Blechstärke von 0,5 mm der Einfluß der Wirbelströme vernachlässigt werden darf (wohlgemerkt der Einfluß der Wirbelströme auf die magnetische Leitfähigkeit und nicht auf die Verluste).

Im Hochfrequenzmaschinenbau ist diese Annahme unberechtigt. Trotzdem bietet es Vorteile, auch hier den Begriff der magnetischen Leitfähigkeit beizubehalten. Für die magnetische Leitfähigkeit im Hochfrequenzkreis werde ich bestimmte Formeln angeben. Bei Anwendung dieser Formeln kann der magnetische Kreis bei Hochfrequenz genau so behandelt werden wie bei niederen Frequenzen, ohne daß man sich um die Ursache der Veränderung der Leitfähigkeit, der sogenannten magnetischen Hautwirkung, weiter zu kümmern braucht.

Die Voraussetzung, von der wir ausgehen, ist ein hochfrequenter sinusförmiger magnetischer Fluß. Dieser kann entweder dadurch entstanden sein, daß ein magnetischer Kreis mit konstanter magnetischer Leitfähigkeit durch einen hochfrequenten Strom erregt wird, oder dadurch, daß bei konstanter Erregung die magnetische Leitfähigkeit hochfrequenten Charakter hat. Der letzte Fall trifft bei den Hochfrequenzmaschinen nach dem Induktortyp zu. Jedoch auch hier ist nur der Gesamtwert der magnetischen Leitfähigkeit des geschlossenen magnetischen Kreises eine periodische Funktion infolge der periodischen Vertauschung eines Zahns mit einer Zahnlücke. Die magnetische Leitfähigkeit der übrigen Teile des magnetischen Kreises ist zeitlich konstant und außer von Material und Dimensionen nur von der Frequenz des Flusses abhängig. Für diesen ist es aber gänzlich gleichgültig, ob die Erregung in der beschriebenen Weise durch Gleichstrom oder durch Hochfrequenzstrom erfolgt. Wir können also bei unsern folgenden Betrachtungen den begrifflich einfacheren Fall eines konstanten Werts der magnetischen Leitfähigkeit und eine hochfrequente Erregung annehmen. Ein Unterschied besteht allerdings zwischen beiden Fällen. Bei der Wechselstromerregung pendelt die Induktion um den Mittelwert Null, bei der Gleichstromerregung behält der Fluß stets das gleiche Vorzeichen. Da wir jedoch bei den theoretischen Betrachtungen gezwungen sind, ein konstantes mittleres μ anzunehmen, so folgt hieraus keinerlei Verschiedenheit in der

Digitized by Google

Behandlung beider Fälle. Als Mittelwert wird man naturgemäß den arithmetischen Mittelwert der statischen Magnetisierungsschleife wählen, die zwischen den gleichen extremen Werten der Induktion aufgenommen ist.

Die theoretische Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit eines beliebigen Teils des magnetischen Kreises unter Berücksichtigung des Einflusses der Wirbelströme läßt sich nur unter gewissen Voraussetzungen verhältnismäßig einfach mathematisch behandeln; einmal unter der Annahme, daß wir ein massives Material von kreisrundem Querschnitt haben, und zweitens, daß wir Bleche oder Blechpakete haben, bei denen die Breite der Bleche groß ist gegen die Dicke der Bleche. Bei der Durchrechnung der einzelnen Teile des magnetischen Kreises wird man die eine oder andere Annahme stets machen dürfen, ohne sich von der Wirklichkeit allzusehr zu entfernen.

In der folgenden Betrachtung werde ich beide Fälle getrennt durchführen.

1. Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit bei Hochfrequenz und kreisrundem Querschnitt des Materials. Ich kann in diesem Abschnitt auf meine Arbeit über das Verhalten der Heuslerschen Legierungen bei Hochfrequenz[1]) verweisen und beschränke mich auf die Einführung des Begriffs der magnetischen Leitfähigkeit. Die Rechnung, die dort durchgeführt ist, gilt für einen geschlossenen streuungslosen Ring. Unter gewissen Annahmen, die ich hier nicht zu erwähnen brauche, weil ich sie bei der Durchrechnung der Leitfähigkeit der Bleche nochmals diskutieren muß, ergab sich für den Zusammenhang der Feldstärke $\mathfrak{H}_\rho$ für einen Zylinder mit dem Radius ρ und der Feldstärke $\mathfrak{H}_r$ auf der Oberfläche des Materials, d. h. der magnetomotorischen Kraft (beide gemessen in absoluten Einheiten) die folgenden Gleichungen (vgl. die oben angeführte Arbeit S. 486 oben)

$$\frac{\mathfrak{H}_\rho}{\mathfrak{H}_r} = \frac{\mathrm{ber}\,(m\,\rho) + j\,\mathrm{bei}\,(m\,\rho)}{\mathrm{ber}\,(m\,r) + j\,\mathrm{bei}\,(m\,r)}, \qquad 1)$$

wo

$$m^2 = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}$$

(s ist der spez. Widerstand in absoluten Einheiten), oder wenn man zu den Effektivwerten übergeht:

$$\frac{H_\rho}{H_r} = \left(\frac{\mathrm{ber}^2\,(m\,\rho) + \mathrm{bei}^2\,(m\,\rho)}{\mathrm{ber}^2\,(m\,r) + \mathrm{bei}^2\,(m\,r)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 2)$$

Durch Integration über ρ erhält man für die Gesamtzahl aller Feldlinien, effektiv gemessen, in absoluten Einheiten (vgl. Gl. IIb S. 487 der angeführten Arbeit)

$$Z = \frac{2\pi \cdot H_0 \cdot r}{m}\,(\mathrm{bei}'^2\,(m\,r) + \mathrm{ber}'^2\,(m\,r))^{1/2}. \qquad 3)$$

Hierin ist

$$H_0 = H_r\,(\mathrm{ber}^2\,(m\,r) + \mathrm{bei}^2\,(m\,r))^{-\frac{1}{2}} \qquad 4)$$

(Gl. III S. 487 der ang. Arbeit). Setzt man den Wert für H_0 aus Gleichung (4) in Gleichung (3) ein, so ergibt sich

$$\frac{Z}{H_r} = \frac{2\,r\,\pi}{m}\,\frac{(\mathrm{bei}'^2\,(m\,r) + \mathrm{ber}'^2\,(m\,r))^{1/2}}{(\mathrm{ber}^2\,(m\,r) + \mathrm{bei}^2\,(m\,r))^{1/2}}. \qquad 5)$$

Die Ableitung der Gleichungen ist der angeführten Arbeit zu entnehmen. Durch Multiplikation mit dem mittleren, konstant angenommenen μ erhält man aus der gesamten Feldlinienzahl den magnetischen Fluß

$$\Phi_{eff} = \mu \cdot Z \qquad \text{oder} \qquad Z = \frac{\Phi_{eff}}{\mu}. \qquad 6)$$

[1]) Vgl. Archiv f. El. II, 11, S. 475 ff; 1914.

Digitized by Google

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (5) ein, so ergibt sich für unsere Voraussetzung: sinusförmige Kurve von Φ und $\mathfrak{H}$

$$\frac{\Phi_{max}}{H_{r\,max}} = \frac{\Phi_{eff}}{H_{r\,eff}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu}{m} \frac{(bei'^2(m\,r) + ber'^2(m\,r))^{1/2}}{(ber^2(m\,r) + bei^2(m\,r))^{1/2}}. \qquad 7)$$

Darin ist H_r in absoluten Einheiten einzusetzen. Nun ist

$$H_{r\,max} = \frac{0{,}4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}}{l} \text{ (J gemessen in Amp.).}$$

Man erhält also

$$\frac{\Phi_{max}}{0{,}4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \frac{(bei'^2(m\,r) + ber'^2(m\,r))^{1/2}}{(ber^2(m\,r) + bei^2(m\,r))^{1/2}} = \Lambda. \qquad 8)$$

Für den Wert μ setzen wir den arithmetischen Mittelwert aus der statischen Magnetisierungskurve mit der gleichen maximalen Induktion ein, als sich jeweils aus dem maximalen Fluß und dem Querschnitt unter der Annahme einer gleichmäßigen Induktion ergibt. Abgesehen davon, daß wir entgegen der Wirklichkeit einen konstanten μ-Wert einsetzen, hat das zur Voraussetzung, daß die Werte der wahren Permeabilität von der Frequenz unabhängig sind. Gegen die Annahme einer konstanten Permeabilität hat man in der Elektrotechnik wenig Bedenken, da man dieselbe Annahme auch sonst in der Wechselstromtechnik zu machen gezwungen ist und eine genügende Übereinstimmung der Berechnung mit der Messung erhält. Anders verhält es sich damit, daß wir einen der statischen Kurve entnommenen Mittelwert der Permeabilität einsetzen. Man neigt bei oberflächlicher Überlegung zunächst zu der Annahme, daß man einen der dynamischen Kurve entnommenen Mittelwert einsetzen müßte. Das wäre jedoch gerade ein Fehler. Die dynamischen Magnetisierungskurven stellen keineswegs den Zusammenhang zwischen der Feldstärke und der Induktion für ein gewisses Raumelement dar, sondern vielmehr den Zusammenhang zwischen der aus der Wicklung berechneten Durchflutung einerseits und dem gesamten Induktionsfluß, oder einer unter der Annahme gleichmäßiger Verteilung berechneten mittleren Induktion andrerseits. Dieser Wert der Feldstärke gilt nur für die Raumelemente der Oberfläche, während die mittlere Induktion nur in einer Zylinderfläche, die irgendwo im Innern liegt, vorhanden ist. Ein etwa der dynamischen Magnetisierungskurve entnommener Wert der Permeabilität wäre also begrifflich etwas ganz anderes als die „wahre" Permeabilität für ein bestimmtes Raumelement, die wir als das Verhältnis der wirklich dort vorhandenen Induktion zu der ebenfalls dort wirklich vorhandenen Feldstärke definieren. Meine Ansicht geht dahin, daß für ein bestimmtes Raumelement die wahre Permeabilität von der Frequenz unabhängig ist. Diese Behauptung läßt sich allerdings wohl kaum direkt beweisen, da diese Permeabilität dem Experiment nicht zugänglich ist. Ich möchte auch die Frage dahingestellt sein lassen, ob die Konstanz der so definierten Permeabilität auch für äußerst hohe Frequenzen erhalten bleibt. Für Frequenzen bis 150000 sehe ich mich dazu berechtigt, da ich unter dieser Annahme in meiner Arbeit über Heuslersche Legierungen eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten der mittleren Induktion erhalten habe.

Die Gleichung (8) ist also nichts weiter als ein Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit, bezogen auf den gesamten magnetischen Kreis.

Betrachtet man nur einen Teil des gesamten Kreises, so ist für l die Länge des betreffenden Stücks einzusetzen. $N \cdot J$ ist dann die Zahl der notwendigen Amperewindungen oder die Größe der Durchflutung, um den Fluß durch dieses Stück des Kreises hindurchzudrücken. In der Praxis des Hochfrequenzmaschinenbaus nimmt das Argument m r nur sehr große Werte an. Für diese sind die ber- und bei-Funktionen in den Tabellen nicht angegeben. Wie ich zeigen werde, ist in diesen Fällen die Berechnung aber gerade

Digitized by Google

besonders einfach, da wir alsdann für die ber- und bei- Funktionen Näherungswerte einsetzen dürfen. Diese Näherungsformeln für die ber- und bei- Funktionen lauten:

$$\text{ber}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right),$$

$$\text{bei}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right),$$

$$\text{ber}'\,(x) = \text{ber}\,(x)\left\{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right\},$$

$$\text{bei}'\,(x) = \text{bei}\,(x)\left\{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\text{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right)\right\}.$$

Setzt man diese Werte in unsere Formel (8) ein, so hebt sich der Faktor

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^2$$

im Zähler und Nenner fort. Der Nenner hat dann die Form

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha, \quad \text{wo} \quad \alpha=\left(\frac{m\,r}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right),$$

er ist also $= 1$.

Wir erhalten folgenden Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit:

$$\Lambda=\frac{2\pi\cdot r\cdot\mu}{m\cdot l}\sqrt{\left(\cos^2\alpha\left\{-\frac{1}{2\,m\,r}+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\text{tg}\,\alpha)\right\}^2+\sin^2\alpha\left\{-\frac{1}{2\,m\,r}+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{ctg}\,\alpha)\right\}^2\right)}.$$

Hieraus ergibt sich unschwer folgender besonders einfache Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit:

$$\Lambda=\pm\frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\mu}{m\cdot l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\cdot m\cdot r}\right). \qquad 8a)$$

Von diesen beiden Werten hat nur der positive praktische Bedeutung.

2. Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit bei Hochfrequenz in Blechen und Blechpaketen. Für diesen Fall, der im Hochfrequenzmaschinenbau gerade besondere praktische Bedeutung hat, werde ich im folgenden aus den Maxwellschen Gleichungen die Formeln für die magnetische Hautwirkung und damit den Einfluß der Wirbelströme auf die magnetische Leitfähigkeit ableiten, wie ich es in der oben erwähnten Arbeit für kreisrunden Querschnitt des Materials getan habe. Es zeigt sich, daß die Differentialgleichung nicht wie dort auf Besselsche Funktionen, sondern auf die bekannteren Exponentialfunktionen führen.

Wir setzen bei der Ableitung voraus, daß die Dicke der Bleche gegenüber der Breite vernachlässigt werden kann. Figur 1 stelle den Querschnitt des Bleches dar, die Induktionslinien verlaufen senkrecht zur Papierebene.

In dem Querschnitt des Bleches greifen wir ein Rechteck A B C D heraus. Die Seiten A B und C D seien parallel zur Oberfläche des Blechs und beide gleich der Längeneinheit. Die Strecke D E sei gleich ρ, und die Seiten A D und B C seien gleich $d\rho$. Auf dieses Rechteck wenden wir das Induktionsgesetz

$$\int_0 \mathfrak{E}_s\,ds = -\frac{d}{dt}\int \mu\,\mathfrak{H}\,df$$

an, und man erhält, wobei sich die Integrale längs der Seiten A D und C B aufheben,

Digitized by Google

$$\mathfrak{E}_{(\rho + d\rho)} - \mathfrak{E}_\rho = -\frac{d}{dt}(\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho)\, d\rho.$$

Die linke Seite läßt sich unter Anwendung des Taylorschen Satzes vereinfachen, und man erhält:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial \rho} = -\frac{d}{dt}(\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho). \qquad 10)$$

Figur 2 stellt einen Schnitt senkrecht zum Schnitt der Abbildung 1 dar.

Bei Figur 2 fällt der Vektor $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Papierebene, während der Vektor $\mathfrak{H}$ in

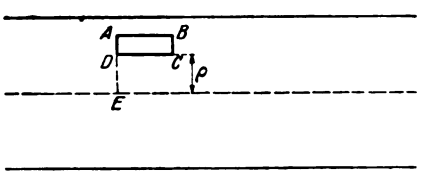


Fig. 1.

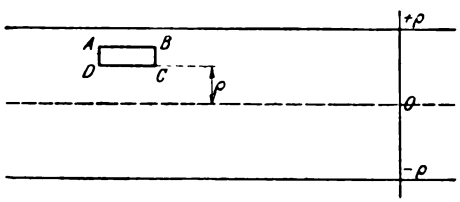


Fig. 2.

der Papierebene liegt. In dem Rechteck A B C D sind die Seiten A B und C D gleich 1 gewählt. A D und B C = $d\rho$. Auf dieses Rechteck wende man das Grundgesetz des Elektromagnetismus

$$\int \mathfrak{H}_s\, ds = \frac{4\pi}{s} \int_{F} \mathfrak{E} \cdot df$$

an und man erhält (auch hier heben sich die Integrale längs der Seiten A D und B C auf)

$$\mathfrak{H}_\rho - \mathfrak{H}_{(\rho + d\rho)} = \frac{4\pi}{s} \mathfrak{E}_\rho \cdot d\rho$$

oder

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho} = \frac{4\pi}{s} \cdot \mathfrak{E}_\rho \qquad 11)$$

Aus Gleichung (10) und (11) eliminiere man $\mathfrak{E}_\rho$ und man erhält

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s} \frac{d}{dt}(\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho) = 0, \qquad 12)$$

oder wenn man die Differentation nach t ausführt,

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s}\left(\mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial t} + \mathfrak{H}_\rho \frac{\partial \mu}{\partial t}\right) = 0. \qquad 13)$$

Diese Gleichung ist mathematisch einfacher als die entsprechende Gleichung für den Fall des kreisrunden Querschnitts, da sie den ersten Differentialquotienten nicht enthält. Die Hauptschwierigkeit bleibt jedoch bestehen, die in dem Variablen μ liegt. Bei der Lösung der Differentialgleichung mache ich die gleichen Voraussetzungen wie bei kreisrundem Querschnitt des Materials, nämlich

1. $\mathfrak{H}_\rho$ sinusförmig,
2. μ konstant,
3. die wahre Permeabilität eines Raumelementes ist von der Frequenz unabhängig.

Unter diesen Voraussetzungen kann ich die Gleichung (12) auch in der Form schreiben

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s} \mu \cdot \omega \cdot j\, \mathfrak{H}_\rho = 0. \qquad 13a)$$

Digitized by Google

Ähnlich wie wir in der erwähnten Arbeit die Differentialgleichung für den magnetischen Hauteffekt in kreisrundem Material auch unmittelbar aus der Differentialgleichung für das entsprechende Problem des elektrischen Hauteffekts durch bloße Abbildung der von einem Wechselfeld induzierten elektrischen Strömung durch ein elektromagnetisches Feld unmittelbar abgeleitet haben (vgl. S. 488 oben), so können wir auch hier bei blechförmigem Querschnitt den gleichen Weg einschlagen.

Man kennzeichne auch hier die elektrische Strömung und Feld beim elektrischen Hauteffekt durch den Index el, magnetische Strömung und Feld beim magnetischen Hauteffekt durch den Index magn.

Nach Orlich, Theorie der Wechselströme, Gl. 15, erste Gleichung, S. 93, ist

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}_{el}}{\partial \rho^2} = \frac{4\pi\omega}{s} \cdot j \cdot \mathfrak{C}_{el},$$

wo $\mathfrak{C}_{el}$ die Stromdichte und s den spezifischen Widerstand bedeutet. Statt σ ist hierin nach unserer Bezeichnung s, statt der Ordinate y der Buchstabe ρ gesetzt.

Diese Gleichung 15 war für einen Kupferleiter, d. h. $\mu = 1$, abgeleitet. Wir haben hier den allgemeineren Fall eines Eisenleiters anzunehmen.

In der ersten Gleichung auf S. 93 muß deshalb statt

$$\frac{\partial(\mathfrak{H}\, dy)}{\partial t} \text{ der Ausdruck } \frac{\partial(\mu\, \mathfrak{H}\, dy)}{\partial t}$$

treten. Dementsprechend ergibt sich für die Gleichung (15) die Form:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}_{el}}{\partial \rho^2} = \frac{4\pi \cdot \omega}{s} \cdot \mu \cdot j\, \mathfrak{C}_{el}.$$

Nach dem Rogowskischen Satz[1]) setzt man

$$4\pi\, \mathfrak{C}_{magn} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{B}_{el}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mu \equiv \sigma = \frac{1}{s};$$

alsdann wird

$$\mathfrak{C}_{el} \equiv \mathfrak{B}_{magn}.$$

Man erhält in unserm Fall

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{magn}}{\partial \rho^2} = \frac{4\pi\omega\mu}{s} j\, \mathfrak{B}_{magn}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} = \frac{4\pi\omega}{s} \cdot \mu \cdot j\, \mathfrak{H}_\rho.$$

Führt man in (13a) die Größe $m^2 = \frac{4\pi\mu\omega}{s}$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - m^2 \cdot j\, \mathfrak{H}_\rho = 0. \qquad 14)$$

Die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\mathfrak{H}_\rho = f\, e^{m(1+j)\rho} + g \cdot e^{-m(1+j)\rho}.$$

Hierin sind f und g beliebige Integrationskonstanten. Für $\rho = 0$ wird $\mathfrak{H}_0 = f + g$.

Wenn g von Null verschieden ist, so müßte $f = -g$ sein, da aus Symmetriegründen $\mathfrak{H}_\rho = \mathfrak{H}_{-\rho}$ sein muß. Das ergäbe aber $\mathfrak{H}_0 = 0$, was der Wirklichkeit widerspricht. Die einzige für uns mögliche Lösung ergibt sich also für die Konstanten

$$g = 0,$$
$$f = \mathfrak{H}_0.$$

[1]) Vgl. Rogowski, E und M. S 925; 1911.

Digitized by Google

Man hat also

$$\mathfrak{H}_\rho = \mathfrak{H}_0 \cdot e^{m(1+j)\rho}, \qquad 15)$$

es ist also

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_0 \cdot e^{m(1+j)r}. \qquad 16)$$

Durch Divison von (15) durch (16) erhält man

$$\frac{\mathfrak{H}_\rho}{\mathfrak{H}_r} = e^{m(\rho-r)+j\cdot m(\rho-r)},$$

oder wenn man zu den Effektivwerten übergeht,

$$\frac{H_\rho}{H_r} = e^{m(\rho-r)} \quad \text{oder} \quad H_\rho = H_r \cdot e^{m(\rho-r)}.$$

Nun ist die gesamte Feldlinienzahl

$$Z = 2 \int_0^{\rho=r} H_\rho \cdot b \cdot d\rho,$$

wo b die Breite des Blechs senkrecht zur Richtung der Induktionslinien bedeutet, oder

$$Z = 2 \cdot b \cdot e^{-mr} \cdot H_r \int_0^r e^{m\rho} \cdot d\rho.$$

Wenn man die Integration ausführt und die Grenzen einsetzt, erhält man

$$Z = \frac{2\,b \cdot H_r}{m}\left(1 - e^{-m\cdot r}\right) \qquad 17)$$

und somit

$$\Phi_{max} = \mu \cdot Z\sqrt{2} = \mu \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot H_r}{m}\left(1 - e^{-m\cdot r}\right) \qquad 18)$$

und

$$\frac{\Phi_{max}}{0{,}4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}} = \frac{\mu \cdot 2 \cdot b}{m \cdot l}\left(1 - e^{-m\cdot r}\right) = \Lambda. \qquad 19)$$

Diese Formel kann ebenso wie Formel (8a) für geschlossene magnetische Kreise oder für Teile eines solchen Kreises angewandt werden. Bei Blechpaketen ist die Rechnung für ein Blech durchzuführen und das Resultat mit der Anzahl der Bleche zu multiplizieren.

3. Durchrechnung eines speziellen Falls. Der magnetische Kreis ist durch die nebenstehende Abbildung gekennzeichnet.

Ich werde bei dieser Durchrechnung die Streuung nicht berechnen, da diese Berechnung gegenüber der gleichen Betrachtung bei 50 Perioden nichts neues bieten würde. Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Überlegung, daß alle Streulinien in Luft verlaufen müssen und dort Wirbelströme, die Ursache der magnetischen Hautwirkung, nicht auftreten können. Immerhin habe ich, wenn auch willkürlich, die Streuung dadurch berücksichtigt, daß ich die Flüsse in den verschiedenen Teilen des magnetischen Kreises verschieden angenommen habe. In den Schlußstücken, die aus legierten Blechen bestehen mögen, entsprechend dem magnetischen Kreis einer Hochfrequenzmaschine nach dem Induktortyp, nehme ich einen max. Fluß von 2500 Maxwell an. Die Blechstärke sei 0,03 mm. Das Verhältnis von Eisenquerschnitt zu Papierisolation sei 1 : 1. Der Eisenquerschnitt der Blechpakete ist also 5 qcm. Wir haben also eine maximale (zeitlich gemeint) Induktion = $\mathfrak{B}_{max}$ = 500 Maxwell anzunehmen. Das ist vom Standpunkt der 50-Perioden-Technik zwar eine außerordentlich geringe Induktion, für Hochfrequenz wegen der außerordentlich gesteigerten Verluste aber durchaus angemessen. Im Luft-

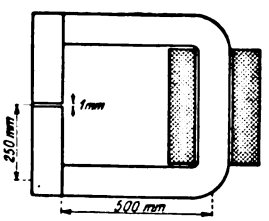


Fig. 3.

Digitized by Google

spalt nehmen wir dieselbe Induktion an. In den Schenkeln und dem Joch sei die Induktion unter willkürlicher Berücksichtigung der Streuung = 2500 + 20% = 3000 Linien. Der Querschnitt von Joch und Schenkel ergibt sich aus der Zeichnung zu 78,5 cm². Wir nehmen dabei an, daß der runde Schenkelquerschnitt an den Enden vierkantig geschmiedet ist, um die konstruktive Ausführung, um die wir uns in dieser Arbeit im übrigen nicht zu kümmern brauchen, zu erleichtern. Bei der Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit vernachlässigen wir dies jedoch. Ebenso vernachlässigen wir die magnetische Leitfähigkeit der unvermeidlichen Luftspalte zwischen Schenkel und Blechpaketen, da diese keine Rolle spielen im Vergleich zu dem Luftspalt zwischen den beiden Blechpaketen. Demzufolge beträgt die mittlere Induktion von Joch und Schenkel 38,2 Maxwell. Diese Induktion erscheint auch für Hochfrequenz außerordentlich klein, man muß aber bedenken, daß wir massives Schmiedeeisen als Material verwenden wollen, daß man also mit einer außerordentlich hohen Hautwirkung von vornherein rechnen muß, also die Beanspruchung des Eisens an der Oberfläche sehr viel höher wird, als der mittleren Induktion entspricht.

Wir nehmen weiter an, daß die Wicklung nur auf dem Joch sitzen und daß die Induktion eine Frequenz = 10 000 haben soll. Wie ich eingangs auseinandergesetzt, können wir der Einfachheit wegen voraussetzen, daß die hochfrequente Induktion dadurch erzeugt wird, daß die Wicklung von einem hochfrequenten Strom der gleichen Frequenz durchflossen wird. Ich möchte aber nochmals darauf hinweisen, daß wir gerade so gut annehmen könnten, daß die Erregung durch Gleichstrom erfolgte, und daß die hochfrequente Induktion, wie bei den Hochfrequenzmaschinen, nach dem Induktortyp durch eine periodisch veränderliche Leitfähigkeit des gesamten magnetischen Kreises erzeugt werden könnte.

Konstruktiv hätte man sich dies also so vorzustellen, daß an Stelle der festen Blechpakete ein rotierender gezahnter Anker tritt. Diesen Fall hoffe ich in einer späteren Arbeit bei der Durchrechnung einer fertigen Hochfrequenzmaschine berücksichtigen zu können.

Die Berechnung der notwendigen Amperewindungen oder der Durchflutung trennen wir naturgemäß in die Berechnung der notwendigen Durchflutung für den Luftspalt, die Schlußstücke aus legiertem Blech und endlich Joch und Schenkel.

a) Berechnung der für den Luftspalt erforderlichen Durchflutung. Der Tatsache, daß sich die Induktionslinien im Luftspalt ausbauchen, tragen wir dadurch Rechnung, daß wir für den Luftspalt einen um 50% erhöhten Querschnitt einsetzen.

Es ist somit

$$S_l = 15 \text{ cm}^2,$$
$$l_l = 0{,}1 \text{ cm},$$
$$\mu = 1.$$

Für den Luftspalt gilt die einfache Beziehung

$$\Lambda_l = \frac{\mu \cdot S}{l} = 150,$$

$$\Phi_{l\,max} = 2500.$$

Aus dem Wert für Φ_l und Λ_l berechnet sich die Anzahl der für den Luftspalt erforderlichen Amperewindungen zu

$$N \cdot J_{eff} = 9{,}4.$$

b) Berechnung der für die Schlußstücke erforderlichen Durchflutung. Wir berechnen zunächst die Leitfähigkeit eines Bleches. Die Formel für die magnetische Leitfähigkeit war (vgl. Formel (19)):

$$\Lambda = \frac{\mu \cdot 2 \cdot b}{m \cdot l}(1 - e^{-m s}).$$

Digitized by Google

Hierin ist

$$r = 0{,}000\,15 \text{ cm},$$
$$b = 1{,}0 \text{ cm},$$
$$l = 5{,}0 \text{ cm (für beide Schlußstücke)}.$$

Ferner war nach unserer Annahme $\mathfrak{B}_{max} = 500$.

Als mittleres μ, entnommen der statischen Magnetisierungskurve mit gleicher maximaler Magnetisierung, setzen wir für legiertes Blech 3000.

Ferner ist

$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}},$$

wo

$$s = 10^4 \text{ cgs.},$$
$$\omega = 62\,800,$$

somit

$$m = 486{,}5,$$
$$m \cdot r = 0{,}073.$$

Man erhält durch Einsetzen dieser Werte in obige Formel

$$\Lambda = 0{,}173.$$

Dies ist die Leitfähigkeit eines Blechs; insgesamt haben wir 166 Bleche, somit ist die Leitfähigkeit aller Bleche oder des gesamten Schlußjochs

$$\Lambda = 28{,}7.$$

Aus diesem Wert berechnet sich nach der Formel (S. 1) die für die beiden Schlußstücke notwendige Durchflutung zu

$$N \cdot J_{eff} = 49{,}2.$$

c) Berechnung der für Joch und Schenkel erforderlichen Durchflutung. Wir haben einen massiven Eisenkörper von kreisrundem Querschnitt.

Für Joch und Schenkel ist

$$r = 5 \text{ cm},$$
$$l = 150 \text{ cm},$$
$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}};$$

hierin ist

$$\omega = 62\,800,$$
$$s = 10^4 \text{ cgs.}$$

Oben hatte sich für die Schlußstücke ergeben

$$\mathfrak{B}_{max} = 38{,}2 \text{ Maxwell.}$$

Hierfür setzen wir die mittlere Permeabilität = 1000 in die Rechnung ein. Alsdann ergibt sich

$$m = 281$$

und

$$m \cdot r = 1405.$$

Wir können also die für große Werte des Arguments vereinfachte Formel (8a) anwenden

$$\Lambda = \pm \frac{2\pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot m \cdot r} \right).$$

Nach Einsetzen obiger Werte erhält man

$$\Lambda = + 0{,}525.$$

Digitized by Google

Nach Formel (S. 1) berechnet sich alsdann die für das Joch und die Schenkel notwendige Durchflutung zu

$$N \cdot J_{eff} = 3215.$$

Als Resultat haben wir, daß sich die Zahl der gesamten Amperewindungen sehr ungleichmäßig auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises verteilt. Auf den Luftspalt fällt ein verschwindender Teil. Der bei weitem größte Teil fällt auf Joch und Schenkel. Dieses Resultat kann nicht überraschen, da Joch und Schenkel aus massivem Material hergestellt sind. Wir haben also hier gewissermaßen den Fall, der sich ungewollt ergibt, sobald nicht besondere Konstruktionen gewählt werden. Bei den Hochfrequenzmaschinen soll bei konstanter Erregung durch periodische Vertauschung von Zahn und Zahnlücke in dem magnetischen Kreis eine periodische Induktion erzeugt werden. Dies erfordert eine entsprechend andere Verteilung der magnetischen Leitfähigkeit auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises, auf die ich jedoch in dieser Arbeit, die zunächst nur die prinzipiellen Grundlagen bringt, nicht eingehen will.

Zussmmenfassung. Es wird der im Elektromaschinenbau gebräuchliche Begriff der magnetischen Leitfähigkeit in die Berechnung hochfrequenter magnetischer Kreise eingeführt. Die sich dadurch ergebenden Formeln sind für die praktische Durchrechnung solcher Kreise besonders bequem. Es wird gezeigt, wie die Formeln sowohl für geschlossene streuungslose als auch für beliebig zusammengesetzte Kreise mit Streuung angewendet werden können. Speziell wird dabei die Theorie der magnetischen Hautwirkung für Bleche behandelt. Die sich ergebenden Formeln sind insofern einfacher als bei kreisrundem Querschnitt des Materials, als an Stelle der Besselschen Funktionen die Exponentialfunktionen treten.

Zum Schluß wird ein magnetischer Kreis für die Frequenz 10 000 zahlenmäßig durchgerechnet, der in Reihe geschaltet aus einem Joch- und Schenkelstück aus Schmiedeeisen von kreisrundem Querschnitt, zwei Schlußstücken aus Blechpaketen und einem Luftspalt besteht. Das Zahlenbeispiel zeigt, daß irgendwelche Schwierigkeiten bei der Durchrechnung auch komplizierter magnetischer Kreise für Hochfrequenz nicht bestehen.

Die Durchrechnung der Eisenverluste, auf die ich hier nicht eingegangen bin, werde ich in einer späteren Arbeit behandeln.

Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des Ferromagnetismus.

II. Ideale, d. h. hysteresefreie Magnetisierung.

Von

W. Steinhaus und **E. Gumlich**. Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. **Ziel der Arbeit.** Bekanntlich ist die Magnetisierungsintensität eines ferromagnetischen Materials keine eindeutige Funktion der Feldststärke, sondern sie ist auch mehr oder weniger von der magnetischen Vorgeschichte abhängig. Diese Abhängigkeit von der Vorgeschichte nennt man Hysterese. Sie hat ihren Grund in der Irreversibilität der Magnetisierungsprozesse in den einzelnen Kristallen, die den pseudoisotropen ferromagnetischen Körper zusammensetzen. (Vgl. unsere vorige Mitteilung S. 89.)

Diese Erscheinung hat nun die Erforschung der Gesetze des Ferromagnetismus ganz außerordentlich erschwert. Zum Beweise dafür sei nur an zwei besonders wichtige Fälle erinnert.

Digitized by Google

Bis heute besitzen wir keine hinreichende Kenntnis des Gesetzes der Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur. Trägt man die Magnetisierungskurven bei verschiedenen Temperaturen für dasselbe Material auf, so erhält man bei niedrigen Feldstärken ein Gewirr von sich schneidenden Linien, weil sowohl die Magnetisierung als auch die Hysterese (Romanenz und Koerzitivkraft) mit steigender Temperatur abnimmt. Wie beide einzeln abnehmen, ist uns nicht hinreichend bekannt.

Ferner ist aus unserer vorigen Mitteilung ersichtlich, wie wichtig die Beantwortung der Frage wäre, ob die reversible Suszeptibilität tatsächlich genau das von Gans angegebene Gesetz befolgt. Aus den besten Messungen von Gans geht hervor, daß die reversible Suszeptibilität zwar im großen und ganzen eine eindeutige Funktion der Magnetisierung ist, aber gleichzeitig läßt sich doch ein deutlicher Einfluß der Hysterese erkennen. Solcher Beispiele ließen sich noch viele anführen.

Es ist daher auch leicht verständlich, daß oft Versuche unternommen wurden, sich von der Hysterese unabhängig zu machen. Bei diesen Versuchen muß man zwei Arten unterscheiden: die einen zielten darauf hin, ein ferromagnetisches Material herzustellen, das tatsächlich keine Hysterese besitzt; so sind wir z. B. bei den Versuchen in der Reichsanstalt mit reinem Eichen neuerdings bis zu einer Koerzitivkraft von 0,15 Gauß bei einer Remanenz von etwa 1000 heruntergekommen. Die anderen Versuche bezweckten, bei gewöhnlichem Material mit Hilfe mechanischer Erschütterungen oder eines übergelagerten transversalen oder longitudinalen Wechselfeldes von passender Stärke den Einfluß der Hysterese auszuschließen. Ihnen lag die mehr oder weniger klare Vorstellung zugrunde, daß die „heftige Erregung der Moleküle, die durch die Wechselmagnetisierung hervorgebracht wird, die Hysterese zerstöre". Aber diesen Versuchen war kein durchgreifender Erfolg beschieden.

Im folgenden soll nun ein Verfahren abgeleitet und beschrieben werden, nach dem es mit Leichtigkeit gelingt, für jedes beliebige ferromagnetische Material die „hysteresefreie" oder „ideale" Kurve zu finden. Ferner sollen Resultate solcher Messungen mitgeteilt und schließlich auf einige besondere Punkte dieser Resultate hingewiesen werden.

2. Theorie der Idealisierungsmethode. Von der „hysteresefreien" Magnetisierungskurve, die wir suchen, läßt sich zunächst schon von vornherein sagen, daß sie durch den Nullpunkt gehen muß, denn es muß bei Abwesenheit von Hysterese immer bei der Feldstärke Null auch die Magnetisierung Null vorhanden sein; der Nullpunkt ist also schon ein Punkt der „idealen" Kurve. Man erreicht ihn durch einen Entmagnetisierungsprozeß, d. h. man sorgt für eine nach allen Seiten vollkommen gleichmäßige Verteilung der Magnetisierungsrichtungen der Kristalle (vgl. unsere erste Mitteilung).

Man könnte nun versucht sein, dieses Verfahren einfach zu erweitern, es nicht allein beim stationären Feld Null, sondern auch bei jedem anderen Felde anzuwenden und sich das Resultat so zu deuten, daß zwischen dem ordnenden Bestreben des Feldes und dem ordnungzerstörenden der Entmagnetisierung in irgendeiner Weise ein Gleichgewicht eingetreten wäre. Wir werden sehen, daß diese Methode zwar die richtige ist, diese Deutung der Resultate aber nicht aufrecht erhalten werden kann.

Verfolgen wir einmal wieder einen solchen Prozeß im einzelnen. Wir wählen von den Kristallen etwa 12 aus, deren Magnetisierungsachsen gerade in der Weise verteilt sind, daß sich die nächste immer um 15° von der vorhergehenden in ihrer Richtung unterscheidet; (Fig. 1a). das stationäre Feld h soll in der Richtung des gefiederten Pfeiles wirken. Hat die Anfangsamplitude des entmagnetisierenden Wechselfeldes den Wert a, und zwar in derselben Richtung wie h, so kommt in der ersten Halbperiode ein höchstes Gesamtfeld a + h zur Wirkung. Dies läßt sich immer genügend groß machen, um die Verteilung der Fig. 1b zu erhalten. In der zweiten Halbperiode hat das Wechselfeld entgegengesetzte Richtung und die Amplitude a—d; das Gesamtfeld hat dann die Größe — (a—d) + h. Wir wollen nun annehmen, daß immer $d \leq h$ ist, eine Bedingung, die im Versuch stets erreichbar ist; denn ist das stationäre Feld h auch noch so klein, so kann doch durch genü-

Digitized by Google

gend langsames Entmagnetisieren die Abnahme der Amplitude des Wechselfeldes von einer zur nächsten Halbperiode immer noch kleiner gemacht werden. Im Grenzfalle d = h ist dann das Gesamtfeld in der zweiten Halbperiode — (a — 2 d). Die dadurch hervor-

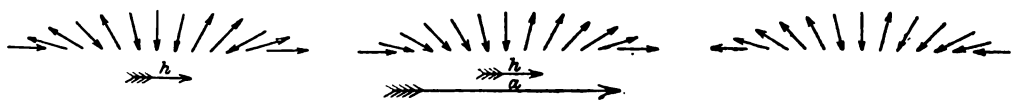


Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 1c.

gebrachte Verteilung sei die von Fig. 1c, d. h. alle Kristalle, bis die drei in der Mitte, haben ihre Magnetisierungsrichtung umgekehrt.

In der dritten Halbperiode (erreicht das Gesamtfeld den Wert (a — 2d) + h oder im Grenzfall (a — d). Es ist also seinem absoluten Betrage nach größer als in der vorhergehenden Halbperiode. Es werden also mit Sicherheit alle Kristalle, die vorher ihre Magnetisierungsrichtung geändert hatten, wieder in ihre alte Lage zurückkehren, d. h. es ist wieder „Sättigung" vorhanden.

Diese Operation soll nun immer wiederholt werden, bis das Wechselfeld verschwunden ist. In den geraden Halbperioden werden immer weniger und weniger Kristalle ihre Magnetisierung umkehren, und in den ungeraden wird immer wieder die „Sättigung" erreicht werden. Am Ende der „Entmagnetisierung" wird also unser System im Zustande der „Sättigung", der größtmöglichen Ordnung, zurückbleiben.

Diese Betrachtungen lassen sich natürlich ohne weiteres auf ein ferromagnetisches Material übertragen. Soweit also irreversible Vorgänge in Betracht kommen, müßte schon das kleinste stationäre Feld Sättigung hervorbringen, wenn ihm ein Entmagnetisierungsprozeß überlagert wird. Dieser allein erzeugt gleichmäßige Verteilung (vgl. S. 91) in Verbindung mit einem stationären Felde aber die denkbar größte Ordnung. Von einem Gleichgewicht zwischen ordnendem Einfluß des Feldes und ordnungsstörendem des Entmagnetisierungsprozesses kann also keine Rede sein.

Wir hätten bei diesen Betrachtungen auch anders verfahren können. Wie schon früher (S. 89) auseinandergesetzt wurde, beschreibt bei einem zyklischen Magnetisierungsprozeß, dem man einen einzelnen Kristall in bestimmter Richtung unterwirft, der dar-

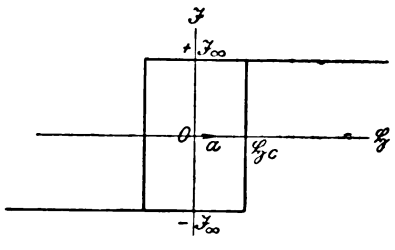


Fig. 2a.

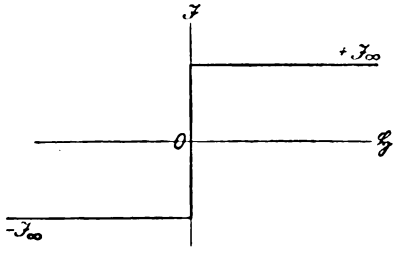


Fig. 2b.

stellende Punkt die Schleife Fig. 2a, falls der Höchstwert des Feldes größer ist als die Koerzitivkraft $\mathfrak{H}_c$; sinkt er dagegen darunter, so findet kein Umklappen von + J∞ zu — J∞ mehr statt, der Kristall bleibt also im Zustand der Sättigung. So wirkt mithin auch ein Entmagnetisierungsprozeß bei Abwesenheit eines stationären Feldes auf den einzelnen Kristall so, daß am Ende des Prozesses der Kristall im Zustande der Sättigung zurückbleibt, und zwar besteht gleiche Wahrscheinlichkeit, daß er nach der einen oder der entgegengesetzten Seite magnetisiert ist. Diese Symmetrie fällt aber fort, sobald ein stationäres Feld a vorhanden ist; dann muß die Magnetisierung dieselbe Richtung behalten, wie sie das Feld bzw. die Feldkomponente hat.

Auch hier beschreibt bei großen Werten des Wechselfeldes der darstellende Punkt die Hystereseschleife Fig. 2a, und zwar solange als die Resultante aus dem negativen

Digitized by Google

Höchstwert des Wechselfeldes und dem positiven Wert des stationären Feldes größer bleibt als die Koerzitivkraft, denn so lange kann die Magnetisierung noch umklappen. Wird die Resultante dagegen kleiner als $\mathfrak{H}_c$, so findet ein Umklappen nicht mehr statt, und die Magnetisierung behält den Sättigungswert $+ J_\infty$ bei. Für ein negatives stationäres Feld $-a$ würde entsprechend ein negativer Sättigungswert $- J_\infty$ folgen. Läßt man also das stationäre Feld a alle Werte von $+\infty$ über Null nach $-\infty$ durchlaufen und überlagert jedem einzelnen Wert ein entmagnetisierendes Wechselfeld, so beschreibt der darstellende Punkt nunmehr die Magnetisierungskurve Fig. 2b.

Die weitere Frage, welche Kurve nun ein pseudoisotropes Material besitzt, dessen einzelne Krystalle ohne Hysterese der Megnetisierungskurve b) folgen, hat dann als selbstverständliche Antwort das schon oben erhaltene Resultat.

Ein sehr wesentliches Moment ist aber bisher nicht in Betracht gezogen worden, nämlich die Wirkung benachbarter Kristalle aufeinander.

Als Beispiel denken wir uns den in Fig. 3a veranschaulichten Fall.

Der große gefiederte Pfeil gebe die Richtung des stationären Feldes, die beiden einfachen Pfeile mögen die Magnetisierungsrichtung zweier Kristalle vorstellen. Nun besteht offenbar zwischen den Kristallen außer dem angelegten stationären Felde noch ein anderes, das von den Kristallen selbst herrührt (kleiner gefiederter Pfeil). Diese beiden Felder setzen sich zu einer Resultante zusammen, die der gefiederte Pfeil in Fig. 3b zeigt.

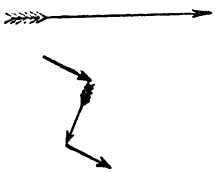


Fig. 3a.

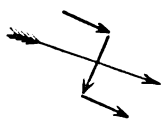


Fig. 3b.

Ein an dieser Stelle liegender dritter Kristall (Richtung wie in Fig. 3b) würde also ein erheblich größeres stationäres Feld benötigen, um seine Magnetisierungsrichtung umzukehren.

Durch die Wirkung der Nachbarkristalle aufeinander wird also bei kleinen stationären Feldern noch keine Sättigung eintreten können. Diese Wirkung ist somit eine „ordnungstörende", und der „ideale" oder „hysteresefreie" Zustand kann nunmehr aufgefaßt werden als Gleichgewicht zwischen dem ordnenden Bestreben des Idealisierungsprozesses und der ordnungstörenden Wirkung der Nachbarkristalle aufeinander.

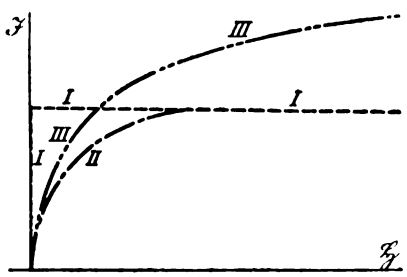


Fig. 4.

Natürlich wird sich auch hier der Einfluß der reversiblen Vorgänge noch darüberlagern.

Somit ist als „ideale Magnetisierungskurve" eine solche von folgender Form zu erwarten (vgl. Fig. 4).

I ohne Berücksichtigung der Nachbarwirkung,
II mit Berücksichtigung derselben, aber ohne solche der reversibeln Vorgänge,
III auch mit Berücksichtigung der reversibeln Vorgänge.

3. Die Ausführung der Messungen. Zur Untersuchung gelangten 6 verschiedene Materialien in Form langgestreckter Ellipsoide von meist 33 cm Länge und 0,6 cm Durchmesser:

A V 1 weiches Eisen;
A V 6 ungehärtet, weicher Stahl, mit ca. 0,6% C;
A V 6 gehärtet; dasselbe Ellipsoid nach den ersten Messungen gehärtet. Leider konnte es nicht vermieden werden, daß dabei eine leichte Krümmung eintrat; die Resultate sind daher auch als nicht besonders genau zu bewerten.
V 37 Gußeisen;
Si 50 Legierung mit 4,4% Si;
V 156 Heuslersche Legierung (vgl. S. 94).

Digitized by Google

Die Beobachtungen erfolgten mit dem störungsfreien Magnetometer von Kohlrausch und Holborn[1]) in erster Hauptlage: Das Ellipsoid befand sich in einer ca. 60 cm langen, engen Magnetisierungsspule, welche das stationäre Feld lieferte und deren Wirkung auf das Magnetometer durch eine gleiche, ebenfalls vom Magnetisierungsstrom durchflossene und auf der anderen Seite des Magnetometers befindliche Spule aufgehoben wurde. Die Spule mit dem Ellipsoid wurde umschlossen von einer zweiten, 70 cm langen Spule, welche das übergelagerte Wechselfeld lieferte. Dies muß anfänglich höher sein als das stationäre Feld, dann aber vollständig gleichmäßig bis auf Null herab abnehmen. Zu diesem Zweck war die Spule verbunden mit dem früher schon beschriebenen Entmagnetisierungsapparat[2]) bzw. einem neuen Modell desselben, das sich dadurch von dem älteren unterscheidet, daß der Eisenkern der beweglichen Spule von dieser getrennt stets an Ort und Stelle bleibt und mit der äußeren Eisenbelegung der Primärspule dauernd einen fast geschlossenen Eisenweg für die Kraftlinien bildet, während die Spule allein aus dem Wechselfeld herausgezogen wird, was sich aus mehreren Gründen als vorteilhaft erwies.

Zunächst wurde nun mit Hilfe dieses Apparates das Ellipsoid in seiner endgültigen Lage einem Entmagnetisierungprozeß unterworfen, dessen Gelingen man daran erkennt, daß nach dem Entmagnetisieren das Magnetometer wieder auf dem gleichen Skalenteil einsteht, wie vor dem Einbringen des Ellipsoids. Sodann wurde letzteres durch einen ganz schwachen Gleichstrom magnetisiert, das Magnetometer erlitt infolgedessen einen kleinen Ausschlag, der sich außerordentlich stark vergrößerte, wenn man durch die äußere Spule einen bis auf Null abnehmenden Wechselstrom geschickt, also einen vollständigen Entmagnetisierungsprozeß übergelagert hatte. Sodann verstärkte man den stationären Strom etwas, wiederholte den Wechselstromprozeß usf. Hierbei wurde es stets erreicht, daß man den gleichen Ausschlag, also die gleiche Magnetisierungsintensität erhielt, ob man sich auf der Nullkurve, dem aufsteigenden oder dem absteigenden Aste bewegte, was ja gerade das Kriterium dafür ist, daß man sich von dem Einfluß der Hysterese frei gemacht hat. Aus dem beobachteten Magnetometerausschlag läßt sich dann in bekannter Weise die Intensität der Magnetisierung, aus der Stromstärke und der Spulenkonstante die scheinbare Feldstärke $\mathfrak{H}'$ und hieraus mittels der Beziehung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' - N\mathfrak{J}$ auch die wahre Feldstärke $\mathfrak{H}$ berechnen. Hierin bedeutet N den sogenannten Entmagnetisierungsfaktor, der beim Ellipsoid aus dem Dimensionsverhältnis bestimmt werden kann.

4. Resultate. Die Resultate dieser Messungen sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Dabei bedeuten:

1. $\mathfrak{H}$ die wahre Feldstärke,
2. $\mathfrak{H}_c$ die Koerzitivkraft,
3. $\mathfrak{J}$ die Intensität der Magnetisierung,
4. $\mathfrak{J}_\infty$ die Sättigungsintensität,
5. $\mathfrak{J}_r$ die remanente Magnetisierung,
6. $\varkappa$ die Susceptibilität,
7. $\varkappa_0$ die Anfangssuszeptibilität.

Tabelle 1.
Weiches Eisen.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,14	170	1200	0,04	5 570	150 000	0,50	470	164,5	19 100
0,23	690	3020	0,22	8 680	40 000	0,53	970	106,8	18 260
0,30	1 590	5300	0,62	11 280	18 100	0,56	1 360	71,8	17 600
0,36	2 520	7000	5,51	14 800	2 690	0,60	2 310	37,2	16 730

[1]) Kohlrausch und Holborn: Ann. d. Phys. (4) **10**, 287, 1903.
[2]) Gumlich und Rogowski, Ann. d. Phys. (4) **34**, 245; 1911.

Digitized by Google

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,41	3 310	8090	35,5	16 620	470	0,67	3 390	20,7	16 120
0,54	5 160	9560	58,3	17 310	295	0,77	5 010	7,32	15 230
0,73	6 940	9500	106,8	18 240	171	0,87	6 820	2,10	14 300
0,97	8 820	9120	164,5	19 100	116	1,08	8 720	0,28	11 790
1,38	10 790	7820				1,42	10 760	— 0,09	8 890
1,91	12 230	6410				1,91	12 210	— 0,22	5 800
3,67	13 730	3740				3,54	13 730	— 0,36	2 540
7,79	14 930	1920				7,80	14 920	— 0,41	1 280
20,7	15 970	770				20,7	15 980	— 0,45	370
37,4	16 660	445				71,7	17 570		
71,2	17 560	247				164,5	19 100		
106,8	18 240	171							
164,5	19 100	116							
260,1	20 010	77,0							
322,2	20 430	63,4							

$\mathfrak{H}_c = 0{,}47$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 10\,000$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 21\,480$; $4\pi\varkappa_0 = 290$

Tabelle 2.
Weicher Stahl.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,84	160	200	0,18	5 490	30 000	6,55	90	180,3	17 470
1,35	290	220	1,09	8 010	7500	7,08	1 550	144,9	17 100
1,86	460	250	2,73	9 610	3500	7,56	2 700	94,1	16 460
2,91	1 000	340	9,09	11 980	1320	8,59	4 770	58,8	15 830
4,18	2 180	520	38,8	14 840	385	10,3	7 240	23,4	14 740
5 73	4 170	730	59,9	15 650	261	12,6	9 220	3,29	13 030
7,21	5 890	820	108,2	16 620	154	15,8	10 910	— 4,04	8 980
9,42	8 000	850	179,4	17 490	97,5	26,4	13 310	— 4,92	6 070
12,0	9 680	805				38,3	14 410	— 5,27	4 370
15,5	11 170	720				59,8	15 410	— 6,06	1 440
25,9	13 290	515				94,3	16 280	— 6,52	10
39,0	14 460	370				145,8	17 080		
59,6	15 410	260				180,3	17 470		
94,3	16 280	173							
145,1	17 070	118							
180,3	17 470	97							

$\mathfrak{H}_c = 6.52$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 12\,200$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 20\,470$; $4\pi\varkappa_0 = 147$

Tabelle 3.
Harter Stahl.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
2,63	140	55	0,07	420	6500	42,1	90	185,6	15 770
4,75	270	56	0,13	760	6000	44,4	3 020	148,6	15 270
7,75	460	59	0,22	1 230	5500	46,6	5 440	82,6	14 010
16,2	1 080	66,5	0,34	1 720	5000	49,2	7 400	51,8	13 120
26,4	2 150	81,5	0,74	2 790	3800	55,5	9 830	28,1	12 200
38,2	4 440	116	1,71	4 230	2450	65,0	11 520	7,85	11 140
42,8	5 970	139	3,76	5 800	1540	84,8	13 110	— 10,7	9 710
47,9	7 690	160,5	6,09	6 830	1120	112,8	14 240	— 11,6	9 620
55,7	9 730	174,5	13,1	8 650	660	148,7	15 140	— 20,6	8 600
64,6	11 150	172,5	41,3	11 690	285	185,6	15 770	— 29,5	7 100
85 0	12 910	152	63,7	12 910	203			— 35,5	5 290
113,0	14 130	125	111,5	14 510	130			— 39,6	2 640
148,8	15 090	101,4	185,7	15 900	85,6			— 42,0	40
185,6	15 770	85,0							

$\mathfrak{H}_c = 42{,}0$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 10\,600$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 20\,040$; $4\pi\varkappa_0 = 52$

Digitized by Google

Tabelle 4. Gußeisen.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
1,61	90	55	0,24	270	1200	12,0	30	188,9	10 150
3,33	220	65	0,46	500	1100	16,5	1 990	146,9	9 610
4,48	320	72	0,74	790	1050	23,4	3 660	109,8	8 960
6,53	590	90	1,09	1 080	990	40,3	5 650	78,7	8 260
10,1	1 350	134	2,04	1 690	825	58,7	6 800	57,7	7 640
16,2	2 830	175	3,84	2 420	630	84,4	7 850	39,9	6 980
23,2	4 020	173,5	6,83	3 210	470	110,2	8 610	12,9	5 490
41,4	5 780	139,5	9,78	3 750	385	147,4	9 440	− 0,22	4 150
58,8	6 790	115,5	18,0	4 790	265	188,9	10 150	− 4,24	3 460
79,7	7 670	96,2	47,4	6 780	143			− 7,83	2 410
110,0	8 580	78,0	68,9	7 650	111			−10,1	1 140
147,4	9 430	64,0	117,0	9 000	77			−11,9	40
188,9	10 150	53,7	188,8	10 300	55				

$\mathfrak{H}_c = 12{,}0$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 4\,170$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 16\,690$; $4\pi\varkappa_0 = 47$

Tabelle 5. Siliciumeisen.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,15	160	1150	0,01	850	85 000	0,65	20	181,8	17 640
0,22	290	1350	0,02	1 400	70 000	0,82	2 040	145,4	17 130
0,36	650	1800	0,05	1 970	40 000	0,97	3 440	95,9	16 230
0,54	1 380	2550	0,15	3 290	21 000	1,50	6 010	74,9	15 750
0,60	1 780	2970	0,58	5 200	9 000	2,14	7 920	38,9	14 690
0,67	2 190	3260	1,39	7 820	5 600	2,87	9 310	22,0	13 980
0,79	3 000	3800	2,49	9 870	3 960	4,42	10,980	7,54	12 880
1,18	4 780	4050	8,41	12 750	1 520	8,57	12 530	2,52	10 890
2,17	8 010	3690	38,6	14 670	380	24,1	13 930	1,19	8 810
8,68	12 530	1440	60,0	15 350	256	41,8	14 700	0,49	6 870
24,3	13 960	575	179,9	17 640	98	75,4	15 710	− 0,18	4 210
40,0	14 650	365				95,8	16 190	− 0,48	2 160
75,2	15 720	209				145,1	17 110	− 0,60	490
96,2	16 180	168				181,8	17 640	− 0,63	40
145,7	17 130	117,5							
181,8	17 640	97,1							

$\mathfrak{H}_c = 0{,}65$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 5\,180$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 19\,220$; $4\pi\varkappa_0 = 529$

Tabelle 6. Heuslersche Legierung.

Nullkurve			Ideale Kurve			Aufsteigd. Ast		Absteigd. Ast	
$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$4\pi\varkappa$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$	$\mathfrak{H}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,54	13	24	0,28	115	409	3,80	3	199,1	2238
1,03	29	28	0,61	204	336	3,84	9	125,8	1997
1,63	56	34	1,31	325	248	6,25	357	90,1	1817
2,58	127	49,1	3,77	545	145	8,48	557	57,8	1581
4,09	285	69,8	8,24	762	92,5	13,4	825	38,1	1378
8,39	632	75,3	13,3	926	69,4	24,4	1126	24,3	1188
13,4	853	63,7	24,4	1165	47,8	39,0	1357	13,2	973
24,4	1133	46,4	37,9	1362	36,0	58,0	1564	3,62	671
38,2	1350	35,4	57,3	1570	27,4	90,1	1806	0,44	506
57,8	1565	27,0	89,7	1813	20,2	125,9	1992	− 0,54	438
90,3	1810	20,1	125,8	1999	15,9	199,1	2238	− 2,65	205
125,8	1997	15,9	199,0	2239	11,2				
199,1	2238	11,2							

$\mathfrak{H}_c = 3{,}78$; $4\pi\mathfrak{J}_r = 480$; $4\pi\mathfrak{J}_\infty = 2\,780$; $4\pi\varkappa_0 = 20$

Digitized by Google

5. Suszeptibilität „Unendlich". Die Resultate zeigen nun, daß wir im allgemeinen ideale Kurven von der erwarteten Gestalt (Fig. 4, Kurve III) erhielten; als Beispiel ist in Fig. 5 die ideale Kurve für weichen Stahl zusammen mit der Nullkurve und der Hystereseschleife wiedergegeben. Auf einzelne Abweichungen soll hier nicht eingegangen werden; mit einem Punkte aber, dem senkrechten Anstieg der idealen Kurve im Nullpunkt, müssen wir uns noch beschäftigen, da er besonderes Interesse bietet.

Aus der großen Zahl der Versuche, die wir hierüber angestellt haben, sei als Beispiel folgende Tabelle mitgeteilt, die beim weichen Eisen A V 1 h erhalten wurde.

Tabelle 7. Weiches Eisen AV 1h.

$\mathfrak{H}'$	$N\mathfrak{J}$	$4\pi\mathfrak{J}$
0,25	0,25	210
0,58	0,57	470
1,04	1,05	860
1,71	1,71	1410
2,41	2,42	1990
4,44	4,45	3660
6,82	6,78	5570
10,8	10,6	8580

Hier ist, wie schon erwähnt, $\mathfrak{H}'$ die äußere, ungescherte Feldstärke, $N\mathfrak{J}$ die Scherung, die entmagnetisierende Endwirkung. Ihre Differenz $\mathfrak{H}' - N\mathfrak{J}$ gibt dann das „wahre" oder „Eisen"-Feld.

Trotzdem nun die Bestimmungen der Abstände, der Ellipsoid-Dimensionen usw. möglichst genau vorgenommen wurden und auch die Intensität $\mathfrak{J}$ nicht nach der gewöhnlichen Näherungsformel, welche das Vorhandensein von Polen annimmt, sondern unter

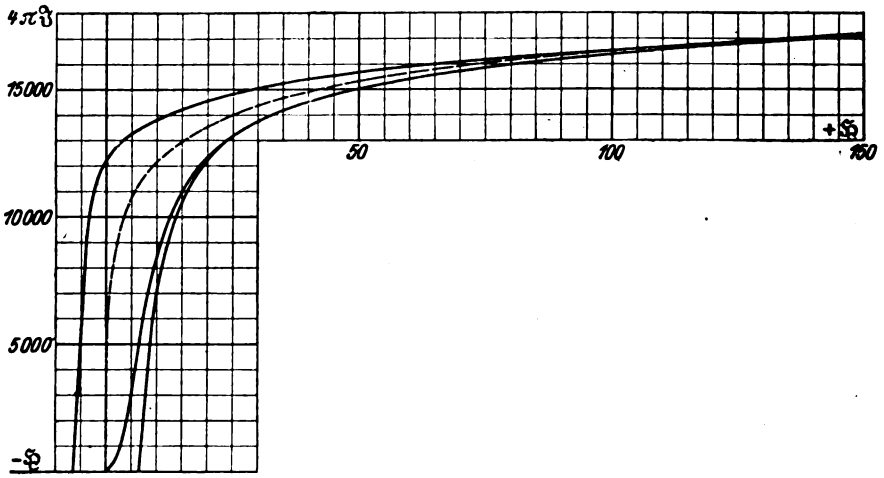


Fig. 5.

Berücksichtigung der gleichmäßigen Magnetisierung berechnet wurde, zeigt doch die Tabelle, daß selbst bis zu Intensitäten von etwa $4\pi\mathfrak{J} = 5000$ die entmagnetisierende Endwirkung sich ebenso groß ergibt wie das äußere Feld, daß also bis dahin ein wahres Feld nicht mit Sicherheit nachweisbar ist, mithin die Suszeptibilität unendlich groß erscheint. Das Eisen verhält sich also in diesem Gebiet (natürlich nur in bezug auf die ideale Magnetisierung) einem magnetischen Felde gegenüber ähnlich wie sich ein elektrischer Leiter gegenüber einem elektrischen Felde verhält: In beiden Fällen läßt sich in dem Material kein Feld aufrecht erhalten.

Digitized by Google

Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß diese Tatsache einmal eine praktische Bedeutung in der Herstellung eines vollkommenen magnetostatischen Schutzes erhalten könnte. Gelingt es z. B., den Panzer eines Nadelgalvanometers so schnell hintereinander immer und immer wieder zu idealisieren, daß die für den einzelnen Idealisierungsprozeß benötigte Zeit klein ist im Vergleich mit der Schwingungsdauer des Galvanometers, so wäre der Einfluß des Erdfeldes mit seinen Schwankungen vollkommen ausgeschlossen. Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, daß in dieser Hinsicht ein gewöhnliches Wechselfeld von passender Stärke schon für alle praktischen Bedürfnisse ausreichen würde. Diesbezügliche Versuche sind in Aussicht genommen.

6. Die auf der Nullkurve vergeudete Energie. Noch eine andere Anwendung der idealen Magnetisierungskurve soll kurz erwähnt werden. Nach dem Warburgschen Gesetz wird die bei einem Magnetisierungszyklus vergeudete Energie gemessen durch den Flächeninhalt der Hystereseschleife. Dieses Gesetz macht also eine Aussage über einen vollständigen Kreisprozeß. Man begegnet nun häufig der Ansicht, daß auf einem nichtgeschlossenen Wege entweder überhaupt keine Arbeit entwertet würde, oder auch, daß der Betrag der entwerteten Energie unbestimmt sei und beliebig definiert werden könne. Dieser Ansicht können wir nicht beitreten.

Wird ein magnetischer Kristall einmal ummagnetisiert, so muß hierbei aus Symmetriegründen die Hälfte der Energievergeudung des ganzen Zyklus eintreten. Beim pseudoisotropen Ferromagnetikum ist dann der Betrag der auf einem ungeschlossenen Wege degradierten Energie gleich der Summe solcher einzelnen Energievergeudungen in den Kristallen, deren Magnetisierungsrichtung umgekehrt wird. So ist z. B. leicht zu übersehen, daß die Energievergeudung auf der Nullkurve, d. h. von der gleichmäßigen Verteilung der Magnetisierungsrichtungen nach allen Seiten bis zu ihrer größten Ordnung nach einer Seite, der vierte Teil der gesamten, in einem Zyklus entwerteten Energie sein wird, da ja die Anzahl der Kristalle, die ihre Magnetisierungsrichtung beim Beschreiten der Nullkurve umkehrt, gerade die Hälfte aller Kristalle ist. Diese Folgerung kann nun mit Hilfe der idealen Magnetisierungskurven nachgeprüft werden.

Wir denken uns, wir besäßen ein Material, bei dem wir es ganz beliebig in der Hand hätten, die einzelnen Kristalle entweder die Magnetisierungskurve a oder b (Fig. 2) befolgen zu lassen, ohne daß an den sonstigen Eigenschaften, wie Sättigungswert, Anordnung der Kristalle usw., sich etwas änderte. Das Material sei entmagnetisiert und zunächst auf die Kurve a eingestellt. Beim Magnetisieren bis zur Sättigung ergibt sich dann die gewöhnliche Nullkurve. Unsere Frage ist nun, wieviel Energie ist bis dahin vergeudet worden? Wir stellen jetzt die Kristalle so ein, daß sie der Kurve b gehorchen.

Dadurch hat sich an dem gegenwärtigen Zustande des Materials nichts geändert. Lassen wir jetzt die Feldstärke bis auf Null abnehmen, so verläuft die Magnetisierung auf der idealen Kurve abwärts; dabei wird keine Arbeit entwertet. Die Energievergeudung auf der Nullkurve wird dann dargestellt durch die von Nullkurve und ideale Kurve umschlossene Fläche. Diese müßte der vierte Teil der ganzen Hystereseфläche sein. Aus unseren Kurven folgt nun, daß dies tatsächlich mit großer Annäherung der Fall ist. Für eine genaue Kontrolle reichen aber diese Kurven noch nicht aus, denn einmal sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Ästen bei mittleren und höheren Feldstärken nicht hinreichend sicher, und dann müßten auch die Messungen bis zu noch erheblich höheren Feldern ausgedehnt werden, so daß Sicherheit vorhanden wäre, daß dort ideale und Nullkurve, soweit überhaupt feststellbar, zusammen verlaufen; hierzu aber reichten die vorhandenen Einrichtungen nicht aus.

7. Zusammenfassung. Die Erforschung der Gesetze des Ferromagnetismus wird in vielen Fällen durch die Erscheinung der Hysterese stark erschwert; es wurde nun ein einfaches Verfahren gefunden, nach dem es gelingt, sich von dem Einfluß der Hysterese

Digitized by Google

unabhängig zu machen. Dieses Verfahren besteht darin, daß jedem stationären Felde, bei dem gemessen werden soll, ein Entmagnetisierungsprozeß (Wechselfeld von hinreichender, stetig bis auf Null abnehmender Höhe) übergelagert wird. So kann Punkt für Punkt der ideale, hysteresefreie Zustand erreicht werden. Die Messung solcher Kurven wurde im Zusammenhang mit Schleife und Nullkurve mitgeteilt und auf einige besondere Punkte dieser Resultate, wie die unendlich große ideale Anfangssuszeptibilität und die Energievergeudung auf der Nullnurve, aufmerksam gemacht.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 5. u. 6. Heft. 1916.

Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen. (Mit Anwendungsbeispielen.)

Von

Karl Willy Wagner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhaltsübersicht.

1. Ziel der Arbeit.

I. Theorie.

2. Die Formel von Heaviside.
3. Herleitung der Heavisideschen Formel.
4. Mehrfache Wurzeln der Stammgleichung.

II. Beispiele.

5. Das Einschalten einer Spule.
6. Das Einschalten eines Kondensators.
7. Magnetisch verkettete Kreise.
8. Der elektrische Schwingungskreis.
   a) Das Einschalten mit konstanter Spannung.
   b) Ein Einschaltvorgang bei konstantem Strom.
   c) Die Unterbrechung des Hauptstromes.
9. Künstliches Kabel.
10. Das Einschalten einer am Ende isolierten Leitung.
11. Einpoliges Einschalten einer Spule mit Windungskapazität.
12. Das Einschalten einer Spule mit massivem metallenem Kern.
13. Zusammenfassung.

1. Ziel der Arbeit. Im zweiten Bande seines Werkes: „Electromagnetic Theory“[1]) gibt O. Heaviside eine sehr bemerkenswerte Formel zur Berechnung von Einschaltvorgängen an. Sie gilt für Systeme mit beliebiger, endlicher oder unendlicher Zahl von Freiheitsgraden und gestattet, den zeitlichen Verlauf irgendeiner veränderlichen physikalischen Größe des Systems beinahe ohne jede Rechnung anzuschreiben. Der Wert einer solchen Formel in wissenschaftlicher und praktischer Hinsicht leuchtet ohne weiteres ein. Wenn sie trotzdem bisher so gut wie unbeachtet geblieben ist, so mag dreierlei daran schuld sein. Erstens gibt Heaviside die Formel ohne Beweis, ja selbst, ohne einen solchen anzudeuten. Er weist ferner darauf hin, daß sie mit Vorsicht zu benutzen ist, da sie in einigen Ausnahmefällen versagt, wofür er Beispiele anführt. Endlich bedient sich Heaviside einer besonderen Rechnungsart mit Operatoren, die der landläufigen mathematischen Denkweise nicht zusagt, weil die exakte Begründung dafür noch aussteht.[2])

Der Zweck der folgenden Ausführungen ist, die Heavisidesche Formel zu begründen und ihre praktische Anwendung an Beispielen zu erläutern. Durch die Gedankengänge, mittels deren wir die Formel herleiten werden, erfahren zugleich auch die Ausnahmefälle ihre Erledigung. Es wird sich zeigen, daß und warum in einigen

[1]) Electromagnetic Theory, Bd. 2, London 1899, S. 127.

[2]) Man vergleiche hierzu die Bemerkungen Heavisides im 2. Bande seiner „Electromagnetic Theory“, S. 1—12. Die für seinen Standpunkt sehr bezeichnenden Überschriften der betreffenden Paragraphen lauten: „Mathematics is an experimental Science“, „Rigorous Mathematics is narrow, Physical Mathematics bold and broad“, „Physical Problems lead to improved Methods“, „Mathematics and — Mathematics“.

Digitized by Google

dieser Fälle die Entwicklung grundsätzlich versagen muß, bzw. daß und wie man in den anderen Fällen die Formel abzuändern hat, damit sie ihre Gültigkeit behält.

I. Theorie.

2. Die Formel von Heaviside. Es liege ein mechanisches oder elektromagnetisches System mit beliebig vielen Freiheitsgraden (Koordinaten) vor. Das System befinde sich zunächst im Gleichgewichte. In einem bestimmten Zeitpunkte ($t = 0$) werde das Gleichgewicht plötzlich dadurch gestört, daß an irgendeiner Stelle P des Systems eine eingeprägte Kraft K zu wirken beginnt. Die Kraft K möge weiterhin ($t > 0$) konstant bleiben. Unter ihrer Wirkung wird das System einem neuen Gleichgewichtszustande zustreben. Gefragt ist, wie das vor sich geht. Die Frage kann als beantwortet gelten, wenn wir für jede veränderliche Systemgröße S den zeitlichen Verlauf, d. h. die Funktion

$$S(t) \text{ von } t = 0 \text{ bis } \infty$$

anzugeben vermögen. Bezüglich des Systems wird natürlich vorausgesetzt, daß die Systemgrößen durch lineare Beziehungen untereinander verknüpft sind; z. B. durch lineare Differential- oder Differenzengleichungen.

Heaviside gibt folgende Lösung an. Man denke sich das System in einer erzwungenen Bewegung, bei der alle Systemgrößen das Zeitgesetz

$$\text{Konst. } e^{pt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

befolgen. Diese Bewegung soll dadurch zustande kommen, daß an der Stelle P eine eingeprägte Kraft von der Größe e^{pt} tätig ist. Unter der Wirkung dieser besonderen Kraft wird die Systemgröße den Wert

$$S_p = \frac{e^{pt}}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1a)$$

annehmen. Z ist eine Funktion von p, die sich dadurch ergibt, daß man in die Systemgleichungen für die einzelnen veränderlichen Größen Ausdrücke der Form 1) einsetzt und alle Größen bis auf die gesuchte Größe S eliminiert. Wir werden die Funktion Z gelegentlich auch als „Stammfunktion" der Größe S bezeichnen.

Man bestimme nunmehr die Wurzeln der „determinierenden" oder „Stammgleichung"

$$Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Sie seien mit

$$p_1, p_2, \ldots p_\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

bezeichnet. Es sind dies die sogenannten „Eigenwerte" des Systems.

Dann gibt der Ausdruck

$$S = \frac{K}{Z(0)} + K \sum_\nu \frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu \left(\frac{dZ}{dp}\right)_{p_\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

den gesuchten zeitlichen Verlauf der Systemgröße S unter der Einwirkung einer an der Stelle P im Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich auftretenden, dann konstant bleibenden Kraft K an.

Die Gl. 4) ist die Formel von Heaviside. Es gibt Ausnahmefälle, in denen die Entwicklung versagt; Heaviside führt Beispiele dafür an. Wir werden darauf noch zurückkommen. Außerdem wollen wir noch einen Punkt hervorheben, auf den Heaviside nicht eingeht; nämlich, daß bei der Formel 4) vorausgesetzt ist, daß sämtliche Wurzeln p_ν voneinander und von Null verschieden sind. Trifft das nicht zu, so ist die Entwicklung in der später anzugebenden Weise abzuändern.

Digitized by Google

Die Heavisidesche Formel liefert auch die Grundlage für Behandlung des Falles, daß die Kraft K nicht konstant, sondern zeitlich veränderlich ist:

$$K = K(t).$$

Hier kann man annehmen, daß die in Wirklichkeit stetig veränderliche Kraft während eines Zeitteilchens $d\tau$ konstant ist und sich erst am Ende dieses Zeitteilchens um den Betrag

$$\frac{dK}{dt} d\tau$$

plötzlich ändert. Zu dieser unstetigen Teilkraft gehört eine Teilgröße

$$dS = f(t, \tau)\, d\tau,$$

die nach Gl. 4) zu berechnen ist. Der Wert der Größe S im Zeitpunkt t ist gleich der Summe der dS, die von allen bis dahin eingetretenen Kraftänderungen herrühren, d. h.

$$S = \int_0^t f(t, \tau)\, d\tau.$$

Diese Formel kommt u. a. bei der Berechnung von Einschaltvorgängen mit Wechselstrom in Betracht.

3. Herleitung der Heavisideschen Formel. Die Kraft $\overline{K}$, deren Wirkung auf das System gesucht wird, ist eine im Zeitpunkt $t = o$ unstetige Größe:

$$\left.\begin{aligned} \overline{K} &= o \text{ für } t < o \\ \overline{K} &= K \text{ für } t > o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Sie läßt sich durch das folgende Fouriersche Integral darstellen:

$$\overline{K} = \frac{K}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

$i = \sqrt{-1}$ bedeutet die imaginäre Einheit. Faßt man p als komplexe Integrationsvariable auf, so ist der Integrand in 6) eine analytische Funktion von p. Sie besitzt im Punkte $p = o$ einen Pol erster Ordnung; sonst ist sie überall im Endlichen regulär. Als Integrationsweg ist in der komplexen p-Ebene (Fig. 1) die Achse AB der imaginären Zahlen zu nehmen, wobei wir jedoch den Pol O durch einen kleinen Halbkreis umgehen, wie in Fig. 1 angedeutet.

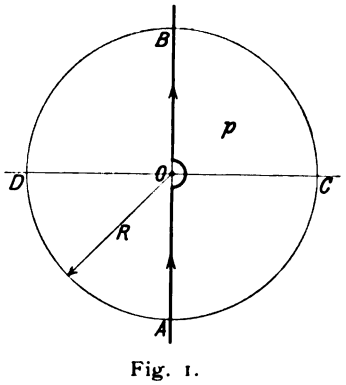


Fig. 1.

Wir wollen nunmehr den ungeschlossenen Integrationsweg in 6) durch einen geschlossenen ersetzen. Zu dem Zwecke ziehen wir in der komplexen Ebene einen Kreis um den Nullpunkt mit dem sehr großen Radius R. Für negative Werte von t wird das auf dem Halbkreise BCA genommene Integral

$$\int_{BCA} \frac{e^{pt}}{p}\, dp$$

mit wachsendem R beliebig klein, wie eine einfache Rechnung zeigt. Wir können daher für negative t den offenen Integrationsweg AOB in Gl. 6) durch den geschlossenen Weg AOBCA ersetzen und erhalten somit

$$\overline{K} = \frac{K}{2\pi i} \int_{AOBCA} \frac{e^{pt}}{p}\, dp \quad \text{für } t < o. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6a)$$

Digitized by Google

Für die positiven Zeiten verschwindet das Integral auf dem Halbkreise BDA; daher wird

$$\overline{K} = \frac{K}{2\pi i} \int_{AOBDA} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad \text{für } t > 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6b)$$

Da in dem Ausdruck 6a) der Integrationsweg ein Gebiet umschließt, in dem der Integrand überall regulär ist, hat das Integral nach den Lehren der Funktionentheorie den Wert Null. In der Tat soll nach der ersten Gl. 5) für $t < 0$ die Kraft $\overline{K} = 0$ sein.

Der Integrationsweg im Ausdruck 6b) umschließt den Pol $p = 0$. Da im übrigen Teil der p-Ebene der Integrand sich regulär verhält, ist der Weg des Integrals gleich dem $2\pi i$fachen Residuum[1]) des Integranden in dem Pol $p = 0$. Das Residuum ist hier gleich 1, der Ausdruck 6b) erhält demgemäß den Wert K, den er nach der zweiten Gl. 5) haben soll. Durch unsere Betrachtung haben wir also nebenbei die Richtigkeit des Fourierschen Integrals 6) nachgewiesen.

Wir kehren nunmehr zur physikalischen Seite unseres Problems zurück. Die Kraft $\overline{K}$ erscheint im Ausdruck 6), bzw. in den Ausdrücken 6a) und 6b) dargestellt als Summe von Teilkräften

$$d\overline{K} = \frac{K dp}{2\pi i p} e^{pt},$$

die dem speziellen Zeitgesetz e^{pt} folgen. Für eine solche Kraft hat nach Gl. 1a) die gesuchte Systemgröße S den Wert

$$dS = \frac{K dp}{2\pi i p Z} e^{pt}.$$

Die Beziehungen im System sind nach Voraussetzung linear. Demnach sind die Wirkungen aller Teilkräfte einfach zu addieren, wenn man die Wirkung der Gesamtkraft erhalten will. Daher ist die gesuchte Größe

$$S = \frac{K}{2\pi i} \int \frac{e^{pt}}{pZ} dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Als Integrationsweg kommt gemäß 6a) und 6b) für negative Zeiten der geschlossene Weg AOBCA in der komplexen p-Ebene (Fig. 1) in Betracht; für positive Zeiten der Weg AOBDA.

Bevor wir den Ausdruck 7) weiter behandeln können, sind einige Bemerkungen über die Funktion Z vorauszuschicken. In jedem Einzelfall ergibt sich die Funktion Z aus den physikalischen Bedingungen des Systems; der Weg, sie zu finden, ist im Abschnitt 2 angedeutet worden; wir werden ihn später an Beispielen erläutern. Für den Augenblick kann uns aber ein spezieller Ausdruck für Z nichts nutzen; was wir brauchen, ist eine allgemeine Größe, die für alle, oder doch möglichst viele physikalische Systeme paßt. Daß wir nicht jede beliebige analytische Funktion von p gebrauchen können, zeigt das Beispiel

$$Z = \frac{\text{Konst.}}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

In diesem Falle werden die Teilintegrale von 7), die sich auf die großen Halbkreise beziehen, nicht Null; die Herleitung des Ausdrucks 7) ist hinfällig. Fälle, wie der in

---

[1]) Jede analytische Funktion kann in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle $p = p'$ in eine Reihe

$$f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (p - p')^n$$

entwickelt werden. Der Wert des Koeffizienten a_{-1} ist das Residuum. S. z. B. K. Knopp, Funktionentheorie, Bd. 1 (Sammlung Göschen), S. 138.

Digitized by Google

Gl. 8), kommen in physikalischen Problemen vor; es sind die von Heaviside angeführten Ausnahmen. Die physikalischen Vorgänge sind eben so vielgestaltig, daß sie sich nicht in eine einzige Formel pressen lassen. Immerhin bilden die genannten Fälle nur die Ausnahme (siehe das Beispiel im Abschnitt 6 der vorliegenden Arbeit).

Das Beispiel in Gl. 8) führt uns dahin, von der Funktion Z folgende mathematische Eigenschaft zu verlangen.

Voraussetzung A. Der reziproke Wert

$$\frac{1}{Z}$$

soll nicht für alle absolut großen Werte von p beliebig groß werden. Man soll vielmehr Kreise von beliebig großem Radius R (Fig. 1) so legen können, daß auf diesen Kreisen Z^{-1} unterhalb einer festen (d. h. von p unabhängigen) endlichen Schranke liegt[1]).

Diese Voraussetzung reicht hin, die Gültigkeit der Formel 7) für die angegebenen Integrationswege zu begründen.

Über die physikalischen Systeme, die wir weiterhin betrachten wollen, machen wir noch die folgende Annahme:

Das Gleichgewicht, das vor der Einwirkung der Kraft K (für $t < 0$) bestanden hat, soll ein stabiles gewesen sein. Dann haben sicherlich für alle negativen Zeiten die veränderlichen Größen S den Wert Null gehabt[2]). Das Integral 7) soll also für negative t identisch verschwinden. Wir erfüllen diese Forderung durch die

Voraussetzung B. Keine der Wurzeln von $Z = 0$ soll einen positiven reellen Anteil haben.

Dies bedeutet, daß keine der Wurzeln in dem von dem Integrationswege AOBCA umschlossenen Gebiete liegt. Dann ist also der Integrand in diesem Gebiete regulär, woraus das Verschwinden des Integrals 7) für negative t folgt.

Wir wollen die Voraussetzung B physikalisch erläutern. Wäre der reelle Anteil einer Wurzel positiv, also

$$p_\nu = + x \pm iy,$$

so würde in der Heavisideschen Formel 4) ein Glied auftreten mit dem Faktor

$$e^{p_\nu t} = e^{+xt} e^{\pm iyt},$$

der eine Schwingung mit wachsender Amplitude bedeutet. Energetisch ist ein solcher Vorgang natürlich nur denkbar, wenn dem System dauernd Energie von außen zugeführt wird. Fälle dieser Art kommen praktisch vor. Man braucht z. B. nur an einen elektrischen Schwingungskreis aus Kondensator und Spule zu denken, der zu einem Gleichstrom-Lichtbogen parallel geschaltet ist, oder an einen Gleichstrom-Nebenschlußmotor, dessen Bürsten aus ihrer Mittellage entgegen der Drehrichtung des Ankers verschoben sind[3]). In diesen Fällen hat die determinierende Gleichung Wurzeln mit positivem reellen Anteil; Einschaltvorgänge solcher Systeme sind nicht nach der Heavisideschen Formel zu behandeln. Ein Gleichgewicht des Systems ist wohl denkbar;

---

[1]) Das schließt natürlich nicht aus, daß es auch bestimmte große Kreise gibt, auf denen dieser Forderung nicht genügt ist. Für die Funktion $Z = \mathfrak{Cof}\, mp$ sind dies z. B. alle Kreise mit dem Radius $R = \frac{(2k-1)\pi}{2m}$, wobei k irgendeine ganze Zahl ist. Dagegen lassen sich in dem Ringgebiet zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kreisen dieser Art immer Kreise ziehen, auf denen die Funktion Z der Voraussetzung A genügt.

[2]) Unter S sollen die Abweichungen vom Gleichgewichtszustand gemeint sein.

[3]) K. W. Wagner, ETZ 1907, S. 286.

Digitized by Google

aber es ist nicht stabil. Tatsächlich treten hier „selbsterregte" Schwingungen auf; mitunter kippt das System auch sogleich gänzlich um [1]).

Eine dritte Voraussetzung, die hinsichtlich der Funktion Z zu machen ist, ergibt sich aus der physikalischen Erwägung, daß für eine bestimmte Kraftfunktion der Form e^{pt} nur ein einziger erzwungener Vorgang möglich ist. Schwingt z. B. die Kraft nach einer Sinusfunktion (p rein imaginär), so schwingen alle Systemgrößen mit derselben Frequenz, und ihre Amplituden und Phasen sind durch die Amplitude und Phase der Kraft eindeutig bestimmt. Daher ist die Voraussetzung C zu machen: Die Funktion Z, die nach Gl. 1a) den Zusammenhang zwischen der Kraft und der zugehörigen erzwungenen Systembewegung vermittelt, muß eine eindeutige Funktion von p sein [2]).

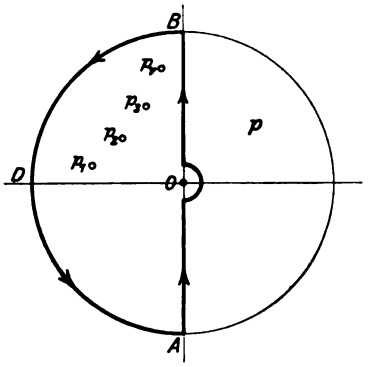


Fig. 2a.

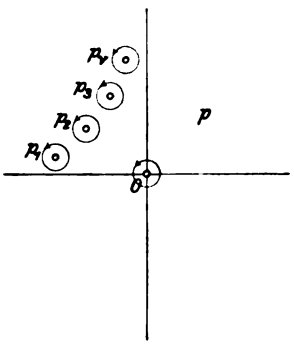


Fig. 2b.

Unter den vorstehenden drei Voraussetzungen sind wir nunmehr in der Lage, das Integral 7) zu berechnen. Sein Wert ist bestimmt durch Lage und Art der Pole des Integranden. Einer von ihnen ist die Stelle $p = 0$; die übrigen sind die Wurzeln

$$p_1, p_2, \cdots p_\nu, \cdots$$

der Stammgleichung $Z = 0$ (vgl. Fig. 2a). Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, in welchem diese Wurzeln alle voneinander und von Null verschieden sind.

Das Integral auf dem Wege AOBDA (Fig. 2a) kann nach den Regeln der Funktionentheorie [3]) aufgelöst werden in eine Summe von Integralen längs kleiner Kreise um die Pole des Integranden (Fig. 2b):

$$\int_{\text{AOBDA}} = \int_{\text{Kreis um 0}} + \sum_\nu \int_{\text{Kreis um } p_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Bezeichnen wir das Residuum des Integranden in dem Pole p_ν mit P_ν, so ist der Wert des entsprechenden Teilintegrals gleich $2\pi i P_\nu$. Daher wird nach Gl. 7) und 9):

$$S = K\left(P_0 + \sum_\nu P_\nu\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Zur Bestimmung des Residuums P_ν ist der Integrand für die Umgebung von p_ν in eine Potenzreihe von

$$p - p_\nu = \xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11a)$$

[1]) Heaviside hat solche Fälle nicht in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen; er hatte dazu keinen Anlaß, da elektrische Stromkreise, in denen selbsterregte Schwingungen u. dergl. auftreten, damals noch nicht bekannt waren. Ein Beispiel aus der Akustik ist die gestrichene Violinsaite; auch die Bildung der Schäfchenwolken gehört hierher.

[2]) Im allgemeinen hat die Funktion $\frac{1}{Z}$ in der komplexen Ebene im Endlichen nur isolierte Pole, besitzt also den Charakter einer meromorphen Funktion. Dies ist bei der folgenden Beweisführung vorausgesetzt. Es kommt aber auch vor, daß die Pole eine Häufungsstelle im Endlichen besitzen (vgl. das Beispiel im Abschnitt 11). In solchen Fällen kann die Überlegung, die zu der Gl. 9) führt, streng genommen nicht durchgeführt werden. Der Beweis der Heavisideschen Formel bedarf dann besonderer Überlegungen.

[3]) Siehe z. B. K. Knopp, Funktionentheorie I (Göschensammlung), § 17, S. 62, und § 35, S. 138.

Digitized by Google

zu entwickeln. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} e^{pt} &= e^{p_\nu t} e^{\xi t} = e^{p_\nu t}\left(1 + \xi t + \frac{\xi^2 t^2}{2} + \ldots\right) \\ p &= p_\nu + \xi \\ Z &= \xi\left(\frac{dZ}{dp}\right)_{p_\nu} + \frac{1}{2}\xi^2\left(\frac{d^2Z}{dp^2}\right)_{p_\nu} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{11b)}$$

Indem man diese Ausdrücke benutzt, erhält man die gewünschte Entwicklung in der Form

$$\frac{e^{pt}}{pZ} = \sum_n a_n \xi^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{11c)}$$

Wir brauchen lediglich den Koeffizienten a_{-1}, der gleich dem gesuchten Residuum P_ν ist. Er ergibt sich zu

$$a_{-1} = P_\nu = \frac{e^{p_\nu t}}{p_\nu\left(\frac{dZ}{dp}\right)_{p_\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{12a)}$$

Ebenso erhält man für den Pol $p = 0$

$$P_0 = \frac{1}{Z(0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{12b)}$$

Aus den Gl. 10), 12a) und 12b) folgt die Heavisidesche Formel 4).

4. Mehrfache Wurzeln der Stammgleichung. Bei der Berechnung der Residuen [Gl. 12a) und 12b)] war von wesentlicher Bedeutung die Annahme, daß die Wurzeln p_ν der Gleichung $Z = 0$ alle voneinander und von Null verschieden sind. Physikalisch liegt jedoch kein Grund vor, Systeme, bei denen diese Annahme nicht zutrifft, von der Betrachtung auszuschließen. Um gleich den allgemeinsten Fall zu erfassen, nehmen wir an, die Gleichung $pZ = 0$ besitze im Punkte p_ν (der auch mit dem Nullpunkt $p = 0$ identisch sein kann) eine k-fache Wurzel. Dann läßt sich pZ in der Form

$$pZ = (p - p_\nu)^k Z_1 = \xi^k Z_1$$

darstellen, wobei Z_1 eine Funktion von p ist, die im Punkte p_ν von Null verschieden ist. Man kann daher die folgende Entwicklung machen:

$$\frac{1}{pZ} = \frac{A_k}{\xi^k} + \frac{A_{k-1}}{\xi^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{\xi} + G(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \text{13a)}$$

Darin soll G eine ganze Funktion bedeuten. Multipliziert man diesen Ausdruck mit der ersten Gl. 11b), so gewinnt man eine Entwicklung der Form 11c). Darin besitzt der Koeffizient a_{-1}, das gesuchte Residuum, den Wert

$$P_\nu = e^{p_\nu t}\left[A_1 + \frac{A_2 t}{1!} + \frac{A_3 t^2}{2!} + \ldots + \frac{A_k t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \text{12c)}$$

Dies ist also der Ausdruck, der bei einer mehrfachen Wurzel der Gleichung $pZ = 0$ an die Stelle des Ausdrucks 12a) in der Heavisideschen Formel zu setzen ist.

II. Beispiele.

Die vorstehenden Ausführungen sind reichlich abstrakt. Sie konnten nicht anders sein, denn die Heavisidesche Formel umfaßt eine ungeheuere Fülle von physikalischen Erscheinungen. Hiervon vermögen die folgenden Beispiele nur einen schwachen Begriff zu geben. Jeder Techniker, jeder Physiker wird auf seinem Gebiet weitere Probleme finden, bei denen dieselbe Betrachtungsweise mit Erfolg anzuwenden ist. Heaviside selbst gibt in seinem früher genannten Buche viele Beispiele, vor allem

Digitized by Google

aus der Kabeltheorie[1]). Die folgenden Beispiele sind unter dem Gesichtspunkte ausgewählt, die Anwendung der Heavisideschen Formel auf typische Fälle verschiedener Art zu erläutern. Wir beginnen mit einem sehr einfachen Beispiel, das sich übrigens auch bei Heaviside findet.

5. Das Einschalten einer Spule (Fig. 3). Die Spule besitze die Induktivität L und den Widerstand R. Die Vorgänge beim Einschalten werden von der bekannten Differentialgleichung

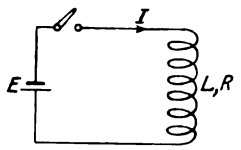


Fig. 3.

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14a)$$

beherrscht[2]). Für einen durch die elektromotorische Kraft

$$E = E_p e^{pt}$$

erzwungenen Vorgang ist der Strom $I = I_p e^{pt}$. Durch Einsetzen dieser Werte in die vorstehende Differentialgleichung ergibt sich die Beziehung

$$I = \frac{E_p e^{pt}}{R + Lp}.$$

Sie entspricht der allgemeinen Gl. 1a), wenn wir unter der „Kraft" hier die EMK und unter der gesuchten Systemgröße S den Strom I verstehen. Die Stammfunktion Z hat hier den Wert

$$Z = R + Lp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14b)$$

und bedeutet den Widerstandsoperator der Spule. Die Stammgleichung $Z = 0$ besitzt nur die eine Wurzel

$$p_1 = -\frac{R}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14c)$$

Ferner ist in unserm Falle

$$Z(0) = R \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dp} = L \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14d)$$

Setzt man alles dies in die Heavisidesche Formel 4) ein, so gelangt man zu dem wohlbekannten Ausdruck für den zeitlichen Stromverlauf beim Einschalten:

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \ldots\ldots \quad 14e)$$

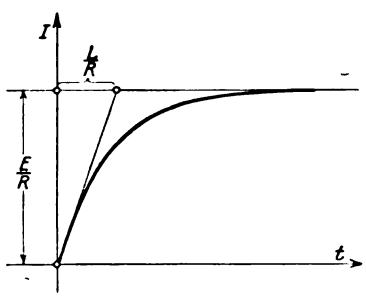


Fig. 4. Anstieg des Stromes beim Einschalten einer Spule.

Er wird durch die Fig. 4 veranschaulicht.

Der besondere Fall

$$R = 0$$

ist ein Beispiel für den Ausnahmefall einer Doppelwurzel der Gleichung $pZ = 0$. Es fällt nämlich hier die Wurzel p_1 [Gl. 14c)] mit dem Nullpunkt $p = 0$ zusammen. Wir dürfen deshalb die Heavisidesche Formel nicht ohne weiteres anwen-

[1]) Im Anschluß an gleichartige Rechnungen Heavisides hat neuerdings H. W. Malcolm zahlreiche Probleme aus der Kabeltelegraphie mittels der Heavisideschen Formel behandelt. („The Electrician", London, Bd. 68 (1912), S. 876ff.; Bd. 71 (1913), S. 16ff.; Bd. 72 (1913), S. 14ff.; Bd. 73 (1914), S. 958ff.) Malcolm hat auch versucht, die Heavisidesche Formel zu beweisen. Seine Überlegungen sind indessen lückenhaft. Das zeigt sich schon daran, daß sie weder zu den Voraussetzungen hinführen, denen die Funktion Z(p) zu unterwerfen ist (vgl. den Abschnitt 3), noch auf die Notwendigkeit einer Abänderung der Heavisideschen Formel im Falle mehrfacher, bzw. verschwindender Eigenwerte (Abschnitt 4).

[2]) H. v. Helmholtz, Ann. d. Phys., Bd. 83 (1851), S. 505; Wissenschaftl. Abhandlungen I, S. 429.

Digitized by Google

den; wir müssen vielmehr auf dem im Abschnitte 4) angegebenen Wege vorgehen. Die Entwicklung 13a) dieses Abschnitts wird in dem vorliegenden besonderen Fall sehr einfach; sie beschränkt sich auf ein einziges Glied:

$$\frac{1}{pZ} = \frac{1}{Lp^2}.$$

Wir sehen, daß alle Koeffizienten A den Wert Null haben, mit Ausnahme von

$$A_2 = \frac{1}{L}.$$

Da hier $p_\nu = 0$ ist, nimmt das Residuum P_ν [Gl. 12c)] den Wert

$$P_\nu = \frac{t}{L}$$

an, so daß nach Gl. 10)

$$I = \frac{Et}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14f)$$

wird. Diese Formel drückt das bekannte lineare Ansteigen des Stromes in einer widerstandslosen Spule aus. Natürlich führt auch der Grenzübergang $R = 0$ in der Formel 14e) zu demselben Ergebnis.

6. Das Einschalten eines Kondensators. Ersetzt man in dem Stromkreis in Fig. 3 die Spule durch einen Kondensator, so erhält man eine Anordnung, auf welche die Heavisidesche Formel nicht anwendbar ist. Der Widerstandsoperator des Kondensators

$$Z = \frac{1}{Cp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

ist nämlich gerade von der Form 8), die zu den durch die Voraussetzung A im Abschnitt 3 ausgeschlossenen Sonderfällen gehört. Daß hier mit der Heavisideschen Formel nichts anzufangen ist, zeigt sich schon daran, daß die Gleichung $pZ = 0$ nicht möglich ist, da die Größe pZ den konstanten Wert $\frac{1}{C}$ hat. Das Versagen der Heavisideschen Formel wäre geeignet, den Wert der Formel herabzusetzen, wenn der physikalische Vorgang beim Einschalten eines Kondensators ein stetiger Vorgang ähnlich dem im vorigen Abschnitt betrachteten wäre. Tatsächlich handelt es sich hier aber auch in physikalischer Hinsicht um einen Ausnahmefall, genauer gesagt, sogar um einen praktisch gar nicht herstellbaren Grenzfall; denn der Strom beim Einschalten eines reinen Kondensators würde bei konstanter EMK im allerersten Augenblick unendlich groß werden, um dann sofort wieder auf Null zu sinken! Daß für solche Extremfälle die Heavisidesche Formel versagt, ist gewiß nicht verwunderlich. In Wirklichkeit wird das Ansteigen des Stromes natürlich begrenzt durch den Widerstand der Zuleitungen, der Stromquelle und der Kondensatorbelegungen. Berücksichtigt man dies durch einen Widerstand R, den man sich dem Kondensator C vorgeschaltet denkt (Fig. 5), so erhält man einen stetigen Einschaltvorgang. Zugleich tritt auch die Heavisidesche Formel wieder in ihr Recht.

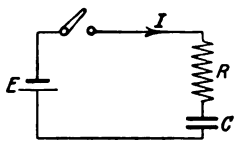


Fig 5.

Für den Widerstandsoperator erhält man jetzt den Ausdruck

$$Z = R + \frac{1}{Cp} = \frac{1 + RCp}{Cp}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16a)$$

der der Voraussetzung A genügt. Er liefert die eine Wurzel

$$p_1 = -\frac{1}{RC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16b)$$

Digitized by Google

und die Werte

$$Z(0) = \infty \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dp} = -\frac{1}{Cp^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16c)$$

Sie ergeben, in die Heavisidesche Formel eingesetzt, den gleichfalls wohlbekannten Ausdruck

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16d)$$

für den Ladestrom des Kondensators beim Einschalten. Man sieht aus dieser Formel, daß der Strom im ersten Augenblick ($t = 0$) nur durch den Widerstand R begrenzt wird, da sich der noch ungeladene Kondensator wie ein Kurzschluß verhält. Der Stromverlauf wird durch die Fig. 6 dargestellt.

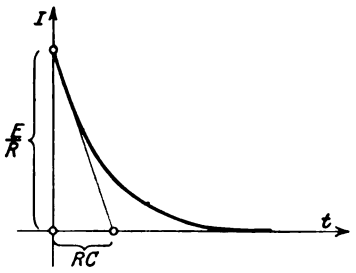


Fig. 6. Verlauf des Ladestromes beim Einschalten eines Kondensators.

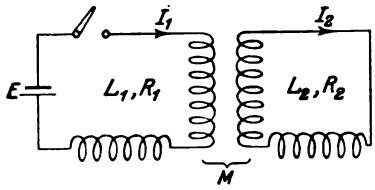


Fig. 7.

7. Magnetisch verkettete Kreise. Die Anordnung, die wir betrachten wollen, zeigt Fig. 7. Der primäre Kreis werde an die konstante EMK E gelegt. Die gesamte Induktivität dieses Kreises bezeichnen wir mit L_1, den gesamten Widerstand mit R_1, die Stromstärke mit I_1; für den sekundären (induzierten) Kreis seien L_2, R_2 und I_2 die entsprechenden Größen.

Die elektrischen Vorgänge in dem betrachteten System werden von den wohlbekannten Transformatorgleichungen

$$E = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$0 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

beherrscht. Für einen erzwungenen Vorgang von der Form e^{pt} haben wir

$$E = E_p e^{pt}; \quad I_1 = I_{1_p} e^{pt}; \quad I_2 = I_{2_p} e^{pt}$$

einzusetzen. Hiermit vereinfachen sich die Transformatorgleichungen zu

$$\left.\begin{aligned} E &= (R_1 + L_1 p) I_1 + M p I_2 \\ 0 &= (R_2 + L_2 p) I_2 + M p I_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17a)$$

Wir stellen uns die Aufgabe, den Verlauf des Primärstromes I_1 zu bestimmen. Zu dem Zwecke eliminieren wir I_2 aus den vorstehenden Gleichungen und erhalten dann

$$E = \left(R_1 + L_1 p - \frac{M^2 p^2}{R_2 + L_2 p}\right) I_1 = Z I_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17b)$$

Die Gleichung $Z = 0$ lautet hier

$$(R_1 + L_1 p)(R_2 + L_2 p) - M^2 p^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17c)$$

Es ist nützlich, an dieser Stelle die Begriffe des Streukoeffizienten σ und der Zeitkonstanten T_1, bzw. T_2 des primären, bzw. sekundären Kreises einzuführen. Sie haben die Werte

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}, \quad T_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{L_2}{R_2}.$$

Digitized by Google

Hiermit nimmt die Gl. 17c) die Form

$$p^2 + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)p + \frac{1}{\sigma T_1 T_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17d)$$

an. Sie besitzt zwei Wurzeln p_1 und p_2. In dem praktisch wichtigen Fall, in dem die beiden Kreise eng miteinander verkoppelt sind, ist σ eine kleine Zahl. Dann hat man für die beiden Wurzeln die bequemen Näherungswerte [1])

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{T_1 + T_2} \\ p_2 &= -\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17e)$$

In der Heavisideschen Formel brauchen wir die Größe $p\frac{dZ}{dp}$. Der Ausdruck für Z ist in der Formel 17b) enthalten. Er liefert den Wert

$$p\frac{dZ}{dp} = pL_1 - \frac{2p^2M^2}{R_2 + L_2 p} + \frac{p^3M^2L_2}{(R_2 + L_2 p)^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung $Z = 0$ vereinfacht sich dies nach leichter Zwischenrechnung zu

$$p\frac{dZ}{dp} = -R_1\left(1 + \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}\right).$$

Hierin ist für p sowohl der Wert p_1 als auch der Wert p_2 einzusetzen; man erhält [2]):

$$\left.\begin{aligned} \left(p\frac{dZ}{dp}\right)_{p_1} &= -R_1\frac{T_1 + T_2}{T_1} \\ \left(p\frac{dZ}{dp}\right)_{p_2} &= -R_1\frac{T_1 + T_2}{T_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17f)$$

Die Größe $Z(0)$ (der Widerstandsoperator der Primärspule für Gleichstrom) ist im vorliegenden Falle gleich R_1. Daher ist der gesuchte Stromverlauf:

$$I_1 = \frac{E}{R_1}\left[1 - \frac{T_1}{T_1 + T_2}e^{p_1 t} - \frac{T_2}{T_1 + T_2}e^{p_2 t}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17g)$$

Nach Gl. 17e) ist p_2 dem Betrage nach viel größer als p_1; dies bedeutet, daß das dritte Glied auf der rechten Seite der Gl. 17g) viel schneller verklingt, als das zweite [3]). Der Anstieg des Stromes I_1 wird durch die Fig. 8 veranschaulicht.

Der Verlauf des Sekundärstromes läßt sich in derselben Weise berechnen.

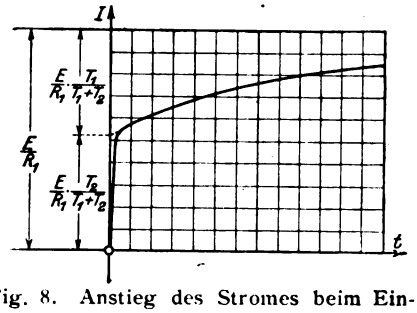


Fig. 8. Anstieg des Stromes beim Einschalten einer Spule mit Dämpferwicklung.

8. Der elektrische Schwingnngskreis. a) Das Einschalten mit konstanter Spannung. Für den Stromkreis nach Fig. 9 aus Spule und Kondensator gilt die Gleichung

[1]) K. W. Wagner, „Über die Wirkungsweise von Dämpferwicklungen auf Gleichstrommagneten", Elektrotechnik und Maschinenbau (Wien) 1909, S. 804, 829. Siehe Gl. 9a), bzw. 6b) dieses Aufsatzes, ferner die experimentell aufgenommenen Kurven in Fig. 2 und das Zahlenbeispiel.

[2]) Bei der Berechnung der Größe $\left(p\frac{dZ}{dp}\right)_{p_2}$ ist näherungsweise $1 + T_1 p_2$ durch $T_1 p_2$ und $1 + T_2 p_2$ durch $T_2 p_2$ ersetzt worden, was bei der vorausgesetzten Kleinheit von σ zulässig ist.

[3]) Dies hat folgenden Grund. Das zweite Glied stellt die Aufspeicherung der Energie im magnetischen Hauptfelde, das dritte die Aufspeicherung der Energie im Streufelde dar. Da der erste Energiebetrag bei dem hier vorausgesetzten Falle enger Kopplung viel größer ist als der zweite, so dauert der Aufbau des Hauptfeldes viel länger als der Aufbau des Streufeldes.

Digitized by Google

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt.$$

R und L bedeuten den Widerstand und die Induktivität der Spule, C die Kapazität des Kondensators. Im Falle erzwungener Bewegung wird

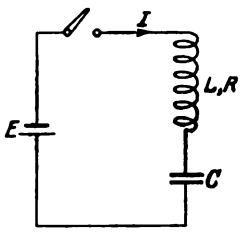


Fig. 9.

$$E = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) I = ZI \quad \ldots\ldots \quad 18a)$$

Hierzu gehört die Stammgleichung

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0,$$

mit den Wurzeln

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \ldots\ldots \quad 18b)$$

wofür wir kurz

$$\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} = -\alpha \pm i\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18c)$$

schreiben. Während in den vorher betrachteten Fällen lauter reelle Wurzeln auftreten, begegnen wir hier zum ersten Male dem Falle komplexer Wurzeln. Es wird sich zeigen, daß sich das Imaginäre in der Endformel wieder heraushebt [1]).

Ferner ist mit Rücksicht auf 18a), 18b) und 18c)

$$p\frac{dZ}{dp} = Lp - \frac{1}{Cp} = R + 2Lp = \pm 2Li\omega$$

und

$$Z(0) = \infty,$$

so daß die Heavisidesche Formel zur Berechnung des Stromes folgendermaßen lautet:

$$J = \frac{E}{2Li\omega} e^{-\alpha t}\left(e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18d)$$

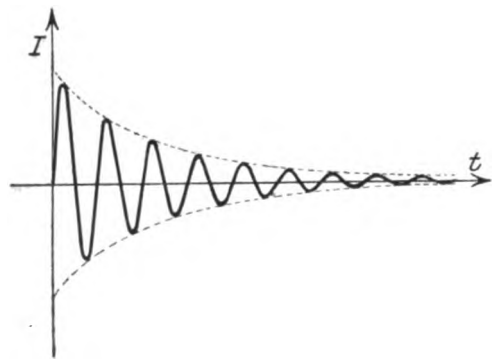


Fig. 10. Stromverlauf beim Einschalten eines Schwingungskreises.

Da bekanntlich

$$\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin x$$

ist, so kann man für 18d) auch schreiben:

$$J = \frac{E}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad \ldots \quad 18e)$$

Diese Gleichung bedeutet eine gedämpfte Schwingung, die durch die Fig. 10 veranschaulicht wird.

b) Ein Einschaltvorgang bei konstantem Strome. Wir denken uns in der Anordnung nach Fig. 11 den Schalter S geschlossen. Sie bilde einen Teil eines Stromkreises mit konstanter Stromstärke, etwa in einer Anlage für hochgespannten Gleichstrom nach Thurys System. Der Betrieb einer solchen Anlage beruht bekanntlich darauf, daß man die nicht benötigten Apparate, Maschinen usw. kurzschließt. Die Inbetriebnahme der Anordnung nach Fig. 11 geschieht dadurch, daß

[1]) In physikalischen Problemen mit reellen Konstanten kommt das Imaginäre stets nur in der konjugiert-komplexen Form vor; dies ist der mathematische Grund für das reelle Endergebnis.

Digitized by Google

man den Kurzschlußschalter S öffnet. Wir fragen nach dem zeitlichen Verlauf der Klemmenspannung V nach dem Öffnen des Schalters.

In den bisher betrachteten Fällen spielte stets die elektromotorische Kraft die Rolle der eingeprägten Kraft K der Heavisideschen Formel. Im vorliegenden Beispiel ist es dagegen die Stromstärke I. Der Strom, der durch die in Fig. 11 stark gezeichnete Verzweigung fließt, hat einen vorgeschriebenen Wert; er ist vor dem Öffnen des Schalters ($t = -\infty$ bis 0) gleich Null, nachher (von $t = 0$ bis $+\infty$) besitzt er den konstanten Wert I.

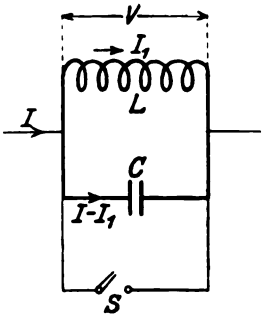


Fig. 11.

Zwischen der gesuchten Klemmenspannung V und dem Teilstrome I_1 in der Spule besteht die Gleichung

$$V = L\frac{dI_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19a)}$$

Den Widerstand der Spule wollen wir diesmal vernachlässigen. Der Teilstrom $I - I_1$ lädt die Kapazität C zur Spannung V auf; daher ist

$$I - I_1 = C\frac{dV}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19b)}$$

Wenn wir zunächst den erzwungenen Vorgang betrachten, in welchem sich alle Größen nach der Zeitfunktion e^{pt} verändern, so erhalten wir aus den beiden letzten Gleichungen die Beziehungen

$$V = LpI_1; \qquad I - I_1 = CpV$$

und hieraus

$$V = \frac{Lp}{1 + LCp^2}I = \frac{I}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19c)}$$

mit

$$Z = Cp + \frac{1}{Lp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19d)}$$

Die Stammgleichung $Z = 0$ besitzt die beiden Wurzeln

$$p_1 = +i\omega, \qquad p_2 = -i\omega, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19e)}$$

worin

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19f)}$$

Außerdem berechnet man aus 19d):

$$p\frac{dZ}{dp} = Cp - \frac{1}{Lp} = 2Cp,$$

$$Z(0) = \infty.$$

Folglich wird nach der Heavisideschen Formel 4)

$$V = \frac{1}{2C}\left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right] = \frac{I}{C\omega}\sin\omega t$$

oder, mit Rücksicht auf 19f)

$$V = I\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{19g)}$$

Setzt man hierin für C einen kleinen Wert, so wird V sehr groß. Dies bedeutet, daß beim Einschalten induktiver Belastung in Stromkreisen mit konstanter Stromstärke hohe Überspannungen entstehen. Man kann sie hinabdrücken, indem man der Spule einen genügend großen Kondensator parallel schaltet. Ein praktischerer Weg besteht darin, daß man an Stelle des Kondensators einen induktionsfreien Widerstand R setzt; man

Digitized by Google

kann ihn ausschalten, sobald der Strom in der Spule stationär geworden ist. Die höchste Überspannung wird in diesem Falle gleich IR. Die Berechnung des Verlaufs der Klemmenspannung nach der Heavisideschen Formel gestaltet sich sehr einfach; doch wollen wir hier nicht darauf eingehen.

c) Die Unterbrechung des Hauptstromes. Die Ergebnisse des vorigen Beispiels enthalten auch die Lösung des folgenden Problems. Der Hauptstrom I der Anordnung nach Fig. 11 werde plötzlich unterbrochen; welchen Verlauf nimmt alsdann die Klemmenspannung V?

Der plötzlichen Unterbrechung des Stromes I ist gleichwertig die Überlagerung eines plötzlich entstehenden Stromes vom Betrage — I. Dieser Vorgang entspricht bis auf das Vorzeichen dem unter b) betrachteten Phänomen. Daher wird in unserem Falle die Klemmenspannung denselben Verlauf nehmen wie vorher (Gl. 19g), jedoch das umgekehrte Vorzeichen besitzen.

Indem man derartige Überlegungen anstellt, kann man in vielen Fällen Ausschaltvorgänge auf Einschaltvorgänge zurückführen und somit ebenfalls nach der Heavisideschen Formel berechnen.

Aus der Gl. 19g) folgern wir, daß auch beim plötzlichen Abschalten induktiver Belastung hohe Überspannungen entstehen, wenn die parallel geschaltete Kapazität klein ist. Als Gegenmittel können die unter b) genannten Maßnahmen dienen. Übrigens verschwindet beim gewöhnlichen Ausschalten der Strom nicht plötzlich, sondern unter Bildung eines Unterbrechungsfunkens in einer endlichen Zeit, wodurch die Überspannung ebenfalls verkleinert wird.[1])

9. Künstliches Kabel. Zur besseren Ausnutzung betreibt man lange Telegraphenkabel bekanntlich in der sogenannten Duplex- oder Gegensprechschaltung. Sie ermöglicht es, gleichzeitig nach beiden Richtungen Nachrichten zu übermitteln. Ein wesentliches Glied aller Gegensprechschaltungen ist das „künstliche Kabel"; es ist dies ein

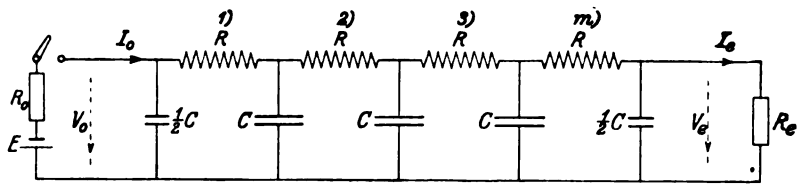


Fig. 12. Künstliches Kabel.

Stromkreis, der in elektrischer Beziehung eine möglichst genaue Nachbildung des wirklichen Kabels sein soll. Die künstlichen Kabel baut man häufig, wie aus Fig. 12 ersichtlich, aus Widerständen und Kapazitäten auf, die den nämlichen Größen des natürlichen Kabels entsprechen. Die Zeichen R_0 und R_e in der Fig. 12 sollen die Widerstandsoperatoren der am Anfang und Ende des Kabels angeschlossenen Stromzweige bedeuten.

Die Betrachtung des Stromkreises nach Fig. 12 bietet gegenüber den bisher behandelten Kreisen insofern etwas Neues, als es sich um ein System mit einer zwar endlichen, aber unter Umständen sehr großen Anzahl von Freiheitsgraden handelt. Sie ist mindestens gleich der Zahl der Glieder des künstlichen Kabels. Die gewöhnliche Art der Behandlung des Einschaltvorganges: Aufstellung der Differentialgleichungen, Anschreiben des allgemeinen Integrals und Bestimmung der Konstanten führt bereits bei wenigen Gliedern auf umfangreiche Rechnungen und stößt bei größerer Gliederzahl auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Da trifft es sich nun sehr glücklich, daß

[1]) Der Ausschaltevorgang bei endlicher Unterbrechungszeit wird von Herrn W. Rogowski in einer im Druck befindlichen Arbeit behandelt.

Digitized by Google

die Heavisidesche Formel in Verbindung mit der von mir vor einiger Zeit veröffentlichten Theorie des Kettenleiters[1]) zu einer ebenso einfachen wie eleganten Lösung des Einschaltproblems führt.

In der genannten Arbeit werden vornehmlich die erzwungenen Schwingungen des Kettenleiters behandelt. Sie bilden einen besonderen Fall der hier betrachteten erzwungenen Bewegung nach dem Gesetze e^{pt}. Für rein imaginäres p geht diese Bewegung in die erzwungene Sinusschwingung über. Die in meiner Arbeit hergeleiteten Formeln gelten nun auch für eine erzwungene Bewegung allgemeiner Art mit beliebigem komplexen p. Wir können daher aus dieser Arbeit die folgenden Begriffe und Formeln übernehmen.

Die „Fortpflanzungskonstante" γ des künstlichen Kabels ist aus der Formel

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{RCp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20a)$$

zu entnehmen. Ihr gleichwertig ist die Formel

$$\operatorname{Cof}\gamma = 1 + \frac{RCp}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20b)$$

Ferner ist der „Wellenwiderstand" W des künstlichen Kabels:

$$W = \frac{2\operatorname{Tg}\frac{1}{2}\gamma}{Cp} = \frac{1}{\operatorname{Cof}\frac{1}{2}\gamma}\sqrt{\frac{R}{Cp}} = \sqrt{\frac{R}{Cp}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}RCp}} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Der Strom I_e am fernen Ende eines künstlichen Kabels aus m Gliedern hat den Betrag

$$I_e = \frac{E}{Z},$$

worin

$$Z = (R_o + R_e)\operatorname{Cof} m\gamma + \left(W + \frac{R_o R_e}{W}\right)\operatorname{Sin} m\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

ist. Damit sind alle Grundlagen für die Anwendung der Heavisideschen Formel gegeben. Es kommt uns hier nicht darauf an, das Verhalten künstlicher Kabel unter allen möglichen Umständen zu studieren; wir wollen vielmehr nur den Weg zeigen, auf dem dies geschehen kann. Wir wollen daher zur Vermeidung unnötiger Rechnungen nur den einfachen Fall betrachten, in welchem der Batteriestromkreis und der Empfangsstromkreis widerstandslos sind:

$$R_o = R_e = 0.$$

Hiermit vereinfacht sich der Operator Z zu

$$Z = W\operatorname{Sin} m\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23a)$$

Wir haben nun die Gleichung $Z = 0$ nach p aufzulösen. Man überzeugt sich zunächst an Hand des letzten Ausdruckes in Gl. 21) davon, daß der Faktor W für keinen endlichen Wert p zu null werden kann. Es bleibt also die Gleichung

$$\operatorname{Sin} m\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23b)$$

zu lösen. Sie hat unendlich viele Wurzeln; denn jeder Wert

$$\left.\begin{aligned} m\gamma &= ki\pi \\ k &= 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23c)$$

[1]) K. W. Wagner, „Die Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen", Archiv f. Elektrotechnik, Bd. 3 (1915) S. 315. Auf einem andern Wege (unter Benutzung von Determinanten) ist das Problem des künstlichen K bels von A. Vaschy (Annales télégraphiques, Paris 1884, S. 30; auch „Traité d'Electricité et de Magnetisme", Bd. II, S. 82, Paris 1890) und H. W. Malcolm (The Electrician, London 1914, Bd. 73, S. 958, Bd. 74, S. 9) behandelt worden.

Digitized by Google

genügt ihr. Die zugehörigen Werte von p ergeben sich aus 20a). Quadriert man diese Gleichung und setzt dann die vorstehenden Zahlen für γ ein, so erhält man

$$p_k = \frac{4}{RC} \mathfrak{Sin}^2 \frac{ki\pi}{2m} = -\frac{4}{RC} \sin^2 \frac{k\pi}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots 24)$$

Dieser Ausdruck lehrt, daß nur die m ersten Werte

$$p_k = p_1, p_2, \cdots p_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 24a)$$

voneinander verschieden sind. Denn setzt man in die Gl. 24) irgendeinen Wert $k > m$ ein, etwa $k = k_1 m + k_2$, worin k_1 eine beliebige ganze Zahl und k_2 eine ganze Zahl unterhalb m bedeutet, so erhält man stets einen Wert p_k, der unter den m ersten Werten bereits enthalten ist.

Die der Zahl $k = 0$ entsprechende Wurzel $\gamma = 0$ von Gl. 23b) liefert keine Wurzel der determinierenden Gleichung (Gl. 23a), weil für $p = 0$ der erste Faktor unendlich groß wird, so daß der Ausdruck $W \mathfrak{Sin} m\gamma$ nicht verschwindet. Vielmehr ergibt eine einfache Rechnung beim Grenzübergang $p = 0$ den Wert

$$Z(0) = mR, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 25)$$

den man als den Gleichstromwiderstand auch ohne Rechnung unmittelbar aus der physikalischen Überlegung erschließen kann.

Die Stammgleichung besitzt also im ganzen nur die m Wurzeln, die sich aus 24) ergeben, wenn man darin die Zahlen $k = 1, 2 \ldots$ bis $k = m$ einsetzt. Ein übersichtliches Bild von dem Größenverhältnis dieser Wurzeln liefert die in Fig. 13 dargestellte Konstruktion, die auf der Gl. 24) beruht. Man ziehe einen Kreis mit dem Radius $\frac{4}{RC}$, teile den Viertelkreis in m gleiche Teile ein, fälle von jedem Teilpunkte das Lot auf den Durchmesser AB und von dem Fußpunkte dieses Lotes abermals das Lot auf den zugehörigen Radius. Dieser wird hierdurch in zwei Teile zerlegt. Die Länge des an den Kreisumfang angrenzenden Teilstückes gibt den Betrag der entsprechenden Wurzel p_k an. Die Fig. 13 bezieht sich auf den Fall $m = 8$; die stark gezeichneten Strecken stellen die Beträge der Wurzeln dar.

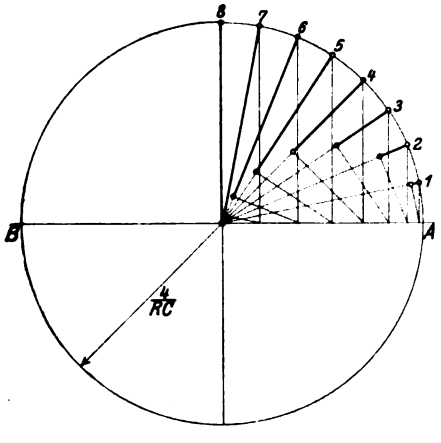


Fig. 13. Konstruktion zur Bestimmung der Eigenwerte eines künstlichen Kabels.

Zur Anwendung der Heavisideschen Formel müssen wir die Größe pdZ/dp kennen. Es ist

$$p\frac{dZ}{dp} = p\frac{dZ}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dp} \quad \ldots\ldots 26a)$$

Aus 20b) folgt durch Differenzieren

$$\frac{d\gamma}{dp} = \frac{RC}{2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 26b)$$

Aus 23a) erhalten wir unter Beachtung von 23b) und 21):

$$\frac{dZ}{d\gamma} = W m \mathfrak{Cof} m\gamma = m\sqrt{\frac{R}{Cp}\,\mathfrak{Cof} m\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots 26c)$$

Wir setzen nunmehr in diese Ausdrücke für γ den Wert aus Gl. 23c):

$$\gamma = \frac{ki\pi}{m}$$

Digitized by Google

ein und erhalten nach Ausführung einer leichten Zwischenrechnung

$$p\frac{dZ}{dp} = \frac{Rm}{2}\frac{(-1)^k}{\cos^2\frac{k\pi}{2m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 26d)$$

Unter Benutzung der Ausdrücke 24), 25) und 26d) kann die Heavisidesche Formel jetzt ohne weiteres hingeschrieben werden:

$$I_e = \frac{E}{Rm} + \frac{2E}{Rm}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k \cos^2\frac{k\pi}{2m}\, e^{-\frac{4t}{RC}\sin^2\frac{k\pi}{2m}} \quad \ldots\ldots 26e)$$

Läßt man die Gliederzahl m derart ins Unendliche wachsen, daß der Gesamtwiderstand $R_1 = mR$ und die Gesamtkapazität $C_1 = mC$ konstant bleiben, so muß die Gl. 26e) schließlich in die bekannte Thomsonsche Formel für den Strom am fernen Ende eines natürlichen Kabels übergehen. Dies geschieht in der Tat; denn für $m = \infty$ wird

$$\cos^2\frac{k\pi}{2m} = 1 \quad \text{und} \quad \sin^2\frac{k\pi}{2m} = \frac{k^2\pi^2}{4m^2}.$$

Hiermit ergibt sich aus 26e) die Thomsonsche Formel

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{R_1 C_1}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots 26f)$$

Es ist zweckmäßig, in den vorstehenden Ausdrücken 26e) und 26f) als Zeiteinheit nicht die Sekunde, sondern die Zeitkonstante $R_1 C_1 = m^2 RC$ des Kabels zu benutzen. Das heißt, man führt ein neues Zeitmaß

$$\tau = \frac{t}{R_1 C_1} = \frac{t}{m^2 RC}$$

ein. Dann lauten diese Formeln

für $m = 1$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}$$

für $m = 2$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 - e^{-8\tau}\right]$$

für $m = 3$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 - 1{,}5\, e^{-9\tau} + 0{,}5\, e^{-27\tau}\right]$$

für $m = 4$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 - 1{,}707\, e^{-9{,}38\tau} + e^{-32\tau} - 0{,}293\, e^{-54{,}05\tau}\right]$$

für $m = 5$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 - 1{,}809\, e^{-9{,}55\tau} + 1{,}309\, e^{-34{,}55\tau} - 0{,}691\, e^{-65{,}45\tau} + 0{,}191\, e^{-90{,}45\tau}\right]$$

für $m = \infty$:

$$I_e = \frac{E}{R_1}\left[1 - 2\, e^{-9{,}86\tau} + 2\, e^{-39{,}45\tau} - 2\, e^{-88{,}7\tau} + 2\, e^{-157{,}7\tau} - \ldots\right].$$

Die Berechnung liefert die aus der folgenden Tafel ersichtlichen Zahlenwerte. Ihr Verlauf wird durch die Kurven in Fig. 14 veranschaulicht.

Digitized by Google

τ	$\frac{R_1 I_e}{E}$				
	m = 2	3	4	5	∞
0,025	0,1813	0,0569	0,0255	0,0215	0,000325
9,05	0,3297	0,1732	0,1153	0,0862	0,0340
0,10	0,5507	0,4237	0,3710	0,3439	0,2929
0,15	0,6988	0,6199	0,5896	0,5749	0,5501
0,20	0,7981	0,7540	0,7401	0,7333	0,7229
0,25	0,8647	0,8423	0,8367	0,8339	0,8305
0,30	0,9093	0,8993	0,8976	0,8969	0,8966
0,40	0,9593	0,9387	0,9599	0,9604	0,9615
0,50	0,9817	0,9833	0,9843	0,9848	0,9856
0,60	0,9918	0,9932	0,9939	0,9942	0,9946
0,75	0,9975	0,9982	0,9985	0,9986	0,9987
1,00	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999

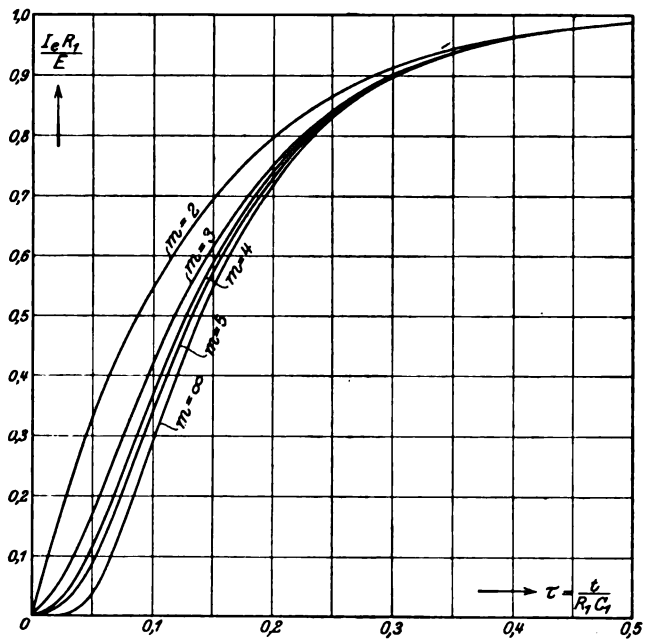


Fig. 14. Anstieg des Stromes am Ende von künstlichen Kabeln zu 2, 3, 4 und 5 Gliedern und am fernen Ende eines natürlichen Kabels.

10. Das Einschalten einer am Ende isolierten Leitung. Als erstes Beispiel für ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden wollen wir eine elektrische Leitung betrachten. L bezeichne die Induktivität, C die Kapazität; beide seien auf die Längeneinheit bezogen. Vom Widerstand und von der Ableitung sehen wir ab. Einen bestimmten Ort auf der Leitung legen wir durch seinen Abstand x vom Leitungsanfange fest (Fig. 15); den Strom im Punkte x nennen wir I, die Spannung V. l sei die Länge der Leitung. Es gelten dann die bekannten Differentialgleichungen

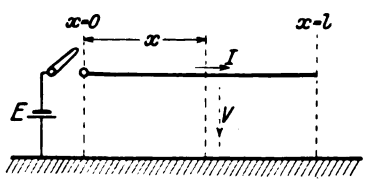


Fig. 15.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27a)$$

Digitized by Google

Sie nehmen für eine erzwungene Bewegung mit dem Zeitgesetz e^{pt} die einfachere Form

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dI}{dx} &= CpV \\ -\frac{dV}{dx} &= LpI \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27b)$$

an, aus der man für V die Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = LCp^2V = \gamma^2 V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27c)$$

erhält. Darin ist γ nur eine Abkürzung für die Größe

$$\gamma = p\sqrt{LC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Das allgemeine Integral von 27c) enthält zwei willkürliche Konstanten A und B. es lautet:

$$V = A\,\mathfrak{Cof}\,\gamma x + B\,\mathfrak{Sin}\,\gamma x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29a)$$

Den zugehörigen Strom liefert die zweite Gl. 27b):

$$I = -\sqrt{\frac{C}{L}}(A\,\mathfrak{Sin}\,\gamma x + B\,\mathfrak{Cof}\,\gamma x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29b)$$

Die beiden Konstanten A und B sind aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Am Anfang der Leitung, d. h. für $x = 0$, soll V in den Wert E übergehen. Dies tritt nach Gl. 29a) ein, wenn wir $A = E$ wählen. Die Leitung ist am Ende isoliert; daher muß für $x = l$ der Strom $I = 0$ sein. Wir setzen diese Bedingung in Gl. 29b) ein und erhalten

$$B = -E\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma l}.$$

Unter Benutzung der gefundenen Werte von A und B lassen sich nunmehr die Ausdrücke für V und I, wie folgt, vereinfachen:

$$V = E\frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\gamma l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30a)$$

$$I = E\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\gamma l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30b)$$

Sie gelten für die angenommene erzwungene Bewegung; wir stellen uns die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf der Spannung V am beliebigen Orte x beim Einschalten der konstanten Spannung E zu berechnen. Hierzu dient uns wieder die Heavisidesche Formel. Die Funktion Z, die wir brauchen, hat nach Gl. 30a) den Ausdruck

$$Z = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31a)$$

Sie ist als eine Funktion von p aufzufassen; γ hängt mit p nach Gl. 28) zusammen. Zunächst erkennen wir, daß für $p = 0$ auch $\gamma = 0$ und somit

$$Z(0) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31b)$$

ist. Die Wurzeln der Stammgleichung $Z = 0$ werden durch den Zähler der rechten Seite von 31a) bestimmt, d. h. durch die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma l = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31c)$$

Ihre Wurzeln sind die unendlich vielen Werte γ_k, die man erhält, wenn man in dem Ausdruck

Digitized by Google

$$\gamma_k = \pm \frac{(2k-1)i\pi}{2l} \quad \ldots \quad 31d)$$

alle ganzen Zahlen

$$k = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots \quad 31e)$$

einsetzt. Die zugehörigen Eigenwerte p_k sind nach Gl. 28):

$$p_k = \pm i \frac{1}{l\sqrt{LC}} \cdot (2k-1)\frac{\pi}{2}.$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \mu_k &= \frac{(2k-1)\pi}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 31f)$$

ein und schreiben hiermit kürzer

$$p_k = \pm i\mu_k v \quad \ldots \quad 31g)$$

Es ist

$$p\frac{dZ}{dp} = p\frac{dZ}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dp} = \gamma\frac{dZ}{d\gamma}.$$

Wenden wir diese Vorschrift auf Gl. 31a) an und berücksichtigen Gl. 31c), so erhalten wir

$$p\frac{dZ}{dp} = \gamma l \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)}.$$

Nun ist nach 31d) und 31f):

$$\gamma l = \pm i\mu l; \qquad \mathfrak{Sin}\,\gamma l = \pm i(-1)^{k+1};$$

daher:

$$\gamma l\,\mathfrak{Sin}\,\gamma l = (-1)^k \mu l = (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{2}.$$

Ferner

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x) = \cos\mu(l-x)$$

und

$$e^{pt} = e^{\pm i\mu v t}.$$

Setzt man alle diese Ausdrücke in die Gl. 4) ein, so folgt

$$V = E + \frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos\mu(l-x)}{2k-1}\left[e^{+i\mu vt} + e^{-i\mu vt}\right].$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen, wenn man die Beziehung

$$\tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

berücksichtigt und Gl. 31f) beachtet. Es ergibt sich dann die Endformel

$$V = E - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x\cos\mu_k vt}{2k-1} \quad \ldots \quad 32)$$

In meinem Buche „Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln“ [1]) habe ich die nämliche Formel auf einem anderen Wege hergeleitet und gezeigt, wie man an Hand dieser Formel den Ladevorgang durch ein Spiel von hin- und herlaufenden rechteckigen Wellen darstellen kann.

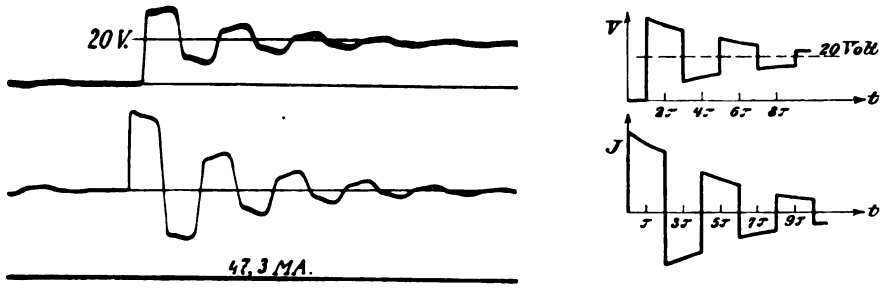
Bei den vorstehenden Betrachtungen sind die Verluste in der Leitung vernachlässigt. Man kann sie berücksichtigen, indem man dem zweiten Glied auf der rechten Seite von Gl. 32) einen Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha t}$ hinzufügt [2]). Zur Veranschaulichung des

[1]) Leipzig 1908, S. 9 ff.

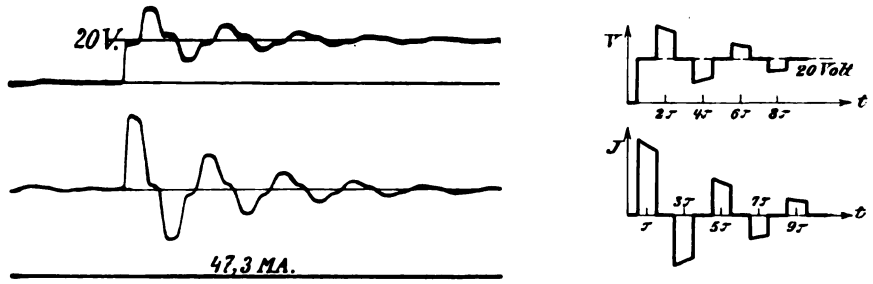
[2]) Zu diesem Faktor führt natürlich auch die Heavisidesche Formel, wenn man den Widerstand und die Ableitung in den Gleichungen stehen läßt.

Digitized by Google

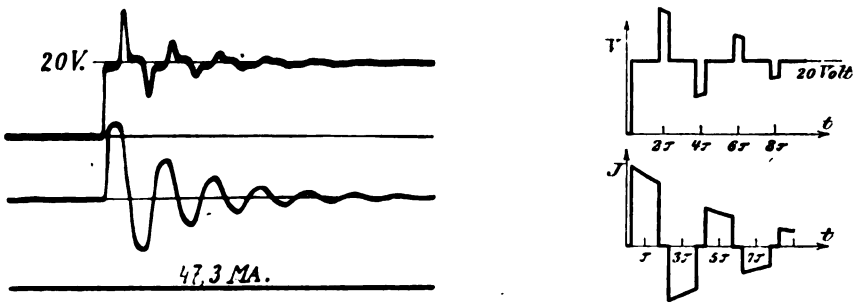
durch diese Gleichung beschriebenen Vorganges diene die Fig. 16, die einer früheren Arbeit entnommen ist[1]). Die Kurven auf der rechten Seite sind berechnet; die Kurven



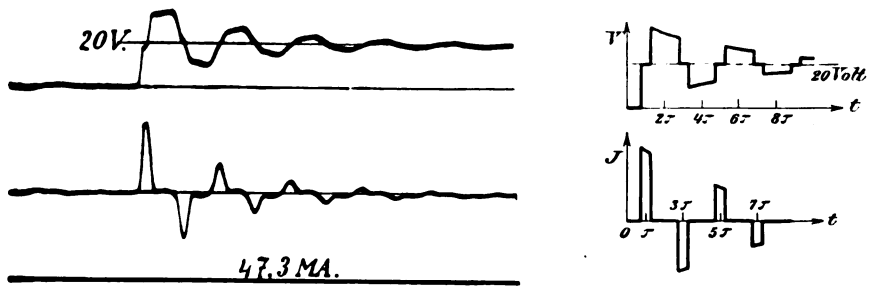
Spannung am Ende (x = l) und Strom am Anfang (x = o) der Leitung.



Spannung und Strom in der Mitte der Leitung (x = ½ l).



Spannung und Strom im Abstand ¼ l vom Anfang der Leitung.



Spannung und Strom im Abstand ¾ l vom Anfang der Leitung.

Fig. 16. Zeitlicher Verlauf der Spannung und des Stromes an verschiedenen Punkten einer am Ende isolierten Leitung beim Einschalten.

auf der linken Seite sind mittels des Oszillographen aufgenommen. Die obere Kurve bedeutet jedesmal die Spannung V, während die untere Kurve den Strom I darstellt. Die Berechnung von I mittels der Heavisideschen Formel ist hier fortgelassen, da

[1]) ETZ 1911, S. 899, 928, 947.

Digitized by Google

sie neben der Berechnung von V nichts Neues mehr bietet. Die Größe τ in den Abbildungen bedeutet die Laufzeit l/v einer Welle beim Zurücklegen der Leitungslänge.

11. Einpoliges Einschalten einer Spule mit Windungskapazität. Eine Spule ist, ähnlich der Leitung und dem Kabel, ein Leiter mit verteilter Kapazität und Induktivität. Sie unterscheidet sich jedoch von Leitungen und Kabeln dadurch, daß die einzelnen Wicklungsabteilungen auch unmittelbar aufeinander einwirken. Man kann dem Rechnung tragen, indem man die Spule durch die in Fig. 17 gezeichnete Anordnung von Kapazitäten und Induktivitäten darstellt. Elektromagnetische Wellen, die in eine solche Anordnung eindringen, werden auf ihrem Laufe verzerrt. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich die Ausbreitung einer Einschaltwelle für den Fall behandelt, daß die Spule bereits einpolig mit der Stromquelle verbunden ist, und daß dann der zweite Pol eingeschaltet wird.

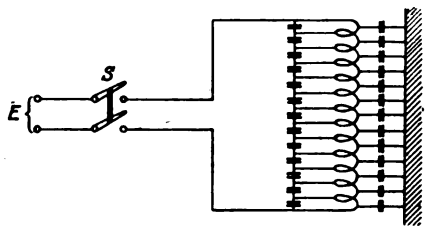


Fig. 17. Spule mit Windungskapazität.

Beim Einlegen des doppelpoligen Schalters S (Fig. 17) wird im allgemeinen eines der beiden Schaltmesser zuerst den Kontakt herstellen. Wird nun angenommen, daß die Erdkapazität der Stromquelle nicht unendlich klein im Vergleich zur Erdkapazität der Spule ist, so wird bereits bei diesem einpoligen Anschließen der Spule eine Einschaltwelle entstehen. Wir wollen die hierbei auftretende Spannungsverteilung längs des Spulendrahtes berechnen. Zur Vereinfachung machen wir die praktisch wohl meistens zutreffende Annahme, daß die Erdkapazität der Stromquelle erheblich größer ist als die Erdkapazität der Spule. Der Einschaltvorgang spielt sich dann ebenso ab, als ob die Wicklung durch eine elektromotorische Kraft E gegen Erde aufgeladen würde (Fig. 18), wobei E die halbe EMK der Stromquelle bedeutet.

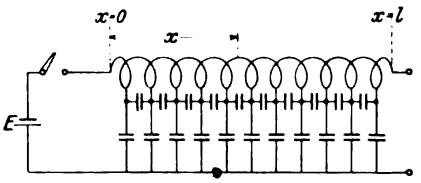


Fig. 18. Schema für das einpolige Einschalten einer Spule mit Windungskapazität.

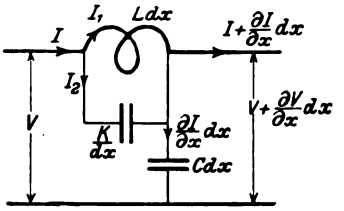


Fig. 19. Element einer Spule mit Windungskapazität.

Mit den aus der Fig. 19 ersichtlichen Bezeichnungen (es sind dieselben wie in der vorher erwähnten Arbeit) lauten die Gleichungen der Spule:

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t} \\ I_2 &= -K\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I_1}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33a)$$

Sie vereinfachen sich für erzwungene Vorgänge der Form e^{pt} folgendermaßen:

[1]) K. W. Wagner, „Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in eine Spule mit Windungskapazität", Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien 1915, S. 89, 105.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ -\frac{dI}{dx} &= CpV \\ I_2 &= -Kp\frac{dV}{dx} \\ -\frac{dV}{dx} &= LpI_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 33b)$$

Hieraus ergibt sich für die gesuchte Spannung V die Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 34)$$

worin γ^2 eine Abkürzung für den Ausdruck

$$\gamma^2 = \frac{LCp^2}{1 + LKp^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 35)$$

bedeutet. Bei der Integration von Gl. 34) sind die folgenden Grenzbedingungen zu beachten (vgl. Fig. 18):

1. für $x = 0$ soll $V = E$ sein;
2. für $x = l$ soll $J = 0$ sein. Dies tritt nach Gl. 33b ein, wenn für $x = l$ $dV/dx = 0$ ist.

Die betreffende Lösung von 34) ist:

$$V = E\frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)}{\mathfrak{Cof}\,\gamma l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 36)$$

Sie entspricht genau der Gl. 30a) des vorigen Beispiels. Wir erhalten daher wie dort als Stammfunktion den Ausdruck

$$Z = \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37a)$$

Für $p = 0$ ist nach Gl. 35) auch $\gamma = 0$, daher

$$Z(0) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37b)$$

Die Wurzeln der Stammgleichung

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma l = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37c)$$

sind wiederum die Größen

$$\left.\begin{aligned} \gamma_k &= \pm\frac{(2k-1)i\pi}{2l} = \pm i\mu_k \\ k &= 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37d)$$

Zur Berechnung der zugehörigen Eigenwerte p_k dient die Gleichung 35). Aus ihr folgt

$$p^2 = \frac{\gamma^2}{LC - LK\gamma^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37e)$$

$$p_k = \pm i\frac{v}{l}\frac{\mu_k l}{\sqrt{1 + \varkappa\mu_k^2 l^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37f)$$

Darin ist

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad \varkappa = \frac{K}{Cl^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37g)$$

Wenn man für k immer größere Zahlen einsetzt, so wächst wohl γ_k (nach Gl. 37d) unbegrenzt weiter bis ins unendliche; die Eigenwerte p_k tun dies aber nicht. Sie bleiben vielmehr nach Gl. 37f) stets unterhalb des Grenzwertes

Digitized by Google

$$p_\infty = \pm i \frac{v}{l\sqrt{\varkappa}} = \pm i \frac{I}{\sqrt{LK}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

dem sie sich mit wachsendem k mehr und mehr annähern.

Wir betrachten als Beispiel den Fall $\varkappa = \frac{1}{100}$. Er tritt ein, wenn die gesamte Windungskapazität $\frac{K}{l}$ gleich einem Hundertstel der gesamten Erdkapazität Cl ist. Die hierfür berechneten Werte von $\mu_k l$ und p_k/p_∞ für $k = 1$ bis 20 sind aus der folgenden Tafel ersichtlich. Trägt man die Werte von p_k/p_∞ über einer gleichmäßigen Teilung als senkrechte Linien auf, so erhält man das „Linienspektrum der Eigenwerte" (Fig. 20). Es liegen demnach bei unserem Problem ganz ähnliche Verhältnisse vor, wie bei dem früher betrachteten Falle; die Lage der einzelnen Linien ist jedoch eine andere, nur das Ende des Spektrums (der Wert p_∞) ist das gleiche wie vorher.

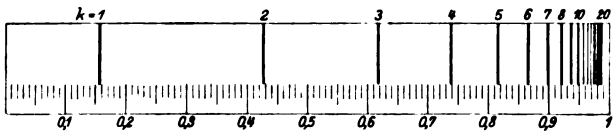


Fig. 20. Linienspektrum der Eigenfrequenzen einer einpolig angeschlossenen Spule mit Windungskapazität.

k	$\mu_k l = \frac{(2k-1)\pi}{2}$	$\frac{p_k}{p_\infty} = \frac{\mu_k l \sqrt{\varkappa}}{\sqrt{1 + \varkappa \mu_k^2 l^2}}$
1	1,5708	0,15517
2	4,7124	0,42627
3	7,8540	0,61765
4	10,9956	0,73980
5	14,1372	0,81642
6	17,2788	0,86549
7	20,4204	0,89811
8	23,5620	0,92053
9	26,7036	0,93648
10	29,8452	0,94819
11	32,9868	0,95700
12	36,1284	0,96376
13	39,2700	0,96908
14	42,4116	0,97330
15	45,5532	0,97674
16	48,6948	0,97956
17	51,8364	0,98190
18	54,9780	0,98388
19	58,1156	0,98551
20	61,2612	0,98694

Das überraschende Ergebnis, daß sich die Eigenwerte p_k im Endlichen häufen, d. h. daß es beliebig viele Wurzeln der Stammgleichung gibt, die dem Punkte p_∞ der komplexen p-Ebene beliebig nahe liegen, stellt uns vor einen Fall, der in unserer Beweisführung im Abschnitt 3 nicht vorgesehen war. Es zeigt sich jedoch, daß die Heavisidesche Formel auch hier nicht versagt; angesichts der vom mathematischen Standpunkte ziemlich bösartigen Singularität der Stammfunktion im Punkte p_∞ ist das gewiß bemerkenswert. Der Nachweis, daß die Heavisidesche Formel hier gilt, bedarf allerdings besonderer Betrachtungen, deren Veröffentlichung an anderer Stelle vorbehalten bleibt.

Aus 35), bzw. 37e) erhält man durch Differenzieren

$$\frac{d\gamma}{dp} = \frac{\gamma}{p} - \frac{\gamma^3 K}{Cp}.$$

Digitized by Google

Daher wird mit Rücksicht auf 37a), 37c), 37d) und 37g):

$$p\frac{dZ}{dp} = p\frac{dZ}{d\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dp} = \gamma l\left(1-\frac{\gamma^2 K}{C}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma l}{\mathfrak{Cof}\,\gamma(l-x)},$$

$$p\frac{dZ}{dp} = (-1)^k\,\frac{\mu l\,(1+\varkappa\mu^2 l^2)}{\cos\mu(l-x)}.$$

Dieser Wert ist in die Heavisidesche Formel einzusetzen. Eine Rechnung, die ganz analog der des vorhergehenden Beispiels durchzuführen ist, liefert die gesuchte Formel für die Spannungsverteilung:

$$V = E - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x\cos\dfrac{\mu_k v t}{\sqrt{1+\varkappa\mu_k^2 l^2}}}{(2k-1)(1+\varkappa\mu_k^2 l^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist dieselbe wie in dem früher behandelten Beispiele (Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien 1915, Gl. 22 auf S. 105); sie bedeutet aber jetzt einen anderen Vorgang, da die Werte von μ_k andere sind. Die Reihe konvergiert ganz gut; deshalb macht die Berechnung von Zahlenbeispielen keine allzu große Mühe. Wir wollen uns hier nicht damit aufhalten. Zur Verdeutlichung des Vorganges, den die Gl. 39) beschreibt, mögen die in Fig. 21a bis 21h dargestellten Oszillogramme dienen. Sie sind an „künstlichen Spulen" in der Schaltung Fig. 18 aufgenommen worden.

Bei den Oszillogrammen 21a bis 21d war das Kapazitätsverhältnis $\varkappa = \frac{1}{100}$; es gelten also die Werte der vorstehenden Zahlentafel.

Die „Spule" bestand aus 10 Abteilungen zu je 0,18 Henry, 7 Ohm; für jede Abteilung war die Windungskapazität $4\,\mu$F, die Erdkapazität ebenfalls $4\,\mu$F. Die Spannung war $E = 6$ Volt, die in dem Bild 21d eingezeichnete Eichlinie der Stromschleife des Oszillographen entspricht einem Strome $I_0 = 0{,}079$ Ampere. In den Oszillogrammen 21a bis d bedeutet die untere Kurve den in die Spule eintretenden Ladestrom; die oberen Kurven sind die Spannungskurven in den Punkten $x = 0{,}2\,l$, $0{,}3\,l$, $0{,}5\,l$ und $x = l$.

Die Oszillogramme 21e bis 21h beziehen sich auf eine Spule mit dem Kapazitätsverhältnis $\varkappa = \frac{8}{100}$. Es war dieselbe Spule wie vorher; lediglich die Erdkapazität jeder Abteilung war auf $0{,}5\,\mu$F vermindert. Die Oszillogramme enthalten nur die Spannungskurven.

Wir bemerken noch, daß mit $\varkappa = 0$ die Gl. 39) in die für eine Leitung geltende Gl. 32) übergeht, wie es sein muß (vgl. Fig. 16).

12. Das Einschalten einer Spule mit massivem metallenem Kern. In diesem letzten Beispiel wollen wir das Entstehen eines räumlich ausgedehnten elektromagnetischen Feldes unmittelbar an Hand der Feldgleichungen verfolgen.

Ein langer Metallzylinder vom Radius r_1 (Fig. 22) sei mit N Windungen gleichmäßig dicht bewickelt. Die Wicklung werde im Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich mit einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft E verbunden. Es bildet sich dann in der Wicklung ein Strom I aus. Gleichzeitig entsteht in dem Metallzylinder ein axial gerichtetes magnetisches Feld $\mathfrak{H}$ und eine Wirbelströmung j, deren Linien konzentrische Kreise um die Zylinderachse sind. Wir fragen nach dem zeitlichen Verlauf all dieser Größen und nach der räumlichen Verteilung des magnetischen Feldes und der Wirbelströmung.

Ist ϱ der spezifische Widerstand des Kernes und μ seine Permeabilität, so lauten die Feldgleichungen:

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{j}$$

$$\varrho\,\text{rot}\,\mathfrak{j} = -\mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$$

Digitized by Google

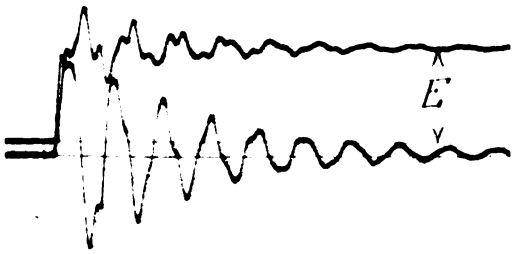


Fig. 21a.

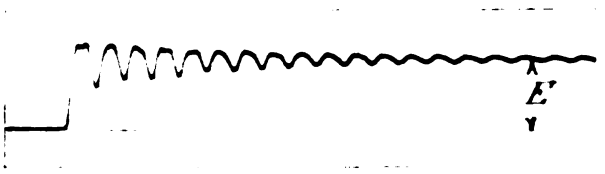


Fig. 21e.

Spannungsverlauf im Abstande 0,2 l von der Einschaltstelle.

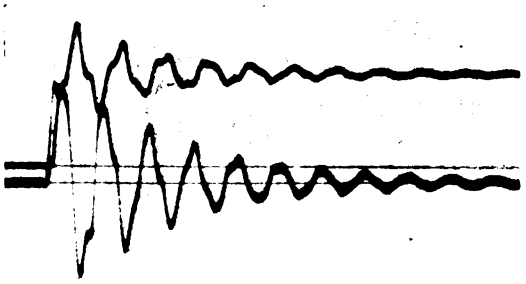


Fig. 21b.

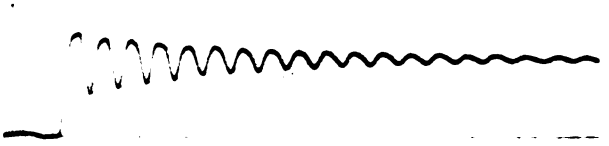


Fig. 21f.

Spannungsverlauf im Abstande 0,3 l von der Einschaltstelle.

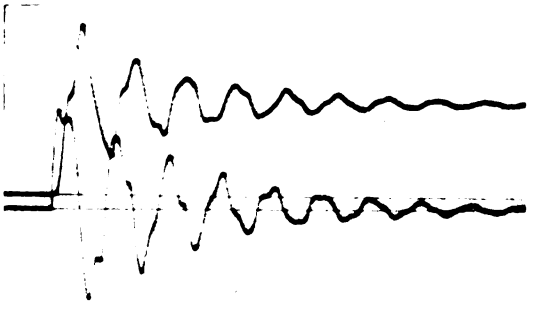


Fig. 21c.

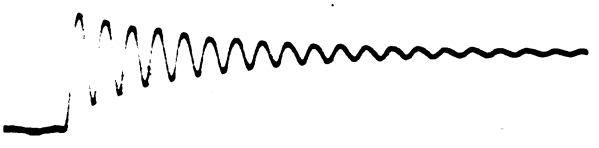


Fig. 21g.

Spannungsverlauf in der Mitte der Spule.

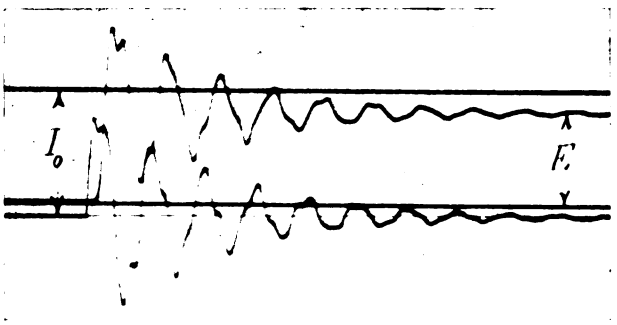


Fig. 21d.

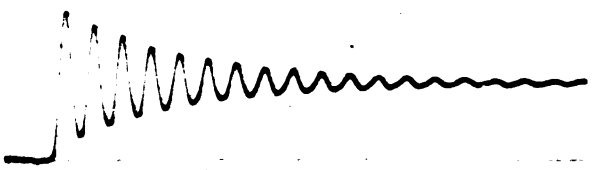


Fig. 21h.

Spannungsverlauf am isolierten Ende der Spule.

Fig. 21a bis 21h. Einpoliges Einschalten einer Spule mit Windungskapazität.
(Die unteren Kurven in Fig. 21a bis 21d bedeuten den in Spule fließenden Ladestrom.)

Digitized by Google

In dem vorliegenden Falle eines zylindrischen Feldes vereinfachen sich diese Gleichungen zu

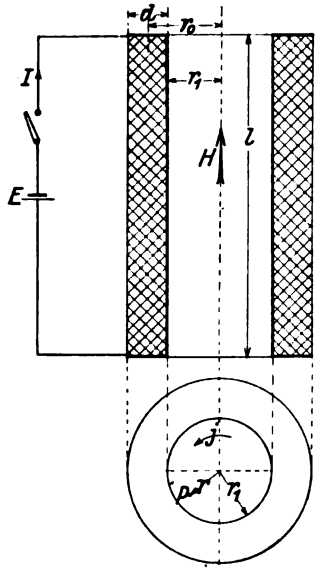


Fig. 22.

$$4\pi j = -\frac{\partial H}{\partial r}$$

$$\frac{\varrho}{r}\frac{\partial r j}{\partial r} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}$$

r bedeutet darin den Abstand eines Punktes P von der Zylinderachse; H und j sind die Beträge von $\mathfrak{H}$ und j im Punkte P. Die als positiv angenommenen Richtungen von $\mathfrak{H}$ und j sind in der Fig. 22 durch Pfeile bezeichnet; sie verhalten sich zueinander wie der Fortschreitungssinn und der Drehsinn einer rechtsgängigen Schraube.

Wir betrachten, wie stets, zunächst eine erzwungene Bewegung nach dem Zeitgesetz e^{pt}. Für diese vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen weiter:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi j &= -\frac{dH}{dr} \\ \frac{\varrho}{r}\frac{dr j}{dr} &= -\mu p H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 40)$$

Durch Eliminieren von H leitet man daraus die folgende Differentialgleichung für j ab:

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dj}{dr} - j\left(a + \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

$$a = \frac{4\pi\mu p}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ 41)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung[1]) sind die Besselschen Funktionen erster Ordnung von $ir\sqrt{a}$. Im vorliegenden Falle kommt nur die Funktion „erster Art" $\mathfrak{J}_1(ir\sqrt{a})$ in Betracht; die Funktionen zweiter Art scheiden aus, da sie in der Zylinderachse ($r = 0$) unendlich groß werden. Wir können daher

$$j = A\,\mathfrak{J}_1(ir\sqrt{a}) \quad \ldots\ldots\ 42)$$

ansetzen, worin A einen konstanten Faktor bedeutet. Der Ausdruck 42) führt in Verbindung mit der ersten Gl. 40) zu dem folgenden Ansatz für die magnetische Feldstärke:

$$H = \frac{4\pi}{i\sqrt{a}} A\,\mathfrak{J}_0(ir\sqrt{a}) \quad \ldots\ldots\ 43)$$

$\mathfrak{J}_0$ soll die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung Null bezeichnen, deren negativer Differentialquotiont bekanntlich die Besselsche Funktion erster Ordnung ist.

Zur Bestimmung des konstanten Faktors A sind die Grenzbedingungen heranzuziehen. Zwei Bedingungen kommen hier in Frage.

1. Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke auf der Oberfläche des Kerns, genommen längs einer Parallelen zur Achse ist gleich der 4πfachen Durchflutung des Wicklungsquerschnittes:

$$lH(r_1) = 4\pi NI \quad \ldots\ldots\ 44a)$$

[1]) Jahnke-Emde, „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven", Leipzig 1909, S. 166.

Digitized by Google

2. Der Ohmsche Spannungsabfall RI im Wicklungsdrahte ist gleich der elektromotorischen Kraft E, vermehrt um die elektrische Umlaufspannung V.

$$RI = E + V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44b)$$

Nun ist die elektrische Feldstärke an der Oberfläche des Kerns gleich $\varrho j(r_1)$; die Umlaufspannung für N Windungen ist daher

$$V = 2\pi r_1 N \varrho j(r_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44c)$$

Setzt man in Gl. 44b) für I den Wert aus 44a), für V den Wert aus 44c) ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung von A. Sie liefert den Wert

$$A = \frac{\frac{E}{R}}{\frac{lr_1}{N}\left[\frac{\Im_0(y)}{y} - C\Im_1(y)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44d)$$

Darin ist zur Abkürzung

$$y = ir_1\sqrt{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

und

$$C = \frac{2\pi N^2 \varrho}{Rl}$$

gesetzt. Es wird sich zeigen, daß der Verlauf der Dinge wesentlich von der Größe der Konstante C abhängt. Es verlohnt sich daher, auf die physikalische Bedeutung von C näher einzugehen. Zu dem Zwecke berechnen wir den Widerstand R des Wicklungsdrahtes aus seinem spezifischen Widerstande ϱ_1, der Drahtlänge $2\pi r_0 N$ und dem Drahtquerschnitt $\frac{ld}{N}$ (vgl. Fig. 22):

$$R = \frac{2\pi r_0 N^2 \varrho_1}{ld}.$$

Dieser Wert ergibt, in den Ausdruck für C eingesetzt, die einfache Beziehung

$$C = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{d}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Man sieht, die Konstante C hängt nur vom Verhältnis der spezifischen Widerstände des Kern- und Drahtmaterials sowie von dem Dimensionsverhältnis d/r_0 ab. Hierzu ist noch folgendes zu bemerken:

a) Liegt zwischen der Batterie und der Wicklung noch ein Vorschaltwiderstand, so kann man sich diesen Widerstand in die Wicklung hineingelegt denken und mit einem entsprechend vergrößerten (ideellen) Werte von ϱ_1 rechnen.

b) Wegen des von der Drahtisolation beanspruchten Raumes bedeutet d streng genommen nicht die tatsächliche Wicklungshöhe, sondern eine aus dem Drahtquerschnitt q, der Wicklungslänge und der Windungszahl zu ermittelnde ideelle Wicklungshöhe:

$$d = \frac{Nq}{l}.$$

Die Gl. 44d) und 42) ergeben für die erzwungene Wirbelströmung den Ausdruck:

$$j = \frac{E}{R} \cdot \frac{N}{lr_1} \cdot \frac{\Im_1\left(\frac{r}{r_1}y\right)}{\frac{\Im_0(y)}{y} - C\Im_1(y)}.$$

Digitized by Google

Als Stammfunktion unseres Problems erhalten wir hieraus

$$Z = R\frac{lr_1}{N}\frac{1}{\Im_1\left(\frac{r}{r_1}y\right)}\left[\frac{\Im_0(y)}{y} - C\Im_1(y)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Da die Funktion $\Im_1$ für keinen endlichen Wert ihres Argumentes unendlich groß wird, entsprechen die Eigenwerte den Nullstellen des letzten Faktors.

Zur Lösung der Stammgleichung

$$\frac{r'}{y}\Im_0(y) - C\Im_1(y)$$

schreiben wir sie in der Form

$$\frac{\Im_0(y)}{\Im_1(y)} = Cy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48a)$$

und benutzen ein graphisches Verfahren. Die Funktionen $\Im_0$ und $\Im_1$ verlaufen für die hier in Frage kommenden reellen Werte von y ähnlich wie Cosinus- und Sinuslinien

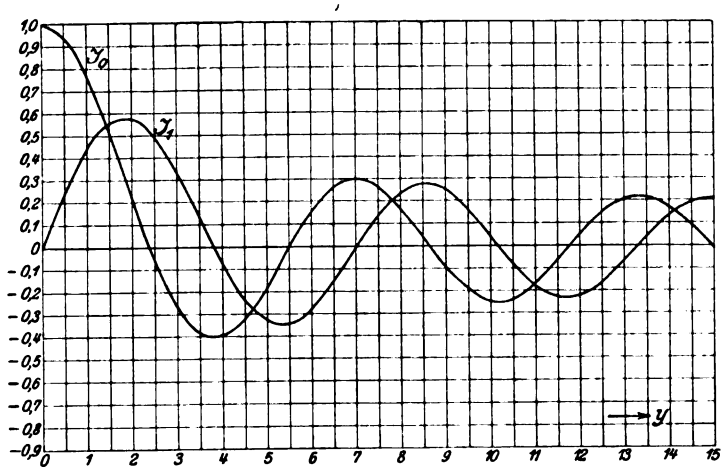


Fig. 23. Besselsche Funktionen erster Art von der Ordnung Null und Eins für reelles Argument.

mit abnehmender Amplitude [Fig. 23[1])]. Ihr Quotient, d. i. die linke Seite der Gl. 48a), besitzt daher einen ähnlichen Verlauf wie die Cotangensfunktion. Er besteht aus lauter einzelnen Zweigen, die an den Nullstellen von $\Im_1$ asymptotisch ins unendliche verlaufen (Fig. 24).

Die rechte Seite der Gl. 48a) ist eine durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehende Gerade. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den einzelnen Ästen der Funktion $\Im_0/\Im_1$ bestimmen die Wurzeln

$$\pm y_1, \quad \pm y_2, \quad \pm y_3, \ldots\ldots \quad \pm y_k, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48b)$$

der Stammgleichung. Es gibt deren unendlich viele; die größeren Werte liegen schließlich beliebig nahe bei den Nullstellen der Funktion $\Im_1(y)$, die sich ihrerseits den Werten

$$y_k = \pm\frac{(4k-3)\pi}{4}$$

mehr und mehr annähern.

Die in Fig. 24 dargestellte Konstruktion wird unbequem, wenn C groß ist, weil

[1]) Die Zahlenwerte sind dem Jahnke-Emdeschen Tafelwerk entnommen; S. 111—122.

Digitized by Google

dann die Gerade Cy zu steil verläuft. In diesem Fall ist es praktisch, von der zur Gl. 48a) reziproken Gleichung

$$\frac{\mathfrak{J}_1(y)}{\mathfrak{J}_0(y)} = \frac{1}{Cy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 48c)$$

auszugehen (Fig. 25). Der Quotient $\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_0$ verläuft ähnlich der Tangensfunktion; die rechte Seite von 48c) bedeutet eine gleichseitige Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten. Die Schnittpunkte beider Funktionen ergeben, wie früher, die Wurzeln der Stammgleichung.

Falls man eine größere Genauigkeit wünscht, kann man die zeichnerisch ermittelten Wurzeln als Näherungswerte benutzen und mittels der Fehlerregel genauere Werte ausrechnen.

Das beschriebene Verfahren liefert nur die reellen Wurzeln der Stammgleichung. Etwa vorhandene imaginäre oder komplexe Wurzeln würden dabei nicht entdeckt werden. Da die Heavisidesche Reihenentwicklung selbstverständlich nur richtig ist, wenn sie alle Glieder enthält, muß zunächst über das Vorhandensein imaginärer oder komplexer Wurzeln Klarheit geschaffen werden. Bezüglich der imaginären Wurzeln läßt sich leicht zeigen, daß keine solchen Wurzeln vorhanden sind Man setze in die Gl. 48a) für y die Größe $i\eta$ ein. Die Gleichung lautet dann:

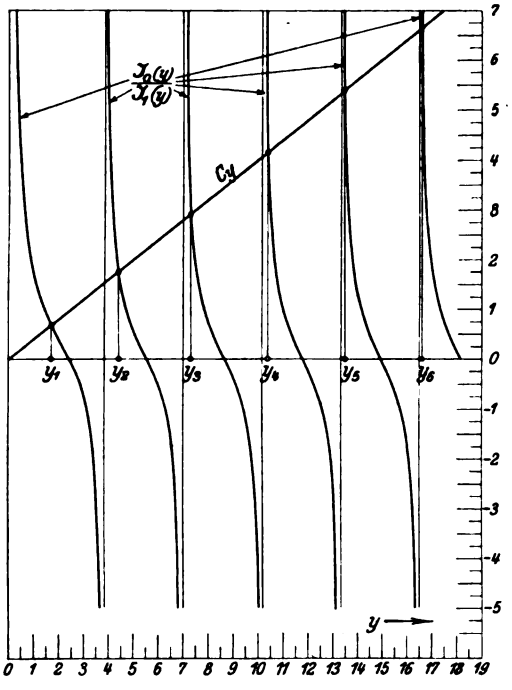


Fig. 24. Konstruktion zur Auflösung der transzendenten Gleichung 48a).

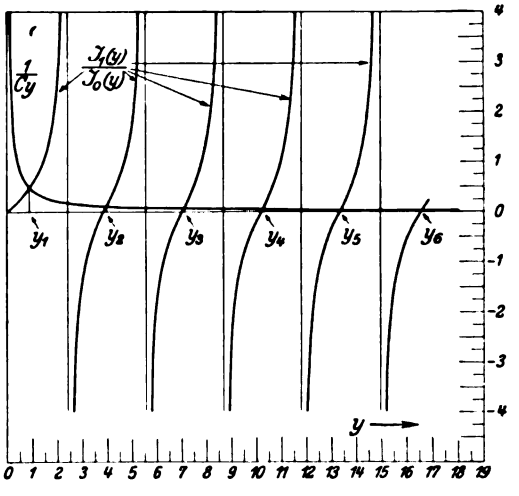


Fig. 25. Konstruktion zur Auflösung der transzendenten Gleichung 48c).

$$\frac{\mathfrak{J}_0(i\eta)}{i\mathfrak{J}_1(i\eta)} = C\eta .$$

Sie ist für keinen reellen Wert von η erfüllt; denn für alle positiven η ist die linke Seite eine negative reelle Größe, für alle negativen η eine positive reelle Größe.[1])

Der Beweis, daß auch keine komplexen Wurzeln vorhanden sind, ist an Hand der Differentialgleichung und der zugehörigen Grenzbedingungen in ähnlicher Weise zu führen, wie es bei Riemann-Weber, „Die partiellen Differentialgleichungen der

[1]) Vgl. die Reihenentwicklungen auf S. 92 der Funktionentafeln von Jahnke-Emde, Fig. 46 und 47 auf S. 158 und Tafel XXIV auf S. 159.

Digitized by Google

mathematischen Physik", Bd. II, S. 137—138 (4. Aufl., 1901) für ein ähnliches Problem geschehen ist. Wir beschränken uns der Kürze wegen auf diese Andeutung.

Aus den Wurzeln y_k berechnet man mittels der Gl. 45) und 41) die Eigenwerte p_k:

$$p_k = -\frac{y_k^2 \cdot \varrho}{4\pi\mu r_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 49)$$

In der Heavisideschen Formel braucht man die Größen $Z(0)$ und $p\frac{dZ}{dp}$. Die erste ergibt sich sofort aus der Gl. 47) zu

$$Z(0) = \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 50a)$$

Ferner erhält man unter Benutzung von Gl. 49)

$$p\frac{dZ}{dp} = p\frac{dZ}{dy}\frac{dy}{dp} = \frac{1}{2} y \frac{dZ}{dy}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist mittels der Differentialformeln für die Besselschen Funktionen[1]) auszuwerten. Es ergibt sich

$$\left(p\frac{dZ}{dp}\right)_{p_k} = -\frac{l r_1 R}{2N} \frac{1}{\Im_1\left(\frac{r}{r_1} y_k\right)} [\Im_1(y_k) + y_k C \Im_0(y_k)] \quad \ldots\ldots 50b)$$

Nunmehr können wir für die Wirbelströmung die Heavisidesche Formel anschreiben. Sie lautet:

$$j = -\frac{E}{R} \cdot \frac{2N}{l r_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im_1\left(\frac{r}{r_1} y_k\right) e^{p_k t}}{\Im_1(y_k) + C y_k \Im_0(y_k)} \quad \ldots\ldots\ldots 51a)$$

Dasselbe Verfahren liefert den folgenden Ausdruck für die räumliche Verteilung und für die zeitliche Veränderung des magnetischen Feldes:

$$H = H_0 - 2H_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im_0\left(\frac{r}{r_1} y_k\right) e^{p_k t}}{y_k [\Im_1(y_k) + C y_k \Im_0(y_k)]} \quad \ldots\ldots\ldots 51b)$$

Darin bedeutet

$$H_0 = \frac{4\pi N}{l} \cdot \frac{E}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 51c)$$

die magnetische Feldstärke im Beharrungszustande.

Eine gewisse Prüfung der Rechnungen ermöglicht z. B. die erste Gl. 40); sie muß durch die Ausdrücke 51a) und 51b) identisch erfüllt sein, was in der Tat der Fall ist. Wir schreiben noch den Ausdruck für den zeitlichen Verlauf des Stromes I im Wicklungsdrahte an. Man erhält ihn entweder aus 44a) und 51b) oder aus 44b), 44c) und 51a). Dabei kann man noch mittels der Gl. 48a) die Besselschen Funktionen eliminieren und erhält dann:

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - 2C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{p_k t}}{1 + C^2 y_k^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots 51d)$$

Damit sind sämtliche Fragen, die wir uns gestellt haben, gelöst. Zur Erläuterung der Ergebnisse betrachten wir einige besondere Fälle.

a) Ein Eisenzylinder von 20 cm Durchmesser sei mit einer Kupferwicklung von 5 cm Höhe versehen. Es ist dann

$$r_1 = 10; \qquad r_0 = 12{,}5; \qquad d = 5;$$

$$\varrho = 10000; \quad \varrho_1 = 1750 \text{ absolute elektromagnetische Einheiten.}$$

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 165.

Digitized by Google

Für die magnetische Permeabilität des Eisens wollen wir den Wert $\mu = 500$ annehmen. Es ist nach Gl. 46)

$$C = \frac{5}{12{,}5} \cdot \frac{10000}{1750} = 2{,}284.$$

Zur Bestimmung der Wurzeln y_k empfiehlt sich im vorliegenden Beispiel die auf der Gl. 48c) beruhende Konstruktion nach Fig. 25. Für die in diesem Bilde gezeichnete Hyperbel ist die Konstante $C = 2{,}284$ angenommen. Es ergeben sich die in der folgenden Tafel enthaltenen Werte.

Zahlenwerte für $C = 2{,}284$.

k	y_k	p_k	$\frac{2C}{1 + C^2 y_k^2}$
1	0,887	— 0,0125	0,895
2	3,94	— 0,247	0,0557
3	7,08	— 0,797	0,01735
4	10,22	— 1,66	0,00838
5	13,36	— 2,84	0,00491

Die erste Spalte enthält die Ordnungszahlen, die zweite die zugehörigen Wurzeln der Stammgleichung, die dritte Spalte enthält die Eigenwerte, die vierte die Amplituden der entsprechenden Exponentialglieder in der Reihenentwicklung des Stromes in der Wicklung (Gl. 51d). Der hiernach berechnete Verlauf dieses Stromes ist aus der Fig. 26 ersichtlich (Kurve $C = 2{,}284$, $\varrho_1 = 1750$).

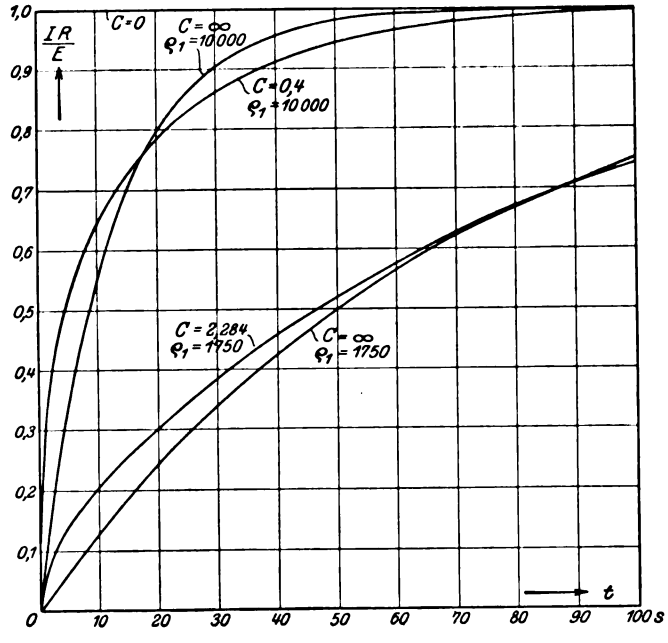


Fig. 26. Stromverlauf beim Einschalten von Magnetwicklungen mit massiven und unterteilten Polkernen.

b) Des Vergleichs wegen berechnen wir den Anstieg des Stromes auch für den Fall, daß die Entstehung von Wirbelströmen durch eine feine Unterteilung des Spulenkerns verhindert wird. In den Formeln ist dies dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß man $\varrho = \infty$ setzt. Dann wird auch $C = \infty$. Für diesen Grenzfall werden in der

Digitized by Google

Reihenentwicklung in Gl. 51d) alle Glieder mit Ausnahme des ersten unendlich klein. Die Gl. 51d) lautet dann

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{C y_1^2} e^{p_1 t}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 52a)$$

y_1 wird unendlich klein; daher wird [1])

$$\mathfrak{J}_0(y_1) = 1; \qquad \mathfrak{J}_1(y_1) = \tfrac{1}{2} y_1.$$

Die Gl. 48a) liefert hiermit den Grenzwert

$$\lim_{C=\infty} C y_1^2 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 52b)$$

Ferner ist [Gl. 49) und 52b)]:

$$p_1 = -\frac{y_1^2 \varrho}{4\pi r_1^2 \mu} = -\frac{\varrho}{4\pi\mu r_1^2} \cdot \frac{2}{C}$$

$$p_1 = -\frac{\varrho}{4\pi\mu r_1^2} \cdot \frac{2Rl}{2\pi N^2 \varrho}$$

$$p_1 = -\frac{R}{\frac{4\pi^2 \mu N^2 r_1^2}{l}} = -\frac{R}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 52c)$$

$L = 4\pi^2 \mu N^2 r_1^2 / l$ ist nichts anderes als die Induktivität der Wicklung. Somit ergibt sich aus den Gl. 52a), b), c) die bekannte Beziehung

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 52d)$$

die wir bereits im Abschnitt 5 als Gl. 14e) für den Stromanstieg in einer Spule mit wirbelstromfreiem Kern erhalten haben. Im vorliegenden Falle besitzt p_1 den Zahlenwert

$$p_1 = -\frac{R}{L} = -0{,}01392\ s^{-1}.$$

Die zugehörige Kurve für I [Gl. 52d)] ist in Fig. 26 eingetragen und mit $C = \infty$, $\varrho_1 = 1750$ bezeichnet. Der Vergleich mit der Kurve für $C = 2{,}284$ und $\varrho_1 = 1750$ zeigt, daß die Wirbelströme den Anstieg des Stromes zuerst beschleunigen, später aber verzögern. Sie wirken also ebenso wie eine geschlossene Sekundärwicklung, von der wir im Abschnitt 7 ein ähnliches Verhalten kennen gelernt haben (vgl. Fig. 8).

c) Noch deutlicher tritt diese Wirkung hervor, wenn wir die Ausbildung der Wirbelströme gegenüber dem Strome I begünstigen. Wir können dies dadurch zustandebringen, daß wir den spezifischen Widerstand des Wicklungsdrahtes vergrößern oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Wicklung induktionsfreien Widerstand vorschalten. Wir wollen dies in solchem Maße tun, daß der ideelle spezifische Widerstand des Wicklungsdrahtes auf den Wert $\varrho_1 = 10000$ steigt. Es werde zunächst der Fall eines massiven Eisenkernes betrachtet. Dann hat ϱ ebenfalls den Wert 10000. Hiermit wird $C = 0{,}4$, und es gelten die Zahlen der folgenden Tafel.

Zahlenwerte für $C = 0{,}4$.

k	y_k	p_k	$\frac{2C}{1 + C^2 y_k^2}$
1	1,705	— 0,0463	0,546
2	4,38	— 0,305	0,1965
3	7,35	— 0,858	0,0829
4	10,41	— 1,726	0,0436
5	13,51	— 2,91	0,0264
6	16,6	— 4,39	0,0177

[1]) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 90.

Digitized by Google

Die Wurzeln y_k sind aus der in Fig. 24 dargestellten Konstruktion ermittelt; die eingezeichnete Gerade entspricht dem Werte $C = 0{,}4$. Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt die Gl. 51 d) den in Fig. 26 dargestellten Stromverlauf (Kurve $C = 0{,}4$; $\varrho_1 = 10\,000$).

d) Für den Fall eines wirbelstromfreien (fein unterteilten) Eisenkerns mit $\varrho = \infty$ wird, wie im Falle b) $C = \infty$. Die Gl. 52 c) liefert

$$-\frac{R}{L} = -0{,}07962\ s^{-1}.$$

Der unter Benutzung dieses Wertes nach Gl. 52 d) berechnete Stromverlauf ist ebenfalls in Fig. 26 eingetragen (Kurve $C = \infty$, $\varrho_1 = 10\,000$). Die behauptete Wirkung der Wirbelströme ist aus den Kurven deutlich zu ersehen.

e) Von Interesse ist noch die Betrachtung des folgenden Grenzfalles, der allerdings in Wirklichkeit nur annäherungsweise hergestellt werden kann. Wenn wir die elektromotorische Kraft E und gleichzeitig auch den Vorschaltwiderstand immer weiter steigern, und zwar so, daß der Strom im Beharrungszustande

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

konstant bleibt, so nähern wir uns immer mehr dem Grenzfall eines in der Spule plötzlich entstehenden Stromes I. Dies ergeben auch unsere Gleichungen. Mit $R = \infty$ wird $\varrho_1 = \infty$ und somit nach Gl. 46) $C = 0$. Die ganze Reihenentwicklung in Gl. 51 d) verschwindet; es bleibt nur das erste Glied auf der rechten Seite stehen, so daß für alle Zeiten von $t = 0$ bis ∞ der Strom $I = I_0$ ist.

Die Wurzeln y_k bleiben alle endlich; es sind nach Gl. 48 a) die Nullstellen der Besselschen Funktion $\mathfrak{J}_0$. Die Formeln 51 a) und 51 b), die die Verteilung der Wirbelströmung und des magnetischen Feldes [1]) bestimmen, vereinfachen sich wie folgt:

$$j = -I_0 \frac{2N}{l r_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{J}_1\left(\frac{r}{r_1} y_k\right) e^{p_k t}}{\mathfrak{J}_1(y_k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 53\,a)$$

$$H = H_0 - 2 H_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{J}_0\left(\frac{r}{r_1} y_k\right) e^{p_k t}}{y_k \mathfrak{J}_1(y_k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 53\,b)$$

Es bietet keine Schwierigkeit, mittels der Formeln 51 a) und 51 b), bzw. 53 a) und 53 b) die Verteilung der Wirbelströmung und des magnetischen Feldes für beliebig angenommene Verhältnisse und Zeitpunkte zahlenmäßig auszurechnen. Hierbei leisten die mehrfach erwähnten „Funktionentafeln" von Jahnke-Emde gute Dienste. Sie enthalten auf S. 111 bis 122 die Besselschen Funktionen $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{J}_1$ für die reellen Argumente zwischen 0,00 und 15.50. Die Wurzeln y_k von $\mathfrak{J}_0$, sowie die zugehörigen Werte von $\mathfrak{J}_1(y_k)$, die man in den Gl. 53 a) und 53 b) braucht, können der Tafel IV auf S. 122 des genannten Buches unmittelbar entnommen werden.

13. Zusammenfassung. Oliver Heaviside hat in seinem Werke „Electromagnetic Theory" eine merkwürdige Formel angegeben, die auf mechanische, elektromagnetische und andere Systeme anwendbar ist. Sie liefert die Bewegungsgleichung für irgendeinen Punkt des Systems, bzw. das Zeitgesetz für irgendeine veränderliche Größe in dem System, wenn dieses durch eine plötzlich einsetzende, dann konstante Kraft erschüttert wird. Die große Bedeutung einer solchen Formel für die Berechnung von

[1]) Die Formel 53 b) findet sich bereits in dem Buche „Auszüge aus James Clerk Maxwells Elektrizität und Magnetismus" von F. Emde (Braunschweig 1915) auf S. 163. Die Fig. 9 auf S. 164 zeigt den zeitlichen Verlauf von H in der Zylinderachse ($r = 0$) und an der Stelle $r = \frac{1}{2} r_1$.

Digitized by Google

Schaltvorgängen in elektrischen Stromkreisen liegt auf der Hand. Leider gibt Heaviside die Formel ohne Beweis; darunter leidet naturgemäß ihre Anwendbarkeit, weil man keine Sicherheit hat, wann die Formel gilt und wann sie versagt. Diese Lücke schließt der erste Teil dieser Arbeit, in welchem die Formel hergeleitet wird. Dies gelingt durch eine Verbindung des Fourierschen Integrals mit Sätzen aus der Funktionentheorie. Es zeigt sich hierbei, daß die Gültigkeit der Heavisideschen Formel an gewisse Voraussetzungen geknüpft ist, und daß sie in bestimmten Fällen einer Erweiterung bedarf.

Der zweite Teil der Arbeit enthält Beispiele für die Anwendung der Formel von Heaviside. Es werden Schaltvorgänge in folgenden Anordnungen behandelt: Drosselspule, Kondensator, Schwingungskreis, magnetisch gekoppelte Stromkreise, künstliches Kabel, Freileitung, Spule mit Windungskapazität und Spule mit massivem Metallkern. Die Beispiele beginnen mit den einfachsten Fällen und dringen allmählich zu verwickelten Problemen vor. Sie sind so ausgewählt, daß die verschiedenen Besonderheiten, die bei der Anwendung der Heavisideschen Formel auftreten, zur Sprache kommen. Für die Mehrzahl der betrachteten Fälle ist die Lösung bereits auf anderen Wegen gefunden worden; einige der behandelten Probleme sind aber meines Wissens neu. In allen Fällen ergibt sich durch die Anwendung der Heavisideschen Formel eine beträchtliche Ersparnis an rechnerischem Aufwande im Vergleich zu den üblichen Methoden.

Über die Vorgänge in Ein- und Mehrphasen-Synchronmaschinen bei der Unterbrechung des Kurzschlusses.

Von

J. Biermanns.

1. Allgemeines. Die Vorgänge beim plötzlichen Kurzschluß elektrischer Maschinen sind gekennzeichnet durch das Freiwerden der Energie des während des vorangegangenen Belastungszustandes mit der Primär- und Sekundärwicklung verkettet gewesenen magnetischen Feldes. Im stationären Kurzschlusse ist nämlich nur mehr ein gemeinsames Feld vorhanden, das zur Deckung der Ohmschen und induktiven Spannungsabfälle beider Wicklungen dient, die bei normalen Maschinen nur wenige Prozent der Leerlaufspannung betragen. Fast das gesamte, ursprünglich in der Maschine vorhanden gewesene Feld wird also im Verlaufe des „plötzlich" eingeschalteten Kurzschlusses vernichtet. Umgekehrt wird somit bei der Unterbrechung des Kurzschlusses die Maschine zunächst mit einem stark geschwächten Felde arbeiten, das erst wieder durch Energiezufuhr von außen auf die ursprüngliche Höhe gebracht werden muß. Es wird nützlich sein, daß wir unsere Untersuchungen zunächst mit der Betrachtung der Verhältnisse während des Kurzschlusses beginnen.

2. Die kurzgeschlossene Einphasen-Synchronmaschine.[1]) Bekanntlich erzeugt bei der Einphasen-Synchronmaschine der dem Stator entnommene Strom ein Wechselfeld mit der Winkelgeschwindigkeit des Induktors, das, indem es von der Erregerwicklung geschnitten wird, in dieser einen sich dem Gleichstrom überlagernden Wechselstrom von der doppelten Frequenz des Statorstromes bedingt. Dieser übergelagerte Wechselstrom induziert natürlich seinerseits einen der Bahn des Haupterregerfeldes folgenden Kraftfluß von ebenfalls zweifacher Frequenz, der im Raume und damit relativ zum

[1]) Siehe: J. Biermanns, Der plötzliche einphasige Kurzschluß der Drehstrom-Synchronmaschine. Archiv f. Elektrotechnik, III. Band, S. 354.

Digitized by Google

Stator mit der Winkelgeschwindigkeit des Induktors rotiert, diesen also mit einer Geschwindigkeit schneidet, die der dreifachen Winkelgeschwindigkeit des Induktors entspricht; die Fig. 1, welche Erreger- und Statorstrom einer kurzgeschlossenen Einphasen-Maschine zeigt, läßt den dem Erregerstrom übergelagerten Wechselstrome zweifacher Frequenz, sowie die im Kurzschlußstrom enthaltene dritte Harmonische sehr deutlich erkennen. Die übergelagerten Schwingungen werden sich um so stärker ausprägen, je kleiner Ohmscher Widerstand und Streuung einer Maschine sind. Abgesehen vom Ohmschen Widerstand nähert sich die Stärke des Statorfeldes mit abnehmender Streuung der des vom Induktor erzeugten gemeinsamen Hauptfeldes, bei streuungslosem Generator werden beide Felder gleich. Hingegen kann das vom Statorfeld induzierte Wechselfeld doppelter Frequenz bei streuungs- und widerstandsloser Maschine ohne Sättigungserscheinungen, da jede Gegen-EMK fehlt, unendlich groß werden. Die Erscheinungen des plötzlichen Kurzschlusses werden dadurch charakterisiert, daß der Generator mit dem vollen, seiner EMK entsprechenden Erregerfelde in den Kurzschluß eintritt. Außerdem muß der Generator, um die jederzeit bestehende Gleichgewichtsbedingung zwischen Induktor- und Statorfeld (äußere EMK = 0) zu erfüllen, gewissen Anfangsbedingungen genügen. Je nach dem Zeitpunkte, in welchem der Kurzschluß eingeleitet wird, lagert sich dem Statorfelde ein Gleichfeld von solcher Größe über, daß ihre Summe den Momentanwert des gerade mit der Statorwicklung verketteten Er-

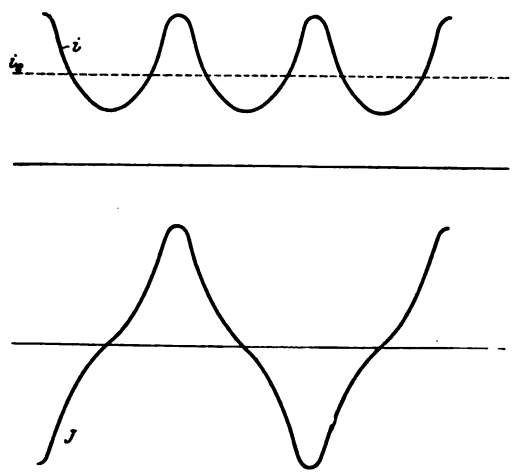


Fig. 1.

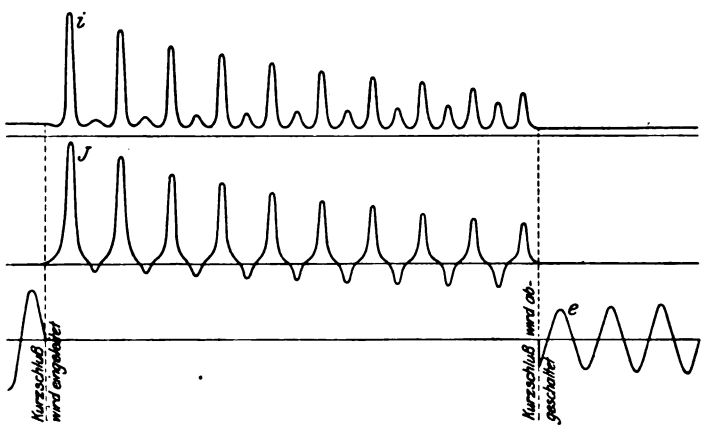


Fig. 2.

regerfeldes ergibt. Dieses im Raume stillstehende Gleichfeld erzeugt in der Erregerwicklung einen Wechselstrom mit der Frequenz des Statorstromes, so daß sich also dem Erregerfelde zwei Wechselfelder, sowohl mit der normalen, als auch mit der doppelten Frequenz überlagern, die im günstigsten Falle sämtlich annähernd gleiche Höhe erreichen. Da während des Kurzschlusses hauptsächlich nur Streufelder vorhanden sind, bedingen diese verschiedenen Felder in beiden Wicklungen gewaltige Überströme, die indes infolge der Verluste mit wachsender Zeit auf den Betrag des stationären Kurzschlußstromes herabsinken. Fig. 2 läßt die eben abgeleiteten Erscheinungen sehr schön

Digitized by Google

erkennen, besonders die im Erregerstrome durch das Wechselfeld normaler Frequenz hervorgerufenen Schwebungen sind deutlich zu sehen.

3. Die allgemeinen Gleichungen. Wir werden im folgenden einen Einphasen-Generator mit nicht ausgeprägten Polen betrachten, Stator und Induktor sollen absolut gleichartige, zweipolige Wicklungen besitzen, wie dies die Fig. 3 zeigt. Auch der Induktor bestehe aus lammelliertem Eisenblech, so daß das übergelagerte Wechselfeld sich ungehindert ausbilden kann. J bedeute den jeweiligen Momentanwert des in der Statorwicklung fließenden Kurzschlußstromes, i den jeweiligen Momentanwert des Stromes in der Erregerwicklung, ω die elektrische Winkelgeschwindigkeit des Induktors, t die Zeit. Ferner bezeichne L den Selbstinduktionskoeffizienten der Stator- bzw. Erregerwicklung, M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Erreger- und Statorwicklung bei der in Fig. 3 gezeichneten, dem Zeitpunkte $t = o$ entsprechenden gegenseitigen Stellung vom Stator und Induktor, w den Ohmschen Widerstand dieser Wicklungen. L, M und w seien für Erreger- und Statorwicklung gleich, dieselben besitzen also gleiche Windungszahl und seien vollkommen symmetrisch zueinander angeordnet; endlich seien L und M konstante Größen, d. h. wir sehen von Sättigungserscheinungen ab, desgleichen vernachlässigen wir die Eisenverluste.

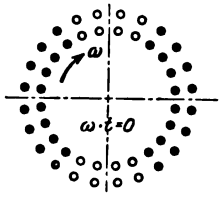


Fig. 3.

Machen wir nun die Annahme, daß Erregerfeld und Statorfeld räumlich rein sinusförmig verlaufen, so finden wir bei umlaufendem Induktor für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Stator- und Erregerwicklung den Ausdruck:

$$M \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Damit lauten die Differentialgleichungen des mit einem Strome i_e Amp. erregten Generators:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Stator:} && L \cdot \frac{dJ}{dt} + M \cdot \frac{di \cdot \cos \omega \cdot t}{dt} + w \cdot J = o, \\ &\text{Induktor:} && L \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{dJ \cdot \cos \omega t}{dt} + w \cdot i = w \cdot i_e. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Das partikuläre Integral dieser Gleichungen gibt uns die im stationären Zustand fließenden Ströme:

$$\left.\begin{aligned} i_{st} &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma + \cos \omega t} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma - \cos \omega t} \right], \\ J_{st} &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma + \cos \omega t} - \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma - \cos \omega t} \right], \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

wo

$$\sigma = \frac{L}{M}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2a)$$

Die Gl. 1) ergeben außerdem noch ein allgemeines Integral für die freien Schwingungen des Kurzschluß- und Erregerstromes:

$$\left.\begin{aligned} i_f &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left[\frac{A_1}{\sigma + \cos \omega t} + \frac{A_2}{\sigma - \cos \omega t} \right], \\ J_f &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left[\frac{A_1}{\sigma + \cos \omega t} - \frac{A_2}{\sigma - \cos \omega t} \right], \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{w}{\sqrt{L^2 - M^2}}, \\ e &= 2{,}71828 \ldots . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3a)$$

A_1 und A_2 bedeuten die willkürlichen Integrationskonstanten.

Digitized by Google

Die Gl. 2) und 3) stellen nur Näherungslösungen dar, welche indes bei nicht zu großem Ohmschen Widerstand w die tatsächlichen Verhältnisse recht gut wiedergeben.

Die vollständigen Gleichungen für die in den beiden Wicklungen fließenden Ströme lauten nun:

$$\left.\begin{aligned} i &= i_f + i_{st}, \\ J &= J_f + J_{st}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

sie geben jeden beliebigen, in unserer kurzgeschlossenen Maschine sich abspielenden Ausgleichsvorgang wieder, sofern wir nur die Konstanten A_1 und A_2 richtig bestimmen. Hierzu haben wir von den uns gegebenen Grenzbedingungen auszugehen.

Ursprünglich laufe unsere Maschine vollkommen unbelastet und es sei ein Erregerstrom von i_e Amp. eingestellt. In irgendeinem Zeitpunkte $\omega t = T$ werde nun der Stator plötzlich kurzgeschlossen. Diese Voraussetzungen ergeben folgende Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} J &= 0, \\ i &= i_e, \end{aligned}\right\} \text{ für } \omega t = T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

die wir in die Gl. 4) einzuführen haben. Hieraus berechnen sich dann die Integrationskonstanten zu:

$$A_1 = \frac{i_e}{2} \cdot (\sigma + \cos T - \sqrt{\sigma^2 - 1}),$$

$$A_2 = \frac{i_e}{2} \cdot (\sigma - \cos T - \sqrt{\sigma^2 - 1}).$$

Jetzt können wir auch die vollständigen, den Vorgang des plötzlichen Kurzschlusses der Einphasen-Synchronmaschine beschreibenden Gleichungen anschreiben. Dieselben lauten:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\sigma^2-1} + (\sigma + \cos T - \sqrt{\sigma^2-1}) \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{\sigma + \cos \omega \cdot t} + \frac{\sqrt{\sigma^2-1} + (\sigma - \cos T - \sqrt{\sigma^2-1}) \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{\sigma - \cos \omega \cdot t} \right], \\ J &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\sigma^2-1} + (\sigma + \cos T - \sqrt{\sigma^2-1}) \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{\sigma + \cos \omega \cdot t} - \frac{\sqrt{\sigma^2-1} + (\sigma - \cos T - \sqrt{\sigma^2-1}) \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{\sigma - \cos \omega \cdot t} \right]. \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

An diesen Gleichungen fällt sofort auf, daß bei kleinem σ, d. h. geringer Streuung, die Ausgleichsströme gegenüber dem stationären Strome ganz gewaltige Werte besitzen. Fig. 2, die mit Hilfe der Gl. 6) für $\sigma = 1{,}1$ und $T = 0$ gezeichnet wurde, ließ dies ja auch deutlich erkennen. Für $t = \infty$ gehen die Gl. 6) in die Gl. 2) über, sie geben uns dann den stationären Stromverlauf wieder. Fig. 1 wurde mittels der Gl. 2) für $\sigma = 1{,}25$ gezeichnet. Eine Gegenüberstellung der Fig. 1 und 2 zeigt deutlich den Einfluß der Streuung auf die Form des Stromverlaufes.

Aus den Gl. 6) geht noch hervor, daß der Verlauf des plötzlichen Kurzschlusses auch vom Schaltmoment T abhängt. Fig. 2, welcher der Einschaltmoment $T = 0$ zugrunde gelegt wurde, zeigt einen dem Kurzschlußstrome I sich überlagernden Gleichstrom, der anfangs die Höhe der maximalen Wechselstromamplitüde besitzt. Je später nun der Kurzschluß eingeleitet wird, um so kleiner wird dieses Gleichstromglied, um schließlich für $T = \frac{\pi}{2}$ ganz zu verschwinden.

In diesem letzteren Falle verschwinden auch die früher erwähnten Schwebungen im Erregerstrom.

Die maximalen, in der Erreger- und Statorwicklung auftretenden Stromstöße folgen aus den Gl. 6) für $T = 0$ und $\omega \cdot t = \pi$ bei Vernachlässigung der bis dahin eingetretenen Dämpfung zu:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} i_{max} &= i_e \cdot \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1}, \\ J_{max} &= i_e \cdot \frac{2 \cdot \sigma}{\sigma^2 - 1}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

sie sind also annähernd einander gleich, denn ihre Differenz ergibr den dem gemeinsamen Hauptfelde entsprechenden Magnetisierungsstrom. Fig. 4 zeigt die Abhängigkeit der Größe des maximalen Kurzschlußstromes von der Streuung eines Generators, man sieht, welch hohe Beträge derselbe annehmen kann.

Die abgeleiteten Gleichungen ermöglichen uns übrigens die angenäherte Berechnung des beim plötzlichen Kurzschluß auftretenden maximalen Drehmomentes. Im Leerlauf sind die Stromwärmeverluste in der Erregerwicklung

$$v = i_e^2 \cdot w = x\ {}^0/_0 \text{ der normalen Generatorleistung.}$$

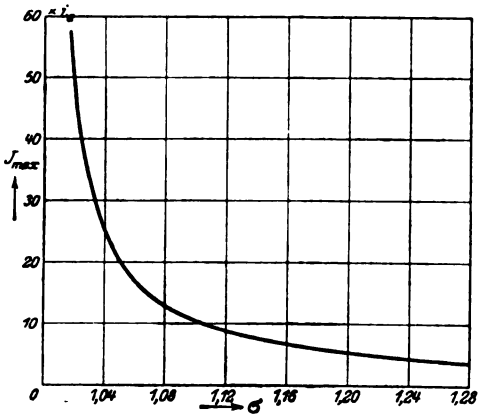


Fig. 4.

Zur Zeit $\omega \cdot t = \pi$ erreichen nach Gl. 7) die Cu-Verluste im Generator ihren Höchstwert:

$$v_{max} = i_e^2 \cdot w \cdot \frac{\sigma^4 + 6 \cdot \sigma^2 + 1}{(\sigma^2 - 1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

Diese ganze Leistung wird zum einen Teil von der kinetischen Energie der rotierenden Massen des Generators bzw. von der Antriebsmaschine, zum andern Teil jedoch von der freiwerdenden magnetischen Energie aufgebracht. Die zu Anfang im Generator aufgespeicherte magnetische Energie ist:

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot i_e^2 \cdot L.$$

Hiervon setzt sich jederzeit annähernd ein Betrag von

$$\frac{dW}{dt} = \tfrac{1}{2} \cdot i_e^2 \cdot L \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

in Joulesche Wärme um. Für $\omega \cdot t = \pi$ erhalten wir somit bei Vernachlässigung der bis dahin eingetretenen Dämpfung:

$$\frac{dW}{dt_{max}} = i_e^2 \cdot w \cdot \frac{\tfrac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{(\sigma^2 - 1)^3}}{(\sigma^2 - 1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9a)$$

Die Maschine hat somit zur Deckung der Stromwärmeverluste eine maximale mechanische Leistung

$$A = i_e^2 \cdot w \cdot \frac{\sigma^4 + 6 \cdot \sigma^2 + 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{(\sigma^2 - 1)^3}}{(\sigma^2 - 1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots 10)$$

aufzubringen, das maximale, am Generator auftretende Drehmoment berechnet sich hieraus zu:

$$D = d \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{\sigma^4 + 6 \cdot \sigma^2 + 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{(\sigma^2 - 1)^3}}{(\sigma^2 - 1)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots 11)$$

wo d das bei Vollastleistung des Generators an seiner Welle angreifende Drehmoment bedeutet. Fig. 5 zeigt das Verhältnis $\frac{D}{d \cdot x}$ in Abhängigkeit von der Streuung, man

Digitized by Google

sieht, daß bei Generatoren mit kleiner Streuung (Turbogeneratoren!) ganz riesige Belastungsstöße auftreten. Es zeigt sich übrigens, daß nur ein sehr geringer Prozentsatz der aufgewendeten Leistung (bei $\sigma = 1{,}1$ erst ungefähr 0,5 %) von der in der Maschine aufgespeicherten magnetischen Energie gedeckt wird. Darauf läßt auch der nicht unbedeutende Tourenabfall schließen, den man beim plötzlichen Kurzschluß an Generatoren mit nicht zu großer Streuung sehr regelmäßig beobachten kann.

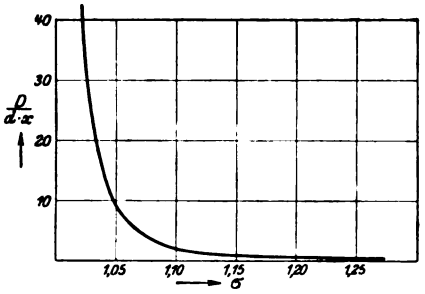


Fig. 5.

4. Die Unterbrechung des Kurzschlusses der Einphasen-Synchronmaschine. Nach diesen Abschweifungen wollen wir nun auf unser eigentliches Ziel lossteuern, d. i. die Untersuchung der Vorgänge, die bei der Abschaltung des Kurzschlusses sich abspielen. Wir setzen voraus, der betr. Schaltapparat, es wird sich wohl meist um einen Ölschalter handeln, unterbreche ordnungsgemäß den Strom in dem Augenblicke, in welchem er betriebsmäßig durch Null geht, eine Voraussetzung, die nicht immer, jedoch wohl meistens erfüllt sein wird. Wir vernachlässigen ferner den Einfluß der bei Ölschaltern nur wenige Prozent der Generatorspannung betragenden Lichtbogenspannung. Wir setzen also einen idealen Schalter voraus.

Da der Statorstrom im Augenblicke der Unterbrechung ohnehin Null ist, geht das Erlöschen desselben vor sich, ohne irgendwelche Nebenerscheinungen auszulösen. Die Statorspannung springt von Null auf ihren, der Stellung des Induktors, sowie der Stärke des Erregerfeldes entsprechenden Momentanwert und nimmt von da ab ihren regelmäßigen, sinusförmigen Verlauf. Der Erregerstrom hat im stationären Kurzschlusse, wie die gezeigten Bilder erkennen ließen, zu dem betrachteten Zeitpunkte einen kleineren Wert, als der Erregerspannung, sowie dem Widerstande w der Erregerwicklung entspricht. Der innere Grund ist der, daß, wie wir gesehen, im Kurzschlusse nur mehr ein geschwächtes Hauptfeld vorhanden ist; da J und somit das Statorfeld gleich Null, ist die Größe von i direkt ein Maß für die Stärke des im Kurzschluß vorhandenen gemeinsamen Feldes. Aus Gl. 2) folgt für $\omega t = \frac{\pi}{2}$:

$$i_0 = i_e \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

das restierende gemeinsame Feld wird also um so schwächer ausfallen, je geringer die Streuung ist. Der Erregerstrom arbeitet sich nun von dem Anfangswerte i_0 nach bekannten Gesetzen auf seinen vor dem Eintreten des Kurzschlusses eingestellten Wert i_e hinauf, entsprechend der Gleichung:

$$i = i_e + (i_0 - i_e) \cdot e^{-\frac{w}{L} \cdot t}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

Gl. 13) vermittelt den Übergang vom Kurzschluß zum Leerlauf des Generators. Im selben Maße, in welchem der Erregerstrom und damit das Hauptfeld anwächst, steigt natürlich auch die Statorspannung, um nach dem Eintreten stationärer Verhältnisse wieder ihren Leerlaufswert zu erreichen.

Fig. 6, welche für $\sigma = 1{,}25$ gezeichnet wurde, erläutert die eben beschriebenen Vorgänge. Man sieht, wie die Statorspannung im Augenblicke der Unterbrechung von Null auf ihren Amplitudinalwert springt und nun beginnt, sich auf ihren Leerlaufswert hinaufzuarbeiten, was bei großen Maschinen viele Sekunden dauert.

Wir hatten gesehen, daß beim plötzlichen Kurzschluß das ursprüngliche gemeinsame Hauptfeld allmählich bis auf einen geringen, durch die Gl. 12) festgelegten Teil-

Digitized by Google

betrag verschwindet. Die Geschwindigkeit, mit welcher das Feld abfällt, hängt von der Größe der Dämpfungskonstante α ab. Wird also der Kurzschluß unterbrochen, bevor er stationär geworden ist, so wird sich bei der Unterbrechung eine höhere Statorspannung einstellen, als der Gl. 12) entspricht; die sich sofort einstellende Statorspannung wird sich um so mehr der ursprünglichen Leerlaufspannung nähern, je schneller der Kurzschluß unterbrochen wurde. Dies läßt sich aus der Fig. 2 deutlich herauslesen.

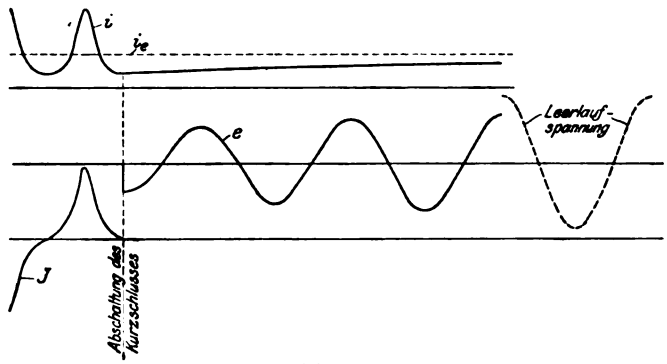


Fig. 6.

Die gepflogenen Erörterungen führen zu dem Schlusse, daß, wenn die vom Maschinenschalter zu bewältigende Abschaltleistung klein gehalten werden soll, es einen doppelten Vorteil bietet, den Kurzschluß nicht zu schnell abzuschalten. Denn es sinkt dann nicht nur der vom Ölschalter zu bewältigende Strom, sondern auch gleichzeitig die zur Aufrechterhaltung des Unterbrechungslichtbogens zur Verfügung stehende Spannung.

5. Die kurzgeschlossene Drehstrom-Synchronmaschine. Bei der in allen Phasen kurzgeschlossenen Drehstrommaschine bildet das Statorfeld ein Drehfeld, das konstante Intensität besitzt und synchron mit dem Induktor umläuft. Bei vernachlässigbar kleinem Ohmschen Widerstand besitzt es entgegengesetzte Polarität als das Erregerfeld, hebt dieses also, da es in der gleichen Bahn verläuft, teilweise auf. Die Drehstrom-Synchronmaschine arbeitet somit im stationären Kurzschluß ebenfalls mit einem geschwächten Hauptfelde. Dieses, den Luftspalt durchsetzende Feld ergibt sich bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes als die arithmerische Differenz von Induktor- und Statorfeld.

Wir nehmen nun an, die vorher leerlaufende Drehstrommaschine werde plötzlich kurzgeschlossen. Beim Eintritt in den Kurzschluß ist im Luftspalt zunächst das volle Feld vorhanden. Beide Wicklungen suchen dasselbe festzuhalten. Infolgedessen spaltet es sich in zwei Teile, deren einer am Stator, der andere am Induktor hängen bleibt, beide Teile existieren von diesem Augenblicke an nur mehr als Streufelder. Sie bedürfen zu ihrer Aufrechterhaltung somit eines der Streuinduktivität der betr. Wicklungen entsprechenden, verstärkten Gleichstromes, der sich sowohl in den Statorwicklungen, als auch in der Erregerwicklung ausbildet, in der ersteren nach Maßgabe der momentanen Lage des Hauptfeldes zu den Wicklungsachsen der einzelnen Phasen. In derjenigen Phase wird sich der stärkste Gleichstrom ausbilden, welche im Augenblicke des Kurzschlusses den größten Teil des Erregerfeldes umschlang. In diesen Gleichfeldern rotieren nun die kurzgeschlossenen Induktor-, bzw. die Statorwicklungen, in diesen werden also mit der Winkelgeschwindigkeit des Induktors pulsierende Wechselströme erzeugt, deren Amplitude durch die Höhe des mit dem betr. System verketteten Gleichfeldes bestimmt wird. Bei gleich ausgeführten Wicklungen auf Induktor und Stator und bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes werden beide Gleichfelder annähernd einander gleich, somit ungefähr je gleich der halben Größe des ursprünglich den Luftspalt durchsetzenden Hauptfeldes. Der zur Aufrechterhaltung dieser Felder nötige Gleichstrom wird natürlich um so größer sein, je kleiner die Streuung ist; der in den einzelnen Wicklungen fließende Wechselstrom besitzt eine Amplitude, welche die Höhe des im günstigsten Falle in der betr. Wicklung auftretenden Gleichstromes

Digitized by Google

besitzt. Die Erscheinungen des plötzlichen Kurzschlusses prägen sich also auch hier um so schärfer aus, je geringer die Streuung des Generators ist.

Infolge des Ohmschen Widerstandes der Wicklungen klingen die „plötzlichen" Kurzschlußströme mit fortschreitender Zeit ab, die Dämpfung befolgt dasselbe Gesetz, das wir bereits im 3. Abschnitt kennen lernten. (Gl. 3a.) Nur kommt in der Praxis noch folgende Erscheinung zur Geltung. Das mit der Erregerwicklung verkettete Wechselfeld erzeugt in den massiven Eisenteilen des Induktors derartige Wirbelstromverluste, daß es, sowie das zugehörige, am Stator haftende Gleichfeld sehr schnell verschwindet. Die Streufelder des Stators hingegen verlaufen in lamelliertem Eisenblech. Man hat infolgedessen in der Praxis mit zwei verschiedenen Dämpfungskonstanten zu rechnen.

Nach dem Gesagten kann wohl auf eine rechnerische Behandlung des Problems verzichtet werden, zumal wir derselben für das Folgende nicht bedürfen. Die Höhe der in Anker- und Erregerwicklung auftretenden maximalen Stromstöße läßt sich ebenfalls aus den Gl. 7) des 3. Abschnittes berechnen, wenn nur unter dem L des Stators die 1,5-fache resultierende Selbstinduktion einer Phase verstanden wird.

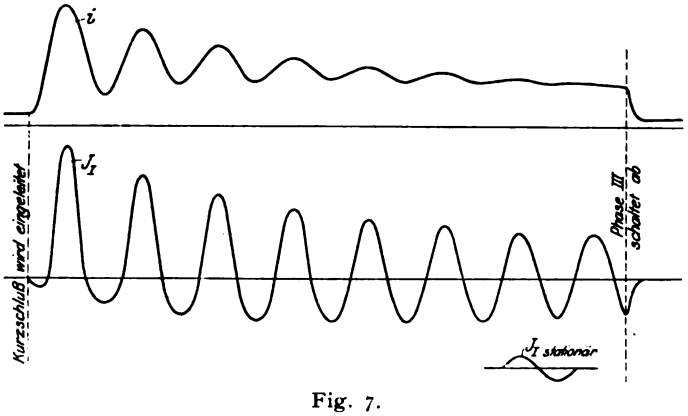


Fig. 7.

Fig. 7 zeigt den Vorgang des plötzlichen Kurzschlusses eines Dreiphasen-Generators mit $\sigma = 1{,}1$, diejenige Phase, deren Strom gezeichnet wurde, umschloß im Augenblicke des Kurzschlusses gerade den vollen Hauptflux. Da ein räumlich sinusförmiger Verlauf des Erregerfeldes vorausgesetzt wurde, haben die Ströme natürlich wegen des Drehfeldcharakters des auftretenden Feldes ebenfalls sinusförmigen Verlauf, Verzerrungen der Stromkurve, wie wir sie beim einphasigen Kurzschluß bemerkten, finden beim dreiphasigen Kurzschluß nicht statt.

6. Die Unterbrechung des dreiphasigen Kurzschlusses der Drehstrom-Synchronmaschine. Der dreiphasige Kurzschluß einer Synchronmaschine sei stationär geworden. In der Erregerwicklung fließt ein konstanter Strom i_e, die Ströme in den drei Phasen des Stators haben unter sich gleiche Amplitude und eine gegenseitige Phasenverschiebung von je 120^0. (Fig. 8.) Die Größe der Amplitude ist, wie sich aus den Differentialgleichungen der kurzgeschlossenen Dreiphasenmaschine ergibt,

$$\bar{J} = 1{,}15 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot i_e \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

Dabei bedeutet σ den reziproken Kopplungsfaktor zwischen Erregerwicklung und zwei in Serie geschalteten Statorphasen, den wir bereits im 3. Abschnitt kennen lernten. Vorausgesetzt ist eine Anordnung nach Fig. 9, die schwarz ausgefüllten Kreise bedeuten beim Induktor bewickelte Nuten, sämtliche bewickelten Nuten von Induktor und Stator besitzen gleiche Stabzahl.

Wir hatten bereits früher die Festsetzung getroffen, der Schalter möge den Strom stets in dem Augenblicke unterbrechen, in welchem er betriebsmäßig durch Null geht. Ein Blick auf die Fig. 8 lehrt, daß dann zunächst einer der drei Phasenströme verschwinden wird, die beiden andern Ströme besitzen in diesem Augenblicke entgegengesetzt gleiche Richtung. Das heißt aber, daß der betrachtete Generator von diesem

Digitized by Google

Augenblicke an als einphasig kurzgeschlossener Generator weiterläuft. Die Unterbrechung beginne z. B. zu dem in der Fig. 8 durch die Senkrechte a—b bezeichneten Zeitpunkte, den wir als Ausgangspunkt für die Zeitzählung wählen. Der Strom J_{III} ist erloschen. Zeichnen wir dann in die Fig. 9, die den bezeichneten Zeitpunkt festhält, die momentane Stromrichtung in den Nuten der Phasen I und II ein, so lehrt ein Vergleich mit der Fig. 3, daß beide vollkommen miteinander übereinstimmen. Vom Zeitpunkte $\omega t = 0$ ab wird somit das Verhalten unseres Drehstromgenerators durch die Differentialgleichungen 1) des 3. Abschnittes bestimmt.

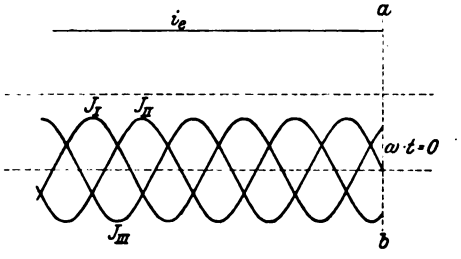


Fig. 8.

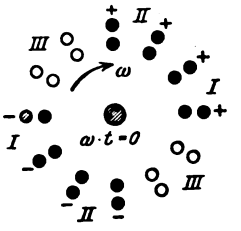


Fig. 9.

Im vorliegenden Falle lauten unsere Anfangsbedingungen, wenn wir uns wieder der beim Einphasengenerator benutzten Bezeichnungen bedienen:

$$\left.\begin{aligned} i &= i_e, \\ J_I = -J_{II} = J &= -\frac{1}{\sigma}\cdot i_e, \end{aligned}\right\} \text{ für } \omega t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Diese sind in die Gl. 4) einzuführen. Wir gewinnen dann:

$$A_1 = A_2 = \frac{i_e}{2}\cdot\left[\sigma - \frac{1}{\sigma} - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right]$$

und können folgende Gleichungen für den weiteren Verlauf des Stromes anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{i_e}{2}\cdot\left[\sqrt{\sigma^2-1} + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} - \sqrt{\sigma^2-1}\right)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sigma + \cos\omega t} + \frac{1}{\sigma - \cos\omega t}\right], \\ J &= \frac{i_e}{2}\cdot\left[\sqrt{\sigma^2-1} + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} - \sqrt{\sigma^2-1}\right)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sigma + \cos\omega t} - \frac{1}{\sigma - \cos\omega t}\right]. \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Wir kennen damit die Vorgänge im Erregerstromkreis, sowie in den Phasen I und II. Vom Zeitpunkt $\omega t = 0$ ab nehmen die beiden Phasenströme J_I und J_{II} entgegengesetzt gleichen Verlauf und sie erlöschen beim nächsten Durchgange durch Null, zur Zeit $\omega t = \frac{\pi}{2}$. Die Spannungen e_I und e_{II} der Phasen I und II springen in jenem Momente auf ihre durch die derzeitige Größe des Erregerstromes und die Stellung des Induktors bedingten Momentanwerte und nehmen weiterhin, im Verein mit der Spannung e_{III} der Phase III, ihren betriebsmäßigen, sinuidalen Verlauf. Der Erregerstrom wird von seinem Anfangswerte i_e auf einen Betrag von

$$i_0 = i_e\cdot\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

heruntergedrückt und beginnt nun entsprechend der Gleichung

$$i = i_e\cdot\left[1 - \frac{e^{-\frac{w}{L}\cdot t}}{\sigma^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Digitized by Google

langsam anzusteigen, im selben Maße die Statorspannungen erhöhend. Die im Zeitintervall $0 < \omega \cdot t < \frac{\pi}{2}$ in der Phase III sich abspielenden Vorgänge sind uns indessen noch unbekannt. Fig. 9 zeigt, daß die Wicklungsachse der Phase III senkrecht auf der gemeinsamen Wicklungsachse der Phasen I und II steht, die Spannungsgleichung für die Phase III lautet somit:

$$-e_{III} = M_{III} \cdot \frac{d\,i \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{d\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

Hierin ist M_{III} der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zwischen Erregerwicklung und Phase III. Wenn wir in diese Gleichung den Wert für i aus Gl. 16) einführen, erhalten wir weiterhin:

$$e_{III} = \frac{i_e \cdot M_{III} \cdot \omega}{2} \cdot \left[\sqrt{\sigma^2 - 1} + \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot t}\right] \cdot \left[\frac{\sigma \cdot \cos \omega t + 1}{(\sigma + \cos \omega t)^2} + \frac{\sigma \cdot \cos \omega t - 1}{(\sigma - \cos \omega t)^2}\right]. \quad 20)$$

Für $t = \infty$ würde diese Gleichung eine Funktion ergeben, welche die Fig. 10 darstellt ($\sigma = 1{,}25$), sie besitzt in den Punkten $\omega t = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots$ Maximalwerte. Diese ergeben sich aus Gl. 20, für $\omega t = 0$ und $\alpha \cdot t = 0$ zu

$$e_{III_0} = i_e \cdot M_{III} \cdot \omega. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

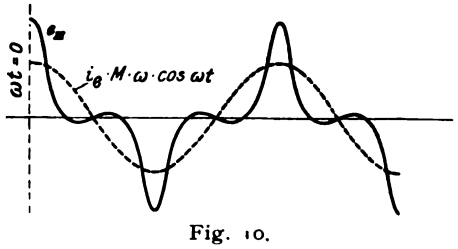


Fig. 10.

Die Spannung der Phase III springt also im Augenblicke $\omega t = 0$ auf ihren Leerlaufsamplitudinalwert, verläuft bis zum Zeitpunkte $\omega t = \frac{\pi}{2}$ nach einer Funktion, welche die Fig. 10 darstellt, und erleidet dann eine neue Unstetigkeit, indem sie auf ihren betriebsmäßigen, jedoch nach Maßgabe der Gl. 17) unter dem Leerlaufswert liegenden Betrag springt.

Fig. 11 veranschaulicht das Abschalten des stationären Kurzschlusses eines Dreiphasengenerators mit $\sigma = 1{,}1$. Ein Vergleich mit der Fig. 6, die das Abschalten des einphasigen Kurzschlusses unter denselben Verhältnissen zeigt, ist sehr interessant.

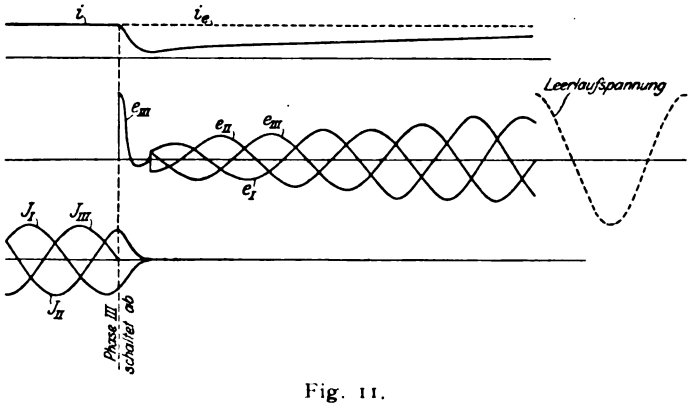


Fig. 11.

Es fällt vor allem auf, daß beim dreiphasigen Kurzschluß ein viel größerer Teil des ursprünglichen Feldes der Maschine vernichtet wurde als beim einphasigen Kurzschlusse. Dies wird sofort klar, wenn man sich daran erinnert, daß beim einphasigen Kurzschluß das Statorfeld ein Wechselfeld ist. Jedes Wechselfeld läßt sich nach einem bekannten

Digitized by Google

Satze in zwei gegenläufige Drehfelder mit je halber Amplitude und gleicher Winkelgeschwindigkeit wie das Wechselfeld zerlegen. Von diesen kann aber nur das synchron mit dem Induktor umlaufende Teilfeld sich mit dem Erregerfelde zusammensetzen und dieses teilweise aufheben. Beim dreiphasigen Kurzschluß steht hierzu das volle Statorfeld zur Verfügung. Interessant ist auch das Abfallen des Erregerstroms zur Zeit $\omega t = 0$, man sieht daran deutlich, wie mit dem Statorfeld gleichzeitig der von ihm aufgehobene Betrag des Hauptfeldes verschwindet.

Es steht von vornherein zu erwarten, daß die betrachteten Vorgänge sich beim Abschalten des noch nicht stationär gewordenen plötzlichen Kurzschlusses noch stärker ausprägen werden, insbesondere wird die Phase III noch ganz wesentlich höhere Spannungen annehmen. Hiervon möge die Fig. 12 einen Begriff geben. Dieselbe zeigt die bei gänzlicher Vernachlässigung der Dämpfung sich ergebenden größtmöglichen Werte von e_{III} in Abhängigkeit von σ. Dies sind natürlich theoretische Grenzwerte, die praktisch niemals erreicht werden, ganz abgesehen von den Sättigungserscheinungen des Eisens.

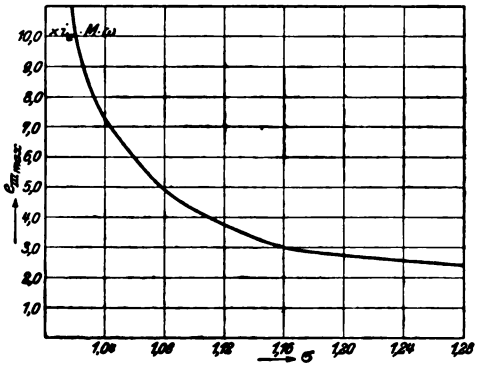


Fig. 12.

Für die rechnerische Behandlung ist es am einfachsten, in die Anfangsbedingungen 15) von Fall zu Fall zu ermittelnde Koeffizienten in folgender Form einzuführen:

$$\left.\begin{aligned} i &= k_1 \cdot i_e, \\ J &= -\frac{k_2}{\sigma} \cdot i_e. \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \omega t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 22)$$

Man gewinnt dann für die Integrationskonstanten A_1 und A_2 folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\left(k_1 - \frac{k_2}{\sigma}\right) \cdot (\sigma + 1) - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right], \\ A_2 &= \frac{i_e}{2} \cdot \left[\left(k_1 + \frac{k_2}{\sigma}\right) \cdot (\sigma - 1) - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right], \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 23)$$

die in die Gl. 3), 4) und 19) einzuführen sind. Es ist dann ein leichtes, den Abschaltvorgang weiterhin zu verfolgen.

Derselbe Generator, dessen plötzlichen Kurzschluß die Fig. 7 zeigt, werde nun in dem gezeichneten Augenblicke dreiphasig abgeschaltet. Fig. 13 zeigt den Abschaltvorgang. Der an der Phase III auftretende Spannungsstoß fällt vor allem auf. Daß diese Erscheinung nicht nur in der Theorie besteht, möge ein Beispiel aus der Praxis beweisen. Fig. 14 zeigt den an einem 16-poligen Wasserturbogenerator von 10 000 K-V-A Nennleistung oszillographisch aufgenommenen Abschaltvorgang. Die Ähnlichkeit zwischen den beiden Bildern ist unverkennbar. Ganz abgesehen von der Überspannungsfrage bedeutet die betrachtete Erscheinung

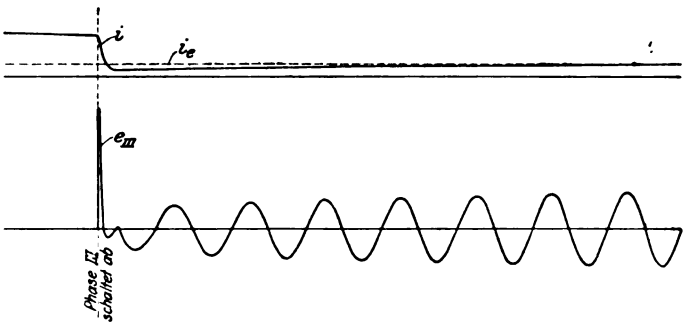


Fig. 13.

Digitized by Google

zweifellos im Interesse des Maschinenschalters eine Erschwerung des Abschaltvorganges, und wir werden uns demnach fragen müssen, welche Mittel wir zu ihrer Verhütung anwenden können.

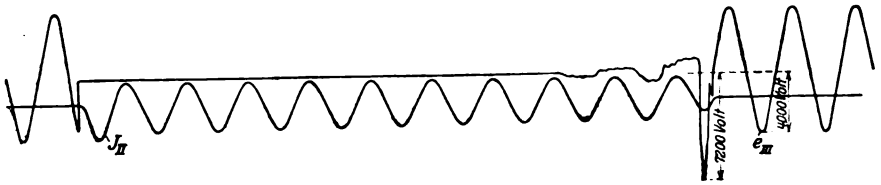


Fig. 14.

Am einfachsten ist es, mit dem Abschalten des Kurzschlusses so lange zu warten, bis er annähernd stationär geworden ist; dies wird jedoch wegen der Beunruhigung des Betriebes nicht immer möglich sein. Besser ist es schon, die Streuinduktivität der Generatoren durch Vorschaltung von Reaktanzen künstlich zu vergrößern. Dies ist ein Mittel, das gleichzeitig auch die Erscheinungen des plötzlichen Kurzschlusses lindert. Es ist ferner vorgeschlagen und auch vielfach schon ausgeführt worden, Ohmsche Widerstände vor die Generatoren zu schalten. Dieselben müssen indes während des normalen Betriebes überbrückt werden und wirken infolgedessen nur bei der Abschaltung. Ferner darf nicht übersehen werden, daß die Generatoren bei der plötzlichen Einschaltung dieser Widerstände in den Kurzschlußstromkreis ganz bedeutende Beastungstöße aufzunehmen haben.

Eine Erweiterung des Reflexionsgesetzes für Wanderwellen.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Fragestellung. Eine rechteckförmige Wanderwelle gelange aus einer langen Leitung α in eine zweite lange Leitung β (Fig. 1). Betrug ihre Höhe in der Leitung α A_α, so beträgt sie in der Leitung β

$$A_\beta = A_\alpha \cdot \frac{2 Z_\beta}{Z_\alpha + Z_\beta} = A_\alpha \cdot d_{\alpha\beta} \qquad 1)$$

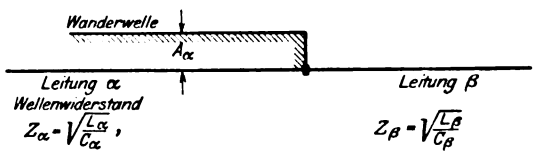


Fig. 1. Zwei unendlich lange Leitungen, für die das übliche Reflexionsgesetz zugeschnitten ist.

(Z_α und Z_β Wellenwiderstände der Leitungen α und β). Außerdem entspringt an der Grenze eine in die Leitung α zurückwandernde Welle von der Höhe

$$R_\alpha = A_\alpha \cdot \frac{Z_\beta - Z_\alpha}{Z_\alpha + Z_\beta} = A_\alpha \cdot r_{\alpha\beta} \qquad 2)$$

Die Formeln 1) und 2) zusammen genommen bilden das sogenannte Reflexionsgesetz.[1])

[1]) Der erste, der erkannt hat, daß sich die Elektrizität längs Drähten wellenförmig ausbreitet, ist G. Kirchhoff (Ann. d. Phys. 100 [1857] S. 193 und 102 [1857] S. 529). Kirchhoff stellt

Digitized by Google

Wir schalten nun zwischen die Leitungen α und β ein Zwischenstück ein. Der Reihe nach bezeichnen wir von nun an die Leitungen mit 1, 2 und 3 (Fig. 2). Um einen besonderen Fall vor Augen zu haben, sei angenommen, die Leitungen 1 und 3 mögen hohe und gleiche Werte des Wellenwiderstandes haben (etwa $Z_1 = Z_3 = 2000$ Ohm). Dagegen soll der Wellenwiderstand der Zwischenleitung klein sein (etwa $Z_2 = 200$ Ohm).

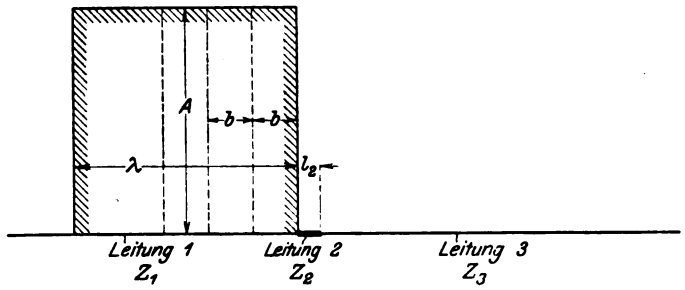


Fig. 2. Zwei unendlich lange Leitungen mit Zwischenstück, für die das erweiterte Reflexionsgesetz gesucht wird. Die Urwelle und ihre Zerlegung in Teilwellen.

Wenn das Zwischenstück nun außerordentlich (unendlich) kurz ist, dann wird die Wanderwelle ohne merkliche Schwächung aus der Leitung 1 in die Leitung 3 übertreten. Wenn dagegen das Zwischenstück sehr lang ist, dann werden wir die Formel 1) sowohl für die Grenze 1/2, wie für die Grenze 2/3 anwenden können. Alsdann dringt in die Leitung 3 nur ein kleiner Bruchteil (im Beispiel etwa 1/3) der in 1 vorhandenen Welle ein.

Es erhebt sich nun die Frage: Wann darf eine Leitung als kurz, wann als lang bezeichnet werden? Unsere Betrachtungen werden zeigen, daß es bei dieser Frage nicht auf die absolute Länge des Zwischenstücks, sondern auf ihr Verhältnis zur Wellenlänge λ der Wanderwelle ankommt.[1])

Weiter wird man fragen: Es sei das Zwischenstück weder groß noch klein, sondern von mittlerer Länge. Welcher Bruchteil der in 1 vorhandenen Welle dringt in die Leitung 3 ein?

2. Die Erweiterung des Reflexionsgezetzes für rechteckförmige Wanderwellen. a) Das Schicksal einer Teilwelle. Die rechteckförmige Wanderwelle von der Länge λ sei gerade an der Grenze 1/2 angekommen. Wir zerlegen sie durch senkrecht zur Leitung 1 geführte Schnitte in eine Anzahl Teilwanderwellen (Fig. 2). Die Länge b der Teilwanderwellen wählen wir nach folgendem Gesichtspunkte: Es sei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wanderwelle in der Leitung 1 gleich c_1, in der Lei-

bereits die Telegraphengleichung auf. Als deren Lösung schreibt er vor- und rückwärtslaufende Wellen an. Er sagt bereits mit bestimmten klaren Worten, daß die Wellen an den Enden einer Leitung je nach den Bedingungen Reflexionen erleiden. Auch diskutiert er den Vorgang beim Schalten eines Elementes auf eine lange Leitung. Die bei diesem Vorgang auftretenden Spannungssprünge kommen deutlich in seinen Bildern genau in der heute üblichen Zeichnungsweise zum Ausdruck. Die oben zitierte Formel 2) stammt, soweit ich sehe, von Heaviside (s. z. B. Electrical Theory Vol. II § 396). In die technische Literatur sind die Formeln 1) und 2) meines Wissens durch das Büchlein von K. W. Wagner: Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln (s. Abschnitt 11 des Büchleins) gedrungen.

[1]) Die von uns betrachtete Welle besteht nur aus einem einzigen Wellenberg. Infolgedessen ist hier die Länge des Berges als Wellenlänge bezeichnet, während es sonst üblich ist, die Länge von Wellenberg und Wellental als Wellenlänge zu bezeichnen.

Digitized by Google

tung 2 gleich c_2. Ferner sei l die Länge des Zwischenstücks. Dann sei die Länge b einer Teilwanderwelle:

$$b = 2l \cdot \frac{c_1}{c_2} \qquad 3)$$

Wir verfolgen jetzt das Schicksal der ersten Teilwanderwelle. Sie erleidet zunächst eine Reflexion an der Grenze 1/2 und später an der Grenze 2/3. Sie eilt alsdann wieder in die Leitung 2 zurück, um an der Grenze 2/1, 2/3 usf. reflektiert zu werden. Sie hat dasselbe Schicksal wie ein zwischen zwei unvollkommenen parallelen Spiegeln befindlicher Lichtstrahl. Bei den Reflexionen ergeben sich folgende Wellenamplituden:

	Reflexion			
	an der Grenze 1/2 oder 2/1		an der Grenze 2/3	
	In die Leitung 1 dringt	In die Leitung 2 dringt	In die Leitung 2 dringt	In die Leitung 3 dringt
1. Reflexion	$A r_{12}$	$A d_{12}$	—	—
2. „	—	—	$A d_{12} \cdot r_{23}$	$A d_{12} \cdot d_{23}$
3. „	$A d_{12} \cdot r_{23} \cdot d_{21}$	$A d_{12} \cdot r_{23} \cdot r_{21}$	—	—
4. „	—	—	$A d_{12} \cdot r_{23}^2 \cdot r_{21}$	$A d_{12} \cdot d_{23} \cdot r_{23} \cdot r_{21}$
5. „	$A d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}^2 \cdot r_{21}$	$A d_{12} \cdot r_{23}^2 \cdot r_{21}^2$	—	—
6. „	—	—	$A d_{12} \cdot r_{23}^3 \cdot r_{21}^2$	$A d_{12} \cdot d_{23} \cdot r_{23}^2 \cdot r_{21}^2$
7. „	$A d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}^2 \cdot r_{21}^2$	$A d_{12} \cdot r_{23}^3 \cdot r_{21}^3$	—	—
8. „	—	—	$A d_{12} \cdot r_{23}^4 \cdot r_{21}^3$	$A d_{12} \cdot d_{23} \cdot r_{23}^3 \cdot r_{21}^3$
9. „	$A d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}^4 \cdot r_{21}^3$	$A d_{12} \cdot r_{23}^4 \cdot r_{21}^4$	—	—
⋮				

Man erkennt leicht, daß die Länge b der Teilwanderwelle so gewählt wurde, daß sich die durch die einzelnen Reflexionen entstehenden Unterwellen in den Leitungen 1 und 3 lückenlos aneinandersetzen. Für das im Abschnitt 1 bereits benutzte Beispiel

$\left(\frac{Z_1}{Z_3} = 1;\ \frac{Z_1}{Z_2} = 10\right)$ ist

$$r_{12} = -\frac{9}{11};\quad d_{12} = \frac{2}{11};\quad r_{21} = \frac{9}{11};\quad d_{21} = \frac{20}{11};\quad d_{23} = \frac{20}{11};\quad r_{23} = \frac{9}{11}.$$

Nach genügend langer Zeit (Fig. 3) hat sich somit die erste Teilwanderwelle in zwei Wellenzüge aufgelöst, von denen der eine in die Leitung 1 zurückwandert, der andere in der Leitung 3 davonzieht. Die Teilwanderwelle hat sich durch die

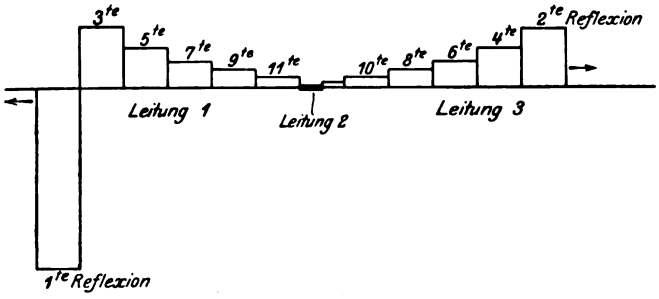


Fig. 3. Veränderung der ersten Teilwelle.

wiederholten Reflexionen gründlich verändert. Ihre Höhe ist kleiner, ihre Länge größer geworden. Sie fällt nicht plötzlich, sondern erst in vielen Stufen nach und nach auf Null herab.

Digitized by Google

b) Der Kopf der in die Leitung 3 oder 1 einziehenden oder zurückwandernden Welle. Jede einzelne durch Zerlegung der Urwanderwelle entstandene Teilwanderwelle (Fig. 2) erleidet dasselbe Schicksal wie die erste Teilwanderwelle. Nur erleidet sie dieselben Veränderungen um eine Zeitspanne τ später, in der die Welle die Länge b, oder, was auf das gleiche hinauskommt, die doppelte Leitungslänge des Zwischenstückes durchwandert.

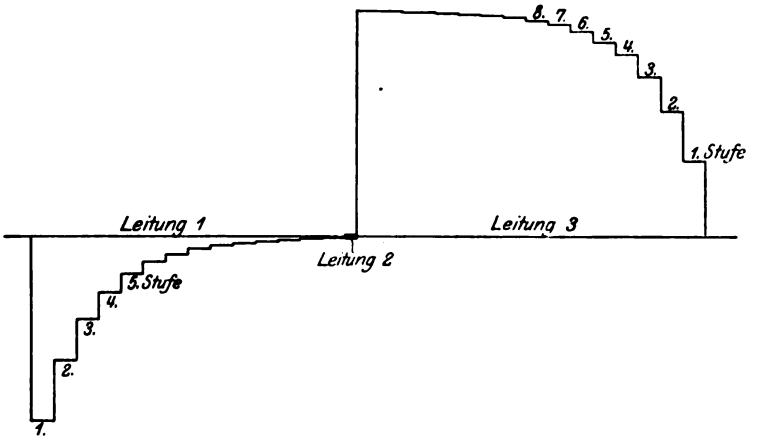


Fig. 4. Der Wellenkopf.

Nach genügend langer Zeit finden wir daher in den Leitungen 1 und 3 die in Fig. 4 gezeichneten Wellenzüge. Sie sind dadurch erhalten worden, daß die von jeder Teilwanderwelle entstehenden Teilwellenzüge unter richtiger Beachtung ihrer räumlichen Verschiebung addiert wurden. Nicht nur die Teilwanderwelle, sondern auch die gesamte Wanderwelle hat ihre steile Front eingebüßt; sie wächst stufenweise. Sie erreicht nach und nach die folgenden Höhen[1]):

Leitung 3.

1. Stufe Höhe: $A d_{12} \cdot d_{23}\ 1$,

2. „ „ $A d_{12} \cdot d_{23} \{1 + r_{23} \cdot r_{21}\}$,

3. „ „ $A d_{12} \cdot d_{23} \{1 + r_{23} \cdot r_{21} + r_{23}^2 \cdot r_{21}^2\}$,

4. „ „ $A d_{12} \cdot d_{23} \{1 + r_{23} \cdot r_{21} + r_{23}^2 \cdot r_{21}^2 + r_{23}^3 \cdot r_{21}^3\}$,

n^{te} „ „ $A d_{12} \cdot d_{23} \{1 + r_{23} \cdot r_{21} + r_{23}^2 \cdot r_{21}^2 + \ldots r_{23}^{n-1} \cdot r_{21}^{n-1}\}$.

Leitung 1.

1. Stufe Höhe: $A r_{12}$,

2. „ „ $A \{r_{12} + d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}\}$,

3. „ „ $A \{r_{12} + d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23} [1 + r_{23} \cdot r_{21}]\}$,

4. „ „ $A \{r_{12} + d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23} [1 + r_{23} \cdot r_{21} + r_{23}^2 \cdot r_{21}^2]\}$,

n^{te} „ „ $A \{r_{12} + d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23} [1 + r_{23} \cdot r_{21} + r_{23}^2 \cdot r_{21}^2 + \ldots r_{23}^{n-2} \cdot r_{21}^{n-2}]\}$.

Wir wollen wieder mit τ die Zeit bezeichnen, in der die Welle die Länge b durcheilt. Wir greifen irgendeine Stelle in der Leitung 3 heraus. Zur Zeit $t = 0$

[1]) Verwandte Staffelrechnungen sind bereits von Petersen: Wanderwellen als Überspannungserreger, Archiv f. Elektrot. I, S. 233 durchgeführt worden.

Digitized by Google

gelange zu dieser Stelle der Kopf der Welle. Dann eilt in der Zeit $(n-1)\tau$ bis $(n)\tau$ die Welle mit einer Höhe von

$$A d_{12} \cdot d_{23} \{1 + R + R^2 + \ldots R^{n-1}\} = A d_{12} \cdot d_{23} \cdot \frac{1 - R^n}{1 - R} \qquad 4)$$

$$R = r_{23} \cdot r_{21} \qquad 5)$$

vorüber.

Ist die Welle außerordentlich lang, so kann n beliebig große Werte erreichen. Alsdann verschwindet R^n gegen 1 und die Welle erreicht in der Leitung 3 die Erhebung:

$$\frac{A d_{12} \cdot d_{23}}{1 - R} = A d_{13} \qquad 6)$$

Wenn die Wanderwelle in der Leitung 1 genügend lang ist, beeinflußt die Leitung 2 wohl ihre Front, nicht aber ihre Höhe.

Wenn die Länge λ der Wanderwelle aber mit der Teillänge b in der Beziehung steht

$$\lambda = mb, \qquad 7)$$

dann erreicht die Wanderwelle in der Leitung 3 nur die Höhe[1]):

$$A_{3k} = A d_{13} (1 - R^m). \qquad 8)$$

In unserem Beispiel ist $d_{13} = 1$. Eine lange Welle ($m = \infty$) durchsetzt daher die Leitung 2 ungeschwächt (Fig. 4). Ist $m \leqq 1$ (sehr kurze Welle), dann ist $A_{3k} = A d_{12} \cdot d_{23} = A \cdot \frac{40}{121} \sim A \cdot \frac{1}{3}$. Alsdann haben wir den Fall, daß die zweimalige Anwendung des Reflexionsgesetzes 1) zum richtigen Ergebnis führt. Ist etwa $m = 3$, so ist in unserem Beispiel

$$A_{3k} = A \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}67^3) = A \cdot 0{,}7.$$

Wir fassen eine Stelle in der Leitung 1 ins Auge. Zur Zeit $t = 0$ möge daselbst der Kopf der zurückwandernden Welle ankommen. Dann beträgt in der Zeit $(n-1)\tau$ bis $n\tau$ daselbst die Höhe der Wanderwelle

$$A \{r_{12} + d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23} [1 + R + R^2 + \ldots R^{n-2}]\} = A \left\{r_{12} + \frac{d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}}{1 - R} (1 - R^{n-1})\right\} \qquad 8)$$

Nun ist:

$$r_{12} + \frac{d_{12} \cdot d_{21} \cdot r_{23}}{1 - R} = r_{13} \qquad 9)$$

Es ist somit die Höhe der zurückwandernden Welle:

$$A_{1k} = A \cdot \{r_{13} - (r_{13} - r_{12}) R^{n-1}\} \qquad 10)$$

c) Der Wellenschweif. Die Länge der Wanderwelle sei wieder $\lambda = mb$.

In der Leitung 3 hat in der Zeit von $(m-1)\tau$ bis $m\tau$ die Welle die Höhe:

$$A \cdot d_{12} \cdot d_{23} \{1 + R + R^2 + \ldots R^{m-1}\}.$$

[1]) Nach Nieder chrift des vorliegenden Aufsatzes hat mich Herr K. W. Wagner auf ein Merkblatt aufmerksam gemacht, das Herr Rüdenberg bei seinen Vorträgen im Winter 1913/14 verteilt hat. Daselbst findet sich bereits die rechte Hälfte der Fig. 4 und die Formel 8).

Digitized by Google

Ihre Höhe ist in der Zeit

$$\begin{aligned}
&\text{von } m\tau \text{ bis } (m+1)\tau \text{ gleich } A d_{12}\cdot d_{23}\{R+R^2+\dots R^{m-1}\}\\
&\qquad = A d_{13}(1-R^{m+1}) - A d_{12}\cdot d_{23}\\
&\text{von } (m+1)\tau \text{ „ } (m+2)\tau \text{ „ } A d_{13}(1-R^{m+2}) - A d_{12}\cdot d_{23}\{1+R\}\\
&\qquad \vdots\\
&\text{von } (m+p-1)\tau \text{ „ } (m+p)\tau \text{ „ } A d_{13}(1-R^{m+p}) - A d_{12}\cdot d_{23}\{1+R+\dots R^{(p-1)}\}
\end{aligned}$$

oder allgemein:

$$A_{3s} = A d_{13}(1-R^m) - A d_{1s}(1-R^p) = A d_{13}\{R^p - R^{m+p}\} \qquad 11)$$

Der Durchgang durch das Zwischenstück 2 hat daher zur Folge, daß sich die Welle verlängert. Sie fällt in der Leitung 3 nicht plötzlich, sondern in Sprüngen auf Null herab (Fig. 5). Ist m so klein, daß R^m gegen 1 in Betracht kommt, so wird die Welle auf mehr als das Doppelte verlängert. Ihre ursprünglich rechteckige Gestalt nähert sich der dreieckförmigen. Ist aber m so groß, daß R^m gegen 1 verschwindet, dann erscheint die ursprünglich rechteckige Welle zu einem trapezähnlichen Gebilde ausgereckt.

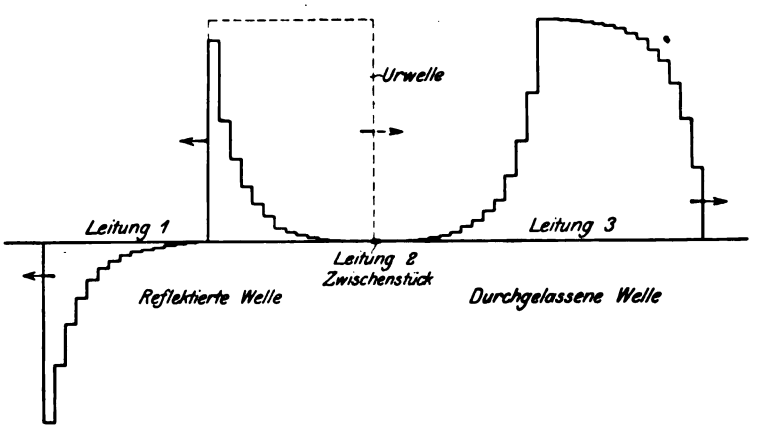


Fig. 5. Wellenkopf und Wellenschweif.

In der Leitung 1 hat in der Zeit $(m-1)\tau$ bis $m\tau$ die Welle die Höhe:

$$A[r_{13} - (r_{13} - r_{12})R^{m-1}] = A\left[r_{12} + \frac{d_{12}\cdot d_{21}\cdot r_{23}}{1-R}(1-R^{m-1}\right] = A_{1km}.$$

Ihre Höhe ist in der Zeit

$$\begin{aligned}
&\text{von } m\tau \text{ bis } (m+1)\tau \text{ gleich } A_{1km+1} - A r_{12}\\
&\text{von } (m+1)\tau \text{ „ } (m+2)\tau \text{ „ } A_{1km+2} - A r_{12} - A d_{12}\cdot d_{21}\cdot r_{23}\\
&\text{von } (m+2)\tau \text{ „ } (m+3)\tau \text{ „ } A_{1km+3} - A r_{12} - A d_{12}\cdot d_{21}\cdot r_{23}\{1+R\}\\
&\qquad \vdots\\
&\text{von } (m+p-1)\tau \text{ „ } (m+p)\tau \text{ „ } A_{1km+p} - A\{r_{12} + d_{12}\cdot d_{21}\cdot r_{23}[1+R\dots R^{p-2}]\}\\
&\qquad = A_{1km+p} - A[r_{13} - (r_{13}-r_{12})R^{p-1}]\\
&\qquad = A_{1km+p} - A_{1kp}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Höhe des Schweifes der in die Leitung 1 zurückwandernden Welle:

$$A_{1s} = A(r_{13} - r_{12})[R^{p-1} - R^{m+p-1}] \qquad 12)$$

Digitized by Google

Auch die in Leitung 1 zurückwandernde Welle erscheint verlängert. Die Fig. 5 gibt uns eine Vorstellung von der Veränderung der reflektierten Welle.

3. Schlußbemerkung. Für jede Wellenform ist streng genommen ein neues Gesetz aufzustellen. Doch wird man im allgemeinen bereits mit den mitgeteilten Formeln auskommen können.

Wenn es nur auf die Höhe der Wanderwelle ankommt, kann eine Zwischenleitung bereits als lang angesehen werden, wenn sie gleich oder größer als die Hälfte der durch Fig. 2 definierten Wellenlänge λ ist.

Wann eine Wellenlänge als kurz angesehen werden kann, hängt nicht nur von dem Verhältnis der Länge l des Zwischenstückes zur Wellenlänge λ der Wanderwelle, sondern auch noch von den Reflexionskoeffizienten des Zwischenstückes gegenüber den angeschlossenen Leitungen ab.

Das Zwischenstück bricht die steile Front der Wanderwelle. Sollte die von einer Wanderwelle drohende Gefahr wirklich in ihrer steilen Front liegen, so würden Zwischenstücke als Schutz gegen Wanderwellen in Betracht kommen.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 7. u. 8. Heft. 1916.

Elektrische Schwingungen in Maschinenwicklungen.[1])

Von

J. Biermanns.

1. Einleitung. Die Erkenntnis der unter dem Einflusse normaler oder abnormaler Änderungen des jeweiligen Betriebszustandes bzw. atmosphärischer Störungen auf elektrischen Leitungen sich abspielenden Ausgleichsvorgänge hat in den letzten Jahren große Fortschritte gemacht. Auf den Untersuchungen von Thomson, Kirchhoff, Rayleigh, Riemann u. a. fußend, hat sich schon eine ganze Reihe von Autoren[2]) mit den Problemen befaßt, die uns die aufsteigende Entwicklung der Hochspannungstechnik aufgab, und man kann sagen, daß heute schon eine ziemliche Klärung auf diesem Gebiete eingetreten ist.

Bei der mathematischen Behandlung der Ausgleichsvorgänge auf elektrischen Leitungen bedienen sich die verschiedenen Autoren fast ausschließlich einer Methode, die auf der Integration der Telegraphengleichung durch ein Paar fortschreitende Funktionen beruht. Es führt diese Art der Behandlung ohne weiteres auf Wellen, welche auf den Leitungen hin- und herlaufen, sogen. Wanderwellen, mit deren Hilfe sich die auf elektrischen Leitungen auftretenden Erscheinungen zwanglos erklären. Die erwähnte Methode besitzt somit den Vorzug, von vornherein physikalisch anschaulich zu bleiben; ein weiterer Vorzug ist der, daß man bei ihrer Anwendung, da die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung, wie wir es vom Ohmschen Gesetze her kennen, eine lineare ist, sich auf sehr einfache mathematische Hilfsmittel beschränken kann. Es leistet die Methode somit gute Dienste, sie bleibt in ihrer Anwendung jedoch nur so lange einfach und übersichtlich, als man sich auf die Verfolgung irgendwelcher Ausgleichsvorgänge in ihren allerersten Anfängen beschränkt.

Man kann sich noch einer zweiten Methode zur Behandlung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge bedienen, die zu ihrer Anwendung zwar wesentlich umfangreichere mathematische Hilfsmittel benötigt, dafür aber den Vorzug besitzt, daß sie ohne weiteres einen Überblick über den vollständigen Verlauf der zu untersuchenden Vorgänge gewährt. Die Telegraphengleichung kann auch mit Hilfe von unendlichen trigonometrischen Reihen integriert werden, und man kann den Gang der sich hieraus ergebenden Behandlungsweise physikalisch folgendermaßen erklären. Man löst die auf der zu untersuchenden elektrischen Leitung sich abspielenden Vorgänge in eine unendliche Reihe von Einzelschwingungen, die Eigenschwingungen der Leitung, auf und macht sie so der rechnerischen Behandlung zugängig; indem man die Einzelwellen nachträglich wieder addiert, gelangt man zu fortschreitenden Wellen, welche den zu untersuchenden Vorgang vollständig beschreiben. Man gelangt somit eigentlich erst über einen Umweg zum Ziele.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, zu welchen Ergebnissen über den Schutzwert von Drosselspulen und Kondensatoren man gelangt, wenn man sich der zuletzt erwähnten Methode zur Behandlung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge bedient. Hierbei werden, zumal es sich nicht um strenge Lösungen des gestellten Problems handeln soll, besondere Schwierigkeiten nicht mehr zu überwinden sein, die Untersuchungen können ohne weiteres auf den von Wagner gegebenen Grundlagen aufgebaut werden.

---

[1]) Eingesandt im Oktober 1914.

[2]) Siehe vor Allem: K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908.

Digitized by Google

2. Das Ersatzschema. Wir denken uns eine Freileitung mit dem Wellenwiderstand W, welche wir als sehr lang voraussetzen wollen, und an deren einem Ende über eine Drosselspule mit dem Selbstinduktionskoeffizienten λ eine Transformatorenwicklung angeschlossen ist. Die Transformatorenwicklung, deren Länge l sei, ist an ihrem anderen Ende offen gedacht, sie besitze eine gesamte Selbstinduktion $L_1 \cdot l = L$ und eine gesamte Kapazität $C_1 \cdot l = C$. Vernachlässigen wir zunächst die Selbstinduktion L der Transformatorenwicklung, so können wir die gedachte Anordnung durch das folgende Schema (Figur 1) ersetzen: Auf diese Anordnung treffe zur Zeit $t = o$ eine rechtecksförmige Wanderwelle, welche die konstante Spannung E besitze, ihre Stromstärke ist dann $\frac{E}{W}$.

Fig. 1.

Bezeichnet e_1' die im Punkte $x = o$ reflektierte Spannungswelle, die zugehörige Stromwelle ist $-\frac{e_1'}{W}$, e_2 die an der Reihenschaltung von Selbstinduktion und Kapazität herrschende Spannung und i_2 den in diese Schaltung hineinfließenden Strom, so geben uns die im Punkte $x = o$ geltenden elektrischen Gleichgewichtsbedingungen folgende Ansätze:

$$\left.\begin{aligned} E + e_1' &= e_2 \\ \frac{1}{W} \cdot (E - e_1') &= i_2 \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Nun ist:

$$e_2 = \lambda \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i_2 \cdot dt.$$

Führt man in diese Gleichung den Wert für i_2 aus der zweiten der Gl. (1) ein, desgl. den Wert für e_2 aus der ersten der Gl. (1), so gelangt man zur folgenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\lambda \cdot \frac{d^2 e_1'}{dt^2} + W \cdot \frac{de_1'}{dt} + \frac{1}{C} \cdot e_1' = \frac{1}{C} \cdot E. \quad 2)$$

Das Integral dieser Gleichung lautet:

$$e_1' = E + A_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{z_2 \cdot t},$$

und somit wird:

$$e_2 = 2 \cdot E + A_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{z_2 \cdot t}. \quad 3)$$

A_1 und A_2 sind die willkürlichen Integrationskonstanten, $z_{1,2}$ ergibt sich aus der charakteristischen Gleichung:

$$z^2 \cdot \lambda + z \cdot W + \frac{1}{C} = o$$

zu:

$$z_{1,2} = -\frac{W}{2 \cdot \lambda} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2} - \frac{1}{C \cdot \lambda}}. \quad 3a)$$

In den praktisch vorkommenden Fällen ist nun stets

$$\frac{4 \cdot \lambda}{C} < W^2,$$

so daß wir die Gleichung für die Spannung e_2 folgendermaßen schreiben können:

$$e_2 = 2 \cdot E + e^{-\frac{W}{2 \cdot \lambda} \cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{j \cdot \sqrt{\frac{1}{C \cdot \lambda} - \frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2}} \cdot t} + A_2 \cdot e^{-j \cdot \sqrt{\frac{1}{C \cdot \lambda} - \frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2}} \cdot t} \right) \quad 4)$$

Digitized by Google

Die an der Reihenschaltung der Drosselspule mit dem Kondensator herrschende Spannung e_2 besitzt somit oszillatorischen Charakter, sie verläuft nach einer einfachen, harmonischen Funktion und ist entsprechend dem Faktor

$$e^{-\frac{W}{2\cdot\lambda}\cdot t} \qquad 4a)$$

zeitlich gedämpft. Die Frequenz der auftretenden Schwingung ist:

$$\sigma = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{C\cdot\lambda} - \frac{W^2}{4\cdot\lambda^2}}. \qquad 4b)$$

Die Gl. (4) besagen nun folgendes:

Der Wellenwiderstand W derjenigen Leitung, von welcher die Wanderwelle E kommend gedacht ist, verhält sich wie ein Dämpfungswiderstand, die Gl. (4) haben die bekannte Form der Gleichungen des Thomsonschen Schwingungskreises, welcher einen Ohmschen Widerstand W besitzt, und welcher zur Zeit $t = 0$ an eine konstante Spannung $2 \cdot E$ gelegt wird.

Die eben behandelte Anordnung kann demnach durch das Schema Fig. 1a vollkommen ersetzt werden; das Schließen der in diesem Schema eingezeichneten Schalter löst im Thomsonschen Schwingungskreise genau dieselben Schwingungserscheinungen aus als in der durch die Fig. 1 dargestellten Anordnung das Auftreffen der Wanderwelle auf den Punkt $x = 0$.

Wir könnten die vorhergehenden Betrachtungen auch auf irgendwelche andere Apparateschaltungen anwenden, und wir würden so zu einem Satze gelangen, welchen Petersen folgendermaßen ausspricht[1]):

„Trifft eine Wanderwelle beliebiger Form am Ende einer Leitung mit dem Wellenwiderstand W_1 auf eine beliebige Kombination von Ohmschen, induktiven, kapazitiven Widerständen und weiteren Wellenwiderständen, so sind die Gleichungen dieser Anordnung gegeben durch die Gleichungen eines Stromkreises, in welchem an Stelle der Leitungen

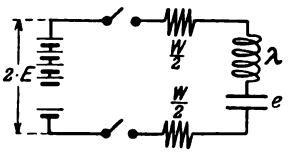


Fig. 1a.

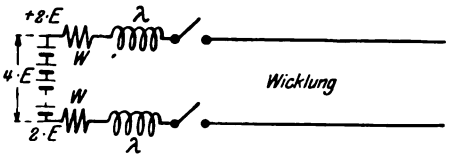


Fig. 2.

Bei Betrachtung der Figur 2 ist zu berücksichtigen, daß jede der vollkommen symmetrischen Wicklungshälften, auf deren eine wir uns im Folgenden beschränken werden, für sich der Anordnung Figur 1a entspricht.

beliebiger Länge mit den Wellenwiderständen W_1, W_2, W_3 ... Ohmsche Widerstände mit den Beträgen $R_1 = W_1$, $R_2 = W_2$, $R_3 = W_3$ ... treten, und auf welchen über den Ohmschen Widerstand $R_1 = W_1$ die doppelte Wellenspannung in dem Augenblicke geschaltet wird, in welchem die Wanderwelle auf die tatsächlich vorhandene Anordnung trifft."

Es ist nämlich der Schluß naheliegend, daß das Ersatzschema Fig. 1a auch dann noch seine Gültigkeit behält, wenn wir die Selbstinduktion der Transformatorenwicklung nicht mehr vernachlässigen; auf diesen Fall sich beziehenden Betrachtungen wäre demnach das durch die Figur 2 gegebene Schema zugrunde zu legen.

3. Die allgemeinen Gleichungen. Wir fassen für die folgenden Betrachtungen jede Maschinenwicklung als eine Leitung im weiteren Sinne des Wortes auf, das heißt, wir denken uns dieselbe mit gleichmäßig verteilten Konstanten L_1 (Selbstinduktion), C_1 (Kapazität), w_1 (Widerstand) und a_1 (Ableitung) ausgestattet[2]).

[1]) W. Petersen, Wanderwellen als Überspannungserreger. Arch. f. Elektrotechn. 1912.

[2]) Wagner kommt auf Grund von in der Wiener Z. f. E. u. M. (Heft 7 u. 8, 1915) angestellten theoretischen Betrachtungen zu dem Ergebnis, daß elektromagnetische Wellen beim

Digitized by Google

Der Spannungsabfall längs unserer Leitung setzt sich nun aus der Ohmschen Spannung sowie aus der induktiven Spannungskomponente zusammen, d. h. in Formeln ausgedrückt ist:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = w_1 \cdot i + L_1 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}. \qquad 5a)$$

Eine zweite Gleichung ergibt uns das Gesetz der dielektrischen Verschiebung: die Abnahme des Stromes längs unserer Leitung ist gleich dem in jedes Leiterelement hineinfließenden Kapazitätsstrom plus einem Teilstrom, welcher infolge der unvollkommenen Isolation verloren geht, d. h.

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = a_1 \cdot e + C_1 \cdot \frac{\partial e}{\partial t}. \qquad 5b)$$

In diesen Gleichungen sind e und i die Variabeln, x ist die in positiver Richtung gerechnete Koordinate, t die Zeit.

Die Substitution:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ i &= -C_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - a_1 \cdot \Phi \end{aligned}\right| \qquad 6)$$

befriedigt die Gl. (5b) identisch. Die Gl. (5a) geht über in:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = w_1 \cdot a_1 \Phi + (w_1 \cdot C_1 + a_1 \cdot L_1) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung läßt sich in eine einfachere Gleichung überführen, welche die erste Ableitung nach der Zeit nicht mehr enthält, wenn wir uns einer neuen Variabeln

$$\Psi = \Phi \cdot e^{-a_1 \cdot t} \qquad 7)$$

bedienen. Mit

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{2 \cdot L_1} + \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \qquad 7a)$$

ergibt sich nämlich:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -L_1 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1}\right)^2 \cdot \Psi + L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \qquad 8)$$

Setzen wir nun

$$\Psi = (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t) \cdot V, \qquad 9)$$

so ergibt sich für V die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + L_1 \cdot C_1 \cdot \left[n^2 + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1}\right)^2\right] \cdot V = 0, \qquad 10)$$

woraus:

$$V = a \cdot \sin m \cdot x + b \cdot \cos m \cdot x. \qquad 11)$$

Eindringen in Wicklungen sehr erhebliche Formveränderungen erleiden, was bekanntlich nicht der Fall ist, wenn Wellen längs homogenen Leitungen verlaufen. Diese Erscheinung ist in der Hauptsache auf die Kapazität zwischen den einzelnen Windungen, sowie auf die gegenseitige induktive Beeinflussung derselben zurückzuführen, also auf Faktoren, die wir im vorliegenden Falle gänzlich vernachlässigen. Nun haben vom Verfasser angestellte Versuche ergeben, daß gerade bei Großtransformatoren eine Verzerrung eindringender Wellen sich kaum nachweisen läßt und daß ferner die Dämpfung eine überraschend geringe ist. Diese Ergebnisse stehen durchaus im Einklang mit den Erfahrungen der Praxis. Im Hinblick darauf sind unsere Vernachlässigungen, wenn wir Kleintransformatoren ausschließen, als durchaus unbedenklich zu bezeichnen. Großtransformatoren mit ihren bedeutenden Windungslängen sind ja auch weitaus am meisten durch Sprungwellen gefährdet.

Digitized by Google

Darin ist zur Abkürzung

$$m = \sqrt{L_1 \cdot C_1 \cdot \left[n^2 + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1}\right)^2\right]} \qquad 11a)$$

gesetzt.

In den vorhergehenden Gleichungen sind A, B, n, a und b die willkürlichen Integrationskonstanten.

Wir gewinnen somit folgende Ausdrücke für Strom und Spannung auf unserer Leitung:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t) \cdot V' \qquad 12a)$$

$$i = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \left[n \cdot (B \cdot \sin n \cdot t - A \cdot \cos n \cdot t) + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1}\right) \cdot (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t)\right] \cdot V \qquad 12b)$$

Mit V' ist, wie allgemein üblich, die erste Ableitung der Funktion V bezeichnet.

Wir ersehen aus den Gl. (12), daß Spannung und Strom räumlich rein periodisch nach einer einfachen harmonischen Funktion, zeitlich nach einer gedämpften, einfachen harmonischen Funktion verlaufen; $\frac{n}{2 \cdot \pi}$ ist die Frequenz, $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ die Wellenlänge der Schwingung, α_1 ist die Dämpfungskonstante.

Die Konstanten A, B, a, b und n sind zunächst noch vollkommen willkürlich; da wir jeden beliebigen Wert für sie einsetzen können, geben uns die Gl. (12) eine unendlich große Zahl von partikulären Lösungen der Differentialgleichungen (5a) und (5b), die sich noch dadurch vermehrt, daß auch die Summe einer endlichen oder unendlichen Zahl solcher partikulären Lösungen eine Lösung unserer Differentialgleichungen darstellt; denn diese sind linear in bezug auf beide Variabeln und auf ihre Ableitungen. Wir haben demnach die vollständige Lösung unserer Differentialgleichungen in Form einer unendlichen Reihe von Funktionen darzustellen, deren einzelne Glieder die partikulären Lösungen (12) sind.

Für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse machen wir nur einen ganz unwesentlichen Fehler, wenn wir in den Gl. (11a) und (12b) die mit $\left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1}\right)$ multiplizierten Glieder gegenüber den mit n multiplizierten Gliedern vernachlässigen[1]); wir können dann die vollständige Lösung der Differentialgleichungen (5) in folgender Form anschreiben:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu, \qquad 13a)$$

$$i = C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu. \qquad 13b)$$

Die zwischen den Parametern m und n herrschende Beziehung (11a) geht über in:

$$m_\mu = \sqrt{L_1 \cdot C_1} \cdot n_\mu. \qquad 13c)$$

Spannung und Strom auf unserer Leitung setzen sich demnach aus einer einfachen harmonischen Schwingung und einer unendlichen Anzahl von Oberschwingungen zusammen; über die Frequenz und damit die Wellenlänge sowie über die Amplitude und Phase dieser Schwingungen dagegen ist uns noch nichts bekannt, da die Wahl der verschiedenen

[1]) K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908, S. 33 ff.

Die Vernachlässigung besteht im wesentlichen darin, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{n}{m}$ der Schwingungen als unabhängig von der Frequenz angesehen wird.

Digitized by Google

Konstanten noch vollständig in unserer Hand liegt. Wir werden sehen, daß die Frequenz und damit die Wellenlänge der verschiedenen Schwingungen nur von der Beschaffenheit der Leitung, auf welcher sie sich abspielen, abhängt. Denn durch die an den Leitungsenden herrschenden Grenzbedingungen werden dort gewisse Beziehungen zwischen der Funktion V und ihren Ableitungen eingeführt, die nur mit einer Reihe von besonderen Werten von m_μ in Einklang gebracht werden können. Diese Werte ergeben sich als die Wurzeln einer transzendenten Bestimmungsgleichung, die aus den eben erwähnten Beziehungen zwischen V_μ und V_μ' abgeleitet werden kann. Die Grenzbedingungen ergeben endlich noch ein Verhältnis zwischen den Konstanten a_μ und b_μ, d. h. die räumliche Phase, so daß die Funktionen V_μ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, der ohne weiteres gleich 1 gesetzt werden kann, da über die Konstanten A_μ und B_μ noch nicht verfügt ist. Die Amplitude und die zeitliche Phase der Schwingungen (gegeben durch die Konstanten A_μ und B_μ) dagegen hängen von den Strom- und Spannungswerten ab, von welchen wir bei der Behandlung irgendeines Problems auszugehen haben.

Bevor wir nun zur Behandlung besonderer Fälle übergehen, wollen wir uns darüber klar werden, inwieweit wir die Spannungen und Ströme auf unserer Leitung durch die Gl. (13) darstellen sollen. Denn wir sehen schon, daß diese Gleichungen nicht die geeignete Form besitzen, um stationäre Vorgänge durch sie darzustellen. Wir spalten deshalb Spannung und Strom in zwei Teile, deren einer den Dauerzustand angibt, während der andere die der Überleitung in diesen Dauerzustand dienenden Vorgänge darstellt, und wir schreiben nur diesen letzten Teil in Form der Gl. (13). Bezeichnen e_{s_1} und i_{s_1} den von vornherein herrschenden stationären Zustand I, e_{s_2} und i_{s_2} dagegen den Ruhezustand II, der eintritt, nachdem die durch irgendwelche Störungen hervorgerufenen Ausgleichsvorgänge abgelaufen sind, so müssen die übergelagerten Schwingungen e_f und i_f zur Zeit $t = 0$, welches der Zeitpunkt des Eintritts dieser Störungen sei, den folgenden Gleichungen genügen, um einen stetigen Anschluß des Zustandes I an den Zustand II zu ermöglichen:

$$\left.\begin{aligned} e_{s_1} &= e_{s_2} + e_f \\ i_{s_1} &= i_{s_2} + i_f \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0. \qquad 14)$$

Uns interessieren vor allem e_f und i_f, und auf sie allein wollen wir deshalb unsere Betrachtungen beschränken.

4. Die durch eine Drosselspule geschützte Wicklung unter dem Einflusse rechteckförmiger Wanderwellen. Wenn wir uns des im 2. Abschnitt abgeleiteten Satzes bedienen, so ergibt sich, daß wir uns bei der Behandlung des vorliegenden Problems auf das durch die Fig. 2 dargestellte Ersatzschema stützen können. Wie die Gl. (4) zeigt, bewirkt der Widerstand W erstens ein Abklingen der auftretenden Schwingungen mit wachsender Zeit t und zweitens eine Verringerung der Frequenz σ dieser Schwingungen; die Gl. (4) bezieht sich zwar auf einen reinen Thomsonschen Schwingungskreis, es ist indes einleuchtend, daß der Widerstand W bei der durch die Fig. 2 dargestellten Anordnung, wo außer der Grundschwingung noch eine unendliche Anzahl von Oberschwingungen möglich ist, eine ähnliche Wirkung ausüben wird.

Bei den praktisch in Frage kommenden Verhältnissen beeinflußt nun der Widerstand W die Frequenz nicht merklich; es genügt infolgedessen, denselben dadurch zu berücksichtigen, daß man eine zusätzliche Dämpfung $e^{-\frac{W}{2\cdot\lambda}\cdot t}$ einführt.

Nehmen wir z. B. an, die Schutzdrosselspule λ besitze einen Selbstinduktionskoeffizienten von 0,001 Henry, während die zu schützende Wicklung eine Kapazität von $C = 0{,}001 \cdot 10^{-6}$ Farad besitze. Der Widerstand W schwankt zwischen 50 (Kabel) und 500 (Freileitung). Die Gl. (4b) ergibt für diese Verhältnisse, wenn man zunächst vom Widerstand W absieht, eine Eigenschwingungszahl von $\sigma_0 = 1{,}59 \cdot 10^5\ \text{sec}^{-1}$; ein Widerstand

Digitized by Google

$W = 50\,\Omega$ vermag die Frequenz σ noch nicht merklich zu beeinflussen, und erst für $W = 500\,\Omega$ ergibt sich eine um ca. 3% niedrigere Frequenz.

Der Einfluß des Widerstandes W auf die Frequenz der Eigenschwingungen unserer Wicklung ist demnach nur ein sehr geringfügiger, und wir berücksichtigen denselben somit genügend durch Einführung der vorerwähnten zusätzlichen Dämpfung. Die Dämpfungskonstante α_1 der im vorigen Abschnitte abgeleiteten Gleichungen für Strom und Spannung geht infolgedessen über in:

$$\alpha = \frac{w_1}{2 \cdot L_1} + \frac{a_1}{2 \cdot C_1} + \frac{W}{2 \cdot \lambda}. \qquad 15)$$

Die zusätzliche Dämpfungskonstante $\frac{W}{2 \cdot \lambda}$ liegt im allgemeinen in der Größenordnung von α_1; wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß wir nur einen geringfügigen Fehler begehen, wenn wir den Einfluß des Widerstandes und der Ableitung auf den Verlauf von Strom und Spannung vernachlässigen, sofern wir nur den Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha_1 \cdot t}$ beibehalten. Dies ist uns folgerichtig auch jetzt noch gestattet, und zwar tun wir dies in der Weise, daß wir den Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha \cdot t}$ zunächst vernachlässigen und ihn erst den Schlußformeln für Strom und Spannung auf unserer Wicklung wieder beifügen.

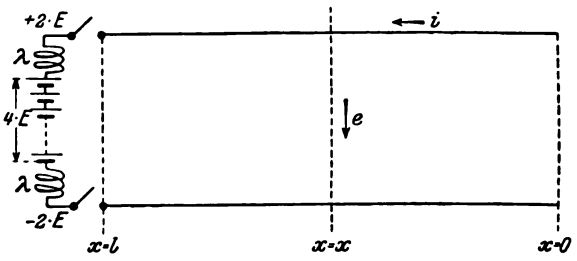


Fig. 3.

Wir können dann folgende Gleichungen für die freien, den Ausgleichsvorgang auf unserer Wicklung vermittelnden Schwingungen anschreiben:

$$e_f = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu, \qquad 16a)$$

$$i_f = C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu, \qquad 16b)$$

und unseren Untersuchungen das durch die Fig. 3 dargestellte vereinfachte Schema zugrunde legen.

Wir setzen voraus, daß wir es mit einer unter dem Einflusse atmosphärischer Störungen entstandenen Wanderwelle zu tun haben, deren Gegenladung somit in der Erde verläuft. Für diese Welle ist die Transformatorenwicklung in dem von Erde isolierten Nullpunkte offen, so daß für $x = o$ die Grenzbedingung gilt:

$$i_f = o \quad \text{für } x = o. \qquad 17a)$$

Nach Ablauf der im Zeitpunkte $t = o$ einsetzenden Ausgleichsvorgänge herrscht auf unserer Wicklung offenbar die Spannung $2 \cdot E$[1]); andererseits erhält die Spannungsquelle ihre Potentialdifferenz aufrecht, so daß im Punkte $x = l$ stets die Bedingung erfüllt sein muß:

$$2 \cdot E + e_f + \lambda \cdot \frac{\partial i_f}{\partial t} = 2 \cdot E.$$

Hieraus ergibt sich eine neue Grenzbedingung, nämlich:

$$e_f = -\lambda \cdot \frac{\partial i_f}{\partial t} \quad \text{für } x = l. \qquad 17b)$$

[1]) Da die Verhältnisse vollkommen symmetrisch liegen, betrachten wir nur die eine in Fig. 3 eingezeichnete Leitungshälfte und gehen von dem als unveränderlich betrachteten Spannungsnullpunkt aus.

Digitized by Google

Diese Grenzbedingungen müssen für alle Zeiten erfüllt sein. Aus (17a) folgt somit:

$$V_\mu(0) = 0. \tag{18}$$

Dies ist nur möglich, wenn sämtliche Konstanten b_μ verschwinden. Da ferner a_μ in der Funktion V_μ nur mehr als Faktor erscheint, und da endlich über die Konstanten A_μ und B_μ noch keine Bestimmung getroffen ist, können wir die a_μ unbedenklich gleich 1 setzen. Damit nimmt die Verteilungsfunktion V_μ die einfache Gestalt an:

$$V_\mu = \sin m_\mu \cdot x. \tag{18a}$$

Ferner wird:

$$V'_\mu = m_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x. \tag{18b}$$

Aus (17b) ergibt sich, wenn wir die Werte für Strom und Spannung aus den Gl. (16) einführen:

$$V'_\mu(l) = -m_\mu^2 \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(l). \tag{19}$$

Unter Beachtung der Gl. (18) und (18a) folgt hieraus weiter:

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}. \tag{20}$$

Dies ist eine transzendente Bestimmungsgleichung für die auf unserer Wicklung möglichen Wellenlängen. Man übersieht dieselbe am besten, wenn man ihre beiden Seiten als Kurven über der Abszisse $m_\mu \cdot l$ aufträgt, wie dies die Fig. 4 zeigt.

Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 ... dieser Kurven geben uns die Lösungen der Gl. (20); man erkennt, daß es eine unendliche Reihe positiver Wurzeln der Gl. (20) gibt, und daß diese das Gesetz befolgen:

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi + \varepsilon_\mu, \tag{20a}$$

wo ε_μ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und mit wachsender Ordnungszahl μ sich der Zahl Null unbegrenzt nähert. Die Reihe der Schwingungen, aus welchen sich Strom und Spannung auf unserer Wicklung zusammensetzen, ist demnach eine unharmonische.

Wir wollen nun zur Berechnung der Konstanten A_μ und B_μ schreiten[1]).

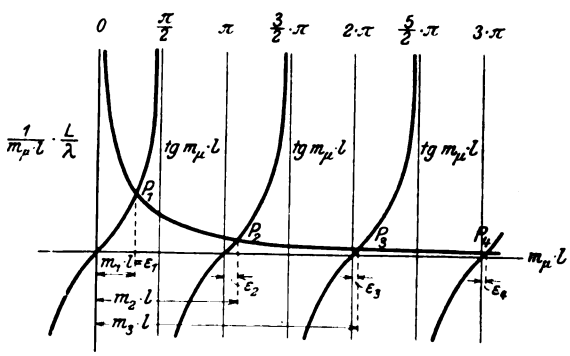


Fig. 4.

Vor der Zeit t = 0 war unsere Wicklung offenbar strom- und spannungslos, d. h. der Anfangszustand derselben ist gegeben durch:

$$e_{s_1} = 0,$$
$$i_{s_1} = 0.$$

Sind sämtliche freien Schwingungen abgelaufen, so herrscht auf der Wicklung eine Spannung $2 \cdot E$, der Strom ist Null. Unsere Wicklung strebt demnach folgendem Endzustande zu:

$$e_{s_2} = 2 \cdot E,$$
$$i_{s_2} = 0.$$

Nach Gl. (14) haben demnach die zur Zeit t = 0 einsetzenden freien Schwingungen folgende Anfangsbedingungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} e_f &= -2 \cdot E \\ i_f &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } t = 0 \tag{21}$$

[1]) Siehe hierzu Lord Rayleigh, Theory of Sound I, Nr. 92, S. 118. London 1894.

Digitized by Google

Die Gl. (16) stellen, sofern wir ihre Konstanten richtig bestimmen, die zu jeder beliebigen Zeit $t > 0$ auf unserer Wicklung herrschende Strom- und Spannungsverteilung dar. Gelingt es uns also, die Konstanten dieser Gleichungen so zu bestimmen, daß die letzteren den uns für irgendeinen Zeitpunkt bekannten elektrischen Schwingungszustand unserer Wicklung richtig beschreiben, so geben die Gl. (16) zweifellos auch für jeden späteren Zeitpunkt den Verlauf des Ausgleichsvorganges an, der sich bei den vorliegenden Grenzbedingungen aus der vorausgegangenen Strom- und Spannungsverteilung entwickelt. Nun sind uns für den Zeitpunkt $t = 0$ die Strom- und Spannungsverhältnisse, welchen sich die Gleichungen für e_f und i_f anzupassen haben, bekannt, und wir bedienen uns deshalb der Gl. (21) zur Bestimmung der uns noch fehlenden Konstanten A_μ und B_μ. Führen wir in diese Gleichung die Werte für e_f und i_f aus den Gl. (16) ein, wobei wir zu beobachten haben, daß $t = 0$ ist, so ergibt sich:

$$-2 \cdot E = B_1 \cdot V_1' + B_2 \cdot V_2' + B_3 \cdot V_3' + \ldots + B_\nu \cdot V^\nu + \ldots \qquad 22a)$$

$$0 = -C_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - C_1 \cdot n_2 \cdot A_2 \cdot V_2 - \ldots - C_1 \cdot n_\nu \cdot A_\nu \cdot V_\nu - \ldots \qquad 22b)$$

Wir haben also die Aufgabe, die Konstanten einer unendlichen Reihe der Funktionen V_μ bzw. deren Ableitungen so zu bestimmen, daß dieselben eine vorgegebene Funktion richtig darstellen. Das Verfahren hierzu wurde zuerst von Fourier angegeben.

Soll etwa der Koeffizient B_μ des μ-ten Gliedes der Reihe 22a) bestimmt werden, so ist dieselbe beiderseits mit $V_\mu' \cdot dx$ zu multiplizieren und zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integrieren. Dies ergibt:

$$-2 \cdot E \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx. \qquad 23)$$

Zur Auswertung der auf der rechten Seite stehenden Reihe bedienen wir uns gewisser Eigenschaften der den Wurzeln der Gl. (20) zugeordneten Funktionen V, die wir im folgenden ableiten wollen.

Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktionen V lautet etwa für den ν-ten Oberton:

$$V_\nu'' + m_\nu^2 \cdot V_\nu = 0.$$

Durch Multiplikation mit $V_\mu \cdot dx$ und Integration zwischen 0 und 1 folgt:

$$\int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu'' \cdot dx = -m_\nu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx.$$

Auf der linken Seite der Gleichung läßt sich die Integration partiell ausführen, man erhält dann weiter:

$$-m_\nu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx + \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (V_\mu \cdot V_\nu')_1 - (V_\mu \cdot V_\nu')_0.$$

Durch ganz analoge Betrachtungen, bei welchen wir jedoch diesmal vom μ-ten Oberton ausgehen wollen, ergibt sich ferner:

$$-m_\mu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx + \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (V_\nu \cdot V_\mu')_1 - (V_\nu \cdot V_\mu')_0.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen erhält man nun:

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx = (V_\mu \cdot V_\nu' - V_\nu \cdot V_\mu')_1 - (V_\mu \cdot V_\nu' - V_\nu \cdot V_\mu')_0 \qquad 24a)$$

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (m_\mu^2 \cdot V_\mu \cdot V_\nu' - m_\nu^2 \cdot V_\nu \cdot V_\mu')_1 - (m_\mu^2 \cdot V_\mu \cdot V_\nu' - m_\nu^2 \cdot V_\nu \cdot V_\mu')_0 \qquad 24b)$$

Digitized by Google

Wir können aus diesen Gleichungen nun folgendes entnehmen: Um das bestimmte Integral des Produkts zweier Verteilungsfunktionen V oder dasjenige des Produktes ihrer ersten Ableitungen berechnen zu können, braucht man lediglich die Werte der Verteilungsfunktionen und ihrer ersten Ableitungen an den Integrationsgrenzen zu kennen. Dort sind uns nämlich durch die Gl. (18) und (19) gewisse, für diese letzteren Funktionen gültige Beziehungen gegeben, und aus diesem Grunde hatten wir gerade die Wicklungsenden $x = 0$ und $x = 1$ als Integrationsgrenzen angenommen.

Führen wir die Gl. (18) und (19) in die Gl. (24b) ein, so folgt:

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = 0 .$$

Hieraus kann, solange μ und ν verschieden sind, die weitere Folgerung gezogen werden:

$$\int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = 0 . \qquad 25)$$

In Gl. (23) verschwinden also sämtliche Glieder der rechten Seite[1]) mit Ausnahme des-

[1]) Es liegt der Fall nicht immer so einfach, daß die rechte Seite der Gl. (24b) verschwindet. Je nach den vorhandenen Grenzbedingungen kann Gl. (24b) nach Einführung derselben folgende Gestalt annehmen:

$$\int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = b_1 \cdot V'_\mu (1) \cdot V'_\nu (1) + b_2 \cdot V'_\mu (0) \cdot V'_\nu (0) . \qquad 25a)$$

Hierin sind b_1 und b_2 konstante Größen, welche von den gegebenen Grenzbedingungen abhängen.

Wir dürfen nun in Gl.)23) für alle Werte $\nu \neq \mu$ die auf der rechten Seite stehenden bestimmten Integrale durch deren Werte aus Gl. (25a) ersetzen, nur für $\nu = \mu$ besteht die Gl. (25a) nicht. Wir erhalten somit, wenn wir außerdem noch einen allgemeinen Ausdruck $\varphi(x)$ für die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Spannungsverteilung einführen:

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot V'_\mu \cdot dx = b_1 \cdot V'_\mu (1) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \cdot V'_\nu (1) + b_2 \cdot V'_\mu (0) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \cdot V'_\nu (0)$$
$$+ B_\mu \cdot \left[\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx - b_1 \cdot V'^2_\mu (1) - b_2 \cdot V'^2_\mu (0) \right]. \qquad 25b)$$

Nun ist nach Gl. (22a):

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \cdot V'_\nu (1) = \varphi (1) ,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \cdot V'_\nu (0) = \varphi (0) .$$

Damit erhält man nun aus Gl. (25b):

$$B_\mu = \frac{\int_0^1 \varphi(x) \cdot V'_\mu \cdot dx - b_1 \cdot \varphi (1) \cdot V'_\mu (1) - b_2 \cdot \varphi (0) \cdot V'_\mu (0)}{\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx - b_1 \cdot V'^2_\mu (1) - b_2 \cdot V'^2_\mu (0)} . \qquad 25c)$$

Indem man b_1 und b_2 gleich Null setzt, nimmt diese Gleichung die einfachere Gestalt der Gl. (26a) an; man sieht also, die speziellen Voraussetzungen unseres Beispiels sind in der allgemeinen Lösung enthalten.

Auf ganz ähnlichem Wege ergeben sich übrigens die Konstanten A_μ zu:

$$A_\mu = -\frac{1}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\int_0^1 \psi(x) \cdot V_\mu \cdot dx - a_1 \cdot \psi (1) \cdot V_\mu (1) - a_2 \cdot \psi (0) \cdot V_\mu (0)}{\int_0^1 V_\mu^2 \cdot dx - a_1 \cdot V_\mu^2 (1) - a_2 \cdot V_\mu^2 (0)} . \qquad 25d)$$

Hierin sind a_1 und a_2 konstante Größen, welche auf der rechten Seite der Gl. (24a) nach Einführung der Grenzbedingungen auftreten, $\psi(x)$ bedeutet die Stromverteilung zur Zeit $t = 0$.

Digitized by Google

jenigen, bei welchem $\nu = \mu$ ist; die Konstante B_μ ergibt sich somit zu:

$$B_\mu = -2 \cdot E \cdot \frac{\int_0^1 V'_\mu \cdot dx}{\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx}. \qquad 26a)$$

Aus (22b) ersieht man ohne weiteres, daß

$$A_\mu = 0. \qquad 26b)$$

Ersetzen wir in (26a) die V_μ' durch ihren Wert aus Gl. (18b), so erhalten wir, wenn wir die Integration ausführen, folgende Gleichung für die Konstanten B_μ:

$$B_\mu = -\frac{4 \cdot E}{m_\mu} \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gl. (16) ergeben sich, wenn wir noch den Dämpfungsfaktor hinzunehmen, die Gleichungen für Strom und Spannung auf unserer Wicklung endlich in folgender Gestalt:

$$e_f = -e^{-\alpha \cdot t} \cdot 4 \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot x \cdot \cos n_\mu \cdot t. \qquad 27a)$$

$$i_f = -e^{-\alpha \cdot t} \cdot 4 \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \sin n_\mu \cdot t. \qquad 27b)$$

Diese Gleichungen lassen sich indes bedeutend übersichtlicher schreiben, wenn wir uns der folgenden trigonometrischen Regeln erinnern, wobei wir

$$n_\mu = \frac{m_\mu}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}} = m_\mu \cdot v$$

setzen:

$$\cos m_\mu \cdot x \cdot \cos m_\mu \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x - v \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x + v \cdot t)$$

$$\sin m_\mu \cdot x \cdot \sin m_\mu \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x - v \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x + v \cdot t).$$

Es ergibt sich nämlich:

$$\left.\begin{aligned} e_f &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \\ i_f &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

Hierin ist das Funktionszeichen F nur eine Abkürzung; es ist:

$$F(\xi) = -2 \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi. \qquad 28a)$$

ξ bedeutet entweder das Argument $x - v \cdot t$ oder das Argument $x + v \cdot t$.

Wir können der Gl. (28) folgendes entnehmen:

Spannung und Strom setzen sich aus je zwei Wellenzügen zusammen, deren Form durch die Gl. (28a) gegeben ist. Die Spannungswellen liegen so zueinander, daß sie sich zur Zeit $t = 0$ gerade decken, während die Stromwellen, welche sich von den Spannungs-

Digitized by Google

wellen nur durch den Proportionalitätsfaktor $\pm\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ unterscheiden, sich zur Zeit $t = o$ vollkommen vernichten, wie dies denn auch die Anfangsbedingungen (21) erfordern. Das Argument $x - v \cdot t$ ändert sich nicht, wenn t etwa um t_1 und x gleichzeitig um $v \cdot t_1$ wächst; d. h. ein Funktionswert, der zur Zeit t im Punkte x vorhanden war, erscheint t_1 Sekunden später wieder in einem Punkte mit der Abszisse $x + v \cdot t_1$. Dies gilt natürlich für alle Funktionswerte, und wir sehen somit, daß sich die Funktion $F(x - v \cdot t)$ mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ im Sinne wachsender x längs unserer Wicklung hin bewegt. Ebenso findet man, daß die Funktion $F(x + v \cdot t)$ sich mit derselben Geschwindigkeit, jedoch in entgegengesetzter Richtung fortbewegt. Die Wellenzüge, aus welchen sich Spannung und Strom zusammensetzen, eilen demnach mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzten Richtungen längs unserer Wicklung hin, wobei sie, abgesehen von der durch den Faktor $e^{-\alpha \cdot t}$ gegebenen zeitlichen Dämpfung ihre Gestalt unverändert beibehalten.

Zur Darstellung der zu irgendeiner beliebigen Zeit auf unserer Wicklung herrschenden Strom- und Spannungsverteilung erübrigt sich nur noch die Bestimmung der Wellenform $(F\,\xi)$. Dieselbe hängt, wie aus Gl. (28a) ersichtlich ist, nur von der Reihe der m_μ ab, und diese sind ihrerseits durch das Verhältnis L/λ völlig bestimmt.

Der Versuch, die Wellenform $F(\xi)$ auf direktem Wege durch Ausrechnung nach Gl. (28a) ermitteln zu wollen, würde wegen der im allgemeinen schlechten Konvergenz dieser Reihe nicht zum Ziele führen. Wir müssen vielmehr einen Umweg beschreiten und wollen uns zu diesem Zwecke des folgenden Kunstgriffes bedienen.

Wir ersahen aus der Fig. 4, daß die $m_\mu \cdot l$ sich für wachsende Ordnungszahlen μ ganzen Vielfachen der Zahl π nähern, und zwar tritt diese Erscheinung um so früher ein, je schneller die Hyperbel $\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}$ der Abszissenachse zustrebt, d. h. je kleiner der Parameter $\frac{L}{\lambda}$ ist. So kann bei $\frac{L}{\lambda} < 1$ schon von $\mu = 2$ ab der Winkel ε_μ vernachlässigt werden, ohne daß man dadurch einen beträchtlichen Fehler begeht. Wir wollen nun im folgenden eine Näherungsformel für die Funktion $F(\xi)$ ableiten und werden dabei von der Voraussetzung ausgehen, daß die ε_μ für höhere Ordnungszahlen μ kleine Winkel sind.

Wir spalten zu diesem Zwecke die Funktion $F(\xi)$ in eine Grundwelle

$$G(\xi) = -2 \cdot E \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot \xi \qquad 29a)$$

und in eine Funktion

$$H(\xi) = -2 \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot l} \cdot \cos m_k \cdot \xi, \qquad 29b)$$

welche die Gesamtheit der Oberschwingungen enthält. Es ist in (29b)

$$k = \mu - 1$$

gesetzt; wir haben nach Gl. (20a)

$$m_k \cdot l = k \cdot \pi + \varepsilon_k,$$

und zwar kann hierin laut Voraussetzung ε_k als kleiner Winkel behandelt werden. In diesem Falle ergibt sich der Winkel ε_k aus Gl. (20) zu:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{L}{\lambda},$$

Digitized by Google

und damit wird:

$$m_k = \frac{k \cdot \pi}{l} + \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{L}{l \cdot \lambda}. \qquad 30a)$$

Nun ergibt sich, da ε_k doch ein kleiner Winkel ist:

$$\cos m_k \cdot \xi = \cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l} - \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{\xi}{l} \cdot \sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}. \qquad 30b)$$

Da ferner:

$$\sin m_k \cdot l = (-1)^k \cdot \sin \varepsilon_k = (-1)^k \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi}$$

und

$$m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot l = m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \varepsilon_k = \sim k \cdot \pi$$

erhalten wir noch:

$$\frac{\sin m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_k \cdot l} = \frac{(-1)^k}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{L}{\lambda}. \qquad 30c)$$

Nun können wir die Funktion $H(\xi)$ folgendermaßen anschreiben:

$$\overline{H}(\xi) = -2 \cdot E \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^2} - \frac{L \cdot \xi}{\lambda \cdot \pi \cdot l} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3} \right] \cdot \frac{1}{\pi^2}. \qquad 31$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Klammer enthält die Differenz zweier Fourierscher Reihen, die ohne weiteres summiert werden können. Es ist:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^2} = \frac{\left(\pi \cdot \frac{\xi}{l}\right)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

gültig im Bereiche:

$$-\pi < \pi \cdot \frac{\xi}{l} \leq +\pi \; ^1)$$

bzw.

$$-l < \xi \leq +l.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3} = \frac{\left(\pi \cdot \frac{\xi}{l}\right)^3}{12} - \frac{\xi}{l} \cdot \frac{\pi^3}{12},$$

ebenfalls gültig im Intervall:

$$-l \leq \xi \leq +l.$$

Mit diesen Summenformeln geht die Gl. (31) über in:

$$\overline{H}(\xi) = \frac{E}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{\xi}{l}\right)^2 + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{l} \cdot \left\{ \left(\frac{\xi}{l}\right)^3 - \frac{\xi}{l} \right\} \right] \qquad 31a)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(\xi) + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{l} \cdot H_2(\xi) \right).$$

Diese Gleichung ist nun verhältnismäßig einfach auszuwerten; die Funktion $H_1(\xi)$ ergibt im Bereiche $-l \leq \xi \leq +l$ einen symmetrisch zu $x = o$ liegenden Parabelbogen,

[1]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, § 33, Gl. 6. (Braunschweig 1910.)

Digitized by Google

und zu diesem addiert sich die durch die Funktion $\frac{L}{\lambda}\cdot\frac{\xi}{l}\cdot H_2(\xi)$ dargestellte Wellenlinie. $H_2(\xi)$ ist uns ebenfalls nur im Bereiche $-1 \leqq \xi \leqq +1$ gegeben. Außerhalb des angegebenen Bereiches findet man den Wert der Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ durch die Überlegung, daß der Wert der unendlichen Reihen

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\cdot\frac{\cos k\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{l}}{k^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k\cdot\frac{\sin k\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{l}}{k^3}$$

sich nicht ändert, wenn das Argument $\pi\cdot\frac{\xi}{l}$ um ganzzahlige Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert wird. Um also die Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ über das Intervall $-1 \leqq \xi \leqq +1$ hinaus fortzusetzen, braucht man nur die für dieses Intervall gefundenen Kurven aneinanderzureihen, wie dies die Figuren 6b und 6c zeigen.

Wir haben nun in

$$\overline{F}(\xi) = G(\xi) + \overline{H}(\xi) \qquad 32)$$

zunächst eine Näherungsformel für die Form der Funktion $F(\xi)$ abgeleitet, welche diese, solange der Parameter $\frac{\lambda}{L}$ nicht sehr beträchtlich wird, mit genügender Genauigkeit abbildet.

Die Abweichung des Näherungswertes $\overline{F}(\xi)$ von dem genauen Werte der Funktion $F(\xi)$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$F(\xi) = \overline{F}(\xi) + D(\xi)$$

zu:

$$D(\xi) = -2\cdot E\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{\sin m_k\cdot l}{m_k\cdot l+\frac{1}{2}\cdot\sin 2\cdot m_k\cdot l}\cdot\cos m_k\cdot\xi-\frac{L}{\lambda}\cdot(-1)^k\cdot\frac{\cos k\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{l}}{k^2\cdot\pi^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2\cdot\frac{\xi}{l}\cdot(-1)^k\cdot\frac{\sin k\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{l}}{k^3\cdot\pi^3}\right]. \qquad 33)$$

Diese Reihe konvergiert nun unvergleichlich viel besser als die durch die Gl. (28a) dargestellte unendliche Reihe. Dies hat seinen Grund darin, daß die Glieder der Reihe für $H(\xi)$ sich dem Werte entsprechender Glieder der Reihe (28a) um so mehr nähern, je höher man in der Ordnungszahl dieser Glieder geht; das heißt aber nichts anderes, als daß die Glieder der Reihe für $D(\xi)$ mit wachsender Ordnungszahl k sehr schnell abnehmen und bald verschwindend klein werden.

Wir haben somit die Funktion $F(\xi)$ gemäß der Gleichung:

$$F(\xi) = G(\xi) + \overline{H}(\xi) + D(\xi) \qquad 34)$$

in eine Summe einzelner Funktionen zerlegt, deren Glieder, solange das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht etxrem groß wird, verhältnismäßig leicht berechnet werden können.

5. Der Einfluß des Verhältnisses $\frac{L}{\lambda}$ auf die Form der Funktion $F(\xi)$. Im Vorhergehenden wurde gezeigt, daß die Form der Funktion $F(\xi)$ und damit der Verlauf des zur Zeit $t = 0$ einsetzenden, auf unserer Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorganges nur durch die Größe des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ bestimmt wird. Wir gewinnen einen schnellen

Digitized by Google

Überblick über die Änderungen der Form der Funktion $F(\xi)$, welche diese mit wechselnden Werten des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ erleidet, wenn wir zunächst den Verlauf von $F(\xi)$ für die beiden Extremfälle $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $\frac{L}{\lambda} = \infty$ betrachten.

Man kann leicht zeigen, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi$$

für $\frac{L}{\lambda} = 0$ den konstanten Wert $+\frac{1}{2}$ annimmt, d. h. es wird:

$$F(\xi) = -E \qquad \text{für } \frac{L}{\lambda} = 0. \tag{35}$$

Nimmt $\frac{L}{\lambda}$ dagegen den Wert unendlich an, so rückt die in der Fig. 4 eingezeichnete Hyperbel nach oben, sie geht in eine gerade Linie mit dem Abstande $+\infty$ von der Abszissenachse über, und die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 ... fallen in die durch die Punkte $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2} \cdot \pi$, $\frac{5}{2} \cdot \pi$ ... gezogenen Senkrechten. Die Gl. (20a) geht somit über in:

$$m_\mu \cdot l = \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi$$

und damit nimmt die unendliche Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi$$

den Wert

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2 \cdot \mu - 1} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi$$

an. Wir gewinnen somit folgenden Ausdruck für die Funktion $F(\xi)$:

$$F(\xi) = -\frac{4}{\pi} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2 \cdot \mu - 1} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi \qquad \text{für } \frac{L}{\lambda} = \infty. \tag{36}$$

Dies ist der Ausdruck für eine symmetrisch zu $\xi = 0$ liegende Rechteckswelle mit dem Scheitelwerte E und der Länge $4 \cdot l$.

Die Fig. 5 veranschaulicht die beiden Grenzformen, zwischen welchen sich die Funktion $F(\xi)$ äußerstenfalls bewegen kann. Man erkennt sofort, daß beide Kurvenzüge die Anfangsbedingung, nämlich

$F(\xi) = -E$

für $-1 < \xi < +1$

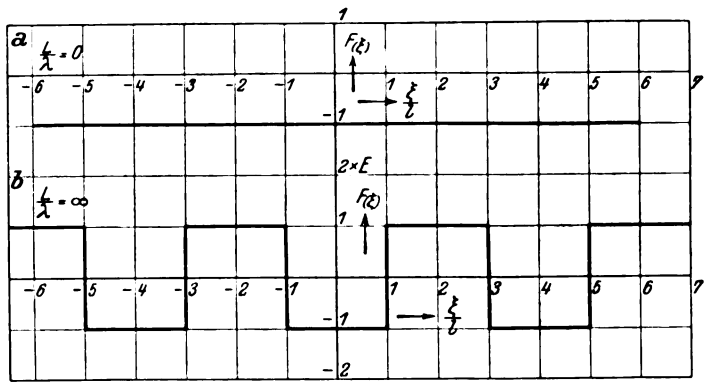


Fig. 5.

Digitized by Google

erfüllen. Die eben gewonnenen Ergebnisse werden sich überhaupt am besten überblicken lassen, wenn wir uns die physikalische Bedeutung derselben klarmachen.

Die Funktion F (ξ) ist nach Gl. (28a) eine gerade Funktion, d. h. es ist stets

$$F(\xi) = F(-\xi).$$

Wenn wir vom Dämpfungsfaktor absehen, ergibt sich demnach aus Gl. (28):

$$e_{f\,x=o} = F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) = 2 \cdot F(v \cdot t).$$

Im Punkte $x = o$ herrscht somit jederzeit eine Spannung:

$$e_{x=o} = 2 \cdot E + 2 \cdot F(v \cdot t). \qquad 37)$$

Das heißt: Die Funktion F (ξ) ergibt, wenn man von der zeitlichen Dämpfung absieht, im doppelten Maßstabe aufgetragen und um den Betrag $+ 2 \cdot E$ in Richtung der Ordinatenachse verschoben, die jederzeit am Ende unserer Wicklung herrschende Spannung.

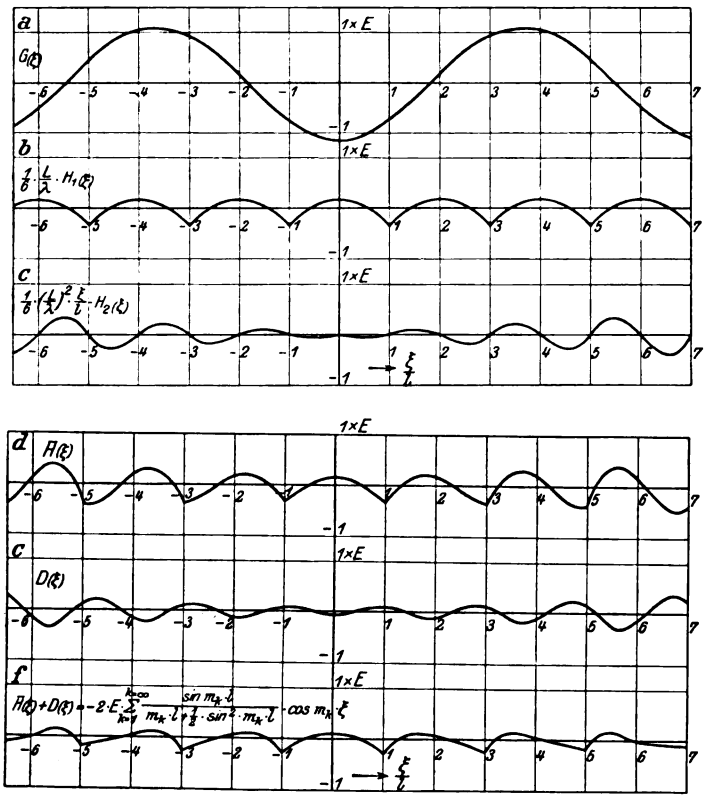


Fig. 6.

Im Falle $\frac{L}{\lambda} = o$ bleibt demnach der Punkt $x = o$ dauernd spannungslos, d. h. eine unendlich große Selbstinduktion λ würde unsere Wicklung von der Freileitung elektrisch vollkommen trennen. Die dem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = \infty$ (d. h. $\lambda = o$) zugeordnete Funktion F (ξ) hingegen ist mit der charakteristischen Einschaltschwingung einer Leitung (Schaltspannung $= 2 \cdot E$) identisch[1]).

Fig. 6 veranschaulicht den Gang der Berechnung der Funktion F (ξ) auf Grund des im vorigen Abschnitte entwickelten Näherungsverfahrens, und zwar

[1]) In diesem letzteren Falle wird $\frac{W}{2 \cdot \lambda} = \infty$, d. h. der Dämpfungsfaktor

$$e^{-\alpha \cdot t}$$

nimmt dauernd den Wert Null an, so daß also eine physikalische Deutung der Gl. (36) eigentlich keinen rechten Sinn hat. Es ist indes zu bedenken, daß wir bei der Ableitung des Ersatzschemas die Transformatorenwicklung uns im Punkte $x = o$ konzentriert dachten, so daß also der Dämpfungsfaktor

$$e^{-\frac{W}{2 \cdot \lambda} \cdot t}$$

streng genommen nur im Punkte $x = o$ Berechtigung hat. Nur solange $\frac{W}{2 \cdot \lambda}$ keine große Zahl wird, begehen wir durch Hinzunahme des eben angeschriebenen Dämpfungsfaktors zu den Gl. (28) keinen allzu großen Fehler.

Digitized by Google

wurde ein Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$ zugrunde gelegt. Für die Grundwelle ergibt sich, am einfachsten auf graphischem Wege, eine Amplitude von $-1{,}12 \cdot E$. Die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$, welche bei Vernachlässigung der Winkel ε_μ (derselbe beträgt im vorliegenden Falle für $\mu = 2$ immerhin noch $\varepsilon_\mu = 0{,}16$) die Gesamtheit der Oberwellen enthält, ergibt eine Reihe von Parabelbögen, deren Ordinaten zwischen $+ 0{,}167 \cdot E$ und $-0{,}333 \cdot E$ schwanken. Die Summe

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

weicht im Bereiche $-1 < \frac{\xi}{l} < +1$ von dem Werte $-E$, welchen die Anfangsbedingung erfordert, nirgends um mehr als ca. 6% ab, sie kommt also der Funktion $F(\xi)$ schon ziemlich nahe. Das Korrektionsglied

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\xi}{l} \cdot H_2(\xi)$$

nimmt mit wachsender Abszisse $\frac{\xi}{l}$ verhältnismäßig bedeutende Werte an, man sieht aber auch, daß es den Löwenanteil zur Funktion $D(\xi)$, welche die Abweichung der Näherungsfunktion $\overline{F}(\xi)$ von der wahren Funktion $F(\xi)$ angibt, beisteuert. Es ist somit, sobald man die Funktion $F(\xi)$ für höhere Werte von $\frac{\xi}{l}$ zu bilden hat und man sich mit der durch die Funktion

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

gegebenen Näherung nicht begnügen will, stets ratsam, die Funktion $D(\xi)$ zu berechnen; da die einzelnen Glieder dieser Reihe sehr schnell konvergieren, wird es häufig genügen, nur das erste Glied derselben zu berücksichtigen.

Bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 0{,}2$ können, da die Winkel ε_μ gemäß nachstehender Tabelle für $\mu > 1$ sehr klein werden, die Teilfunktionen

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\xi}{l} \cdot H_2(\xi) \text{ und } D(\xi)$$

bereits ohne weiteres vernachlässigt werden.

μ	ε_μ	μ	ε_μ
1	0,433	4	0,021
2	0,062	5	0,016
3	0,032	6	0,013

Selbst die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$ spielt gegenüber der Grundwelle nur mehr die Rolle eines Korrektionsgliedes. Es ergibt sich nämlich die Amplitude der Grundwelle $G(\xi)$ zu $-1{,}032 \cdot E$, während die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$ zwischen den Grenzen

$$+ 0{,}0334 \cdot E\left(\frac{\xi}{l} = 0\right) \text{ und } -0{,}0667 \cdot E\left(\frac{\xi}{l} = 1\right)$$

Digitized by Google

eingeschlossen ist. Die Summe

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

weicht innerhalb des Intervalls $-1 < \frac{\xi}{l} < +1$ von dem konstanten Betrage $-E$ nirgends mehr als etwa $^1/_{1000}$ ab, sie bildet also die Funktion $F(\xi)$ bereits mit großer Genauigkeit nach.

Die Fig. 7, 8 und 9 zeigen in interessanter Weise die Veränderungen, welche die Funktion $F(\xi)$ mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ erleidet. Während die Höhe der Grundschwingung durch das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ wenig beeinflußt wird (sie schwankt zwischen $-E$ für $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $-\frac{4}{\pi} \cdot E$ für $\frac{L}{\lambda} = \infty$), ist die Wellenlänge derselben großen Veränderungen unterworfen; bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 0$ ergibt sich nämlich eine unendlich große Wellenlänge, während diese mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ kleiner wird und im Grenzfalle $\frac{L}{\lambda} = \infty$ auf $4 \cdot l$ zusammenschrumpft. Die höheren Harmonischen verhalten sich gerade entgegengesetzt. Ihre Wellenlänge wird durch die Größe des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ wenig beeinflußt,

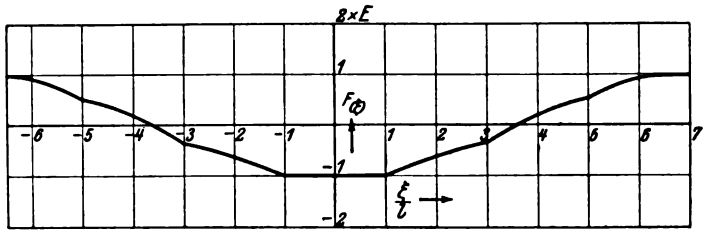


Fig. 7.

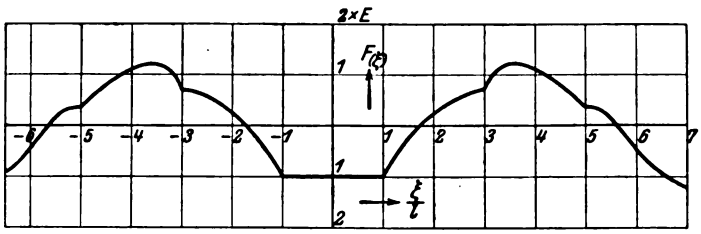


Fig. 8.

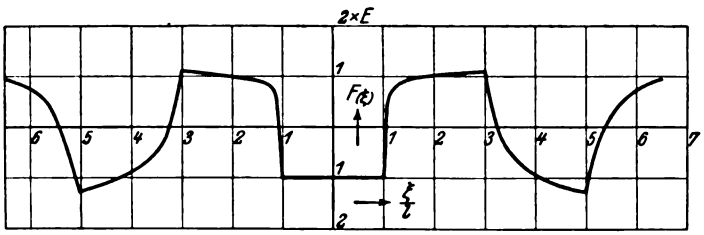


Fig. 9.

um so mehr dagegen ihre Amplitude; diese nimmt, wie ein Blick auf die Fig. 4 zeigt, mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ ebenfalls stark zu. So kommt es, daß bei niedrigen Werten von $\frac{L}{\lambda}$ die Grundwelle $G(\xi)$ von ausschlaggebender Bedeutung für die Form der Funktion $F(\xi)$ wird, während ihr Einfluß mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ mehr zurücktritt. Die durch die Fig. 7 gezeigte Kurve weicht verhältnismäßig wenig von der Sinusform ab, dagegen zeigt die Kurve Fig. 8 schon starke Deformationen, auch sieht man deutlich, wie die Wellenlänge der Grundwelle schon abgenommen hat. In der Fig. 9 ist schlechterdings die Grundschwingung $G(\xi)$ nicht mehr zu erkennen, ihre Amplitude beträgt hier $-1{,}25 \cdot E$, ihre Wellenlänge hat von $14{,}5 \cdot l$ bei $\frac{L}{\lambda} = 0{,}2$ bereits auf $4{,}5 \cdot l$ abgenommen. Die Funktion

Digitized by Google

$F(\xi)$ zeigt im letzten Falle $\left(\frac{L}{\lambda} = 5\right)$ bereits große Ähnlichkeit mit der in der Fig. 5 dargestellten Rechtecksschwingung, von der sie sich in der Hauptsache nur mehr durch die abgerundeten Ecken unterscheidet. Man erkennt somit deutlich den Einfluß der Selbstinduktion, welche unstetige Strom- und Spannungssprünge unterdrückt.

6. Räumlicher und zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung an verschiedenen Stellen der zu schützenden Wicklung. Die Intensität der Spannung und des Stromes auf unserer Wicklung erleidet im Verlaufe des auf derselben sich abspielenden Ausgleichsvorganges aus verschiedenen Gründen eine allmähliche Abnahme. Dies kommt in den Gl. (28) durch das Auftreten eines Dämpfungsfaktors

$$e^{-\alpha \cdot t}$$

zum Ausdruck, mit diesem ist die Funktion $F(\xi)$ zu multiplizieren. Durch die Substitution

$$t = \pm \frac{\xi \mp l}{v}$$

gelingt es, den Dämpfungsfaktor in eine Ortsfunktion zu verwandeln, so daß die Multiplikation nun ohne weiteres ausgeführt werden kann. Es ergibt sich nämlich

$$e^{-\alpha \cdot t} = e^{\mp \alpha \cdot L \cdot \frac{1}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{l} \mp 1\right)} \qquad 38)$$

oder, wenn man von den Verlusten absieht, einfacher

$$e^{-\alpha \cdot t} = e^{\mp \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{W}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{l} \mp 1\right)} \qquad 38a)$$

Hierin bedeutet Z den Wellenwiderstand der zu schützenden Wicklung. Will man also bei irgendwelchen Untersuchungen den Einfluß der zeitlichen Dämpfung mit berücksichtigen, so braucht man nur statt der Funktion $F(\xi)$ eine neue Funktion

$$\overline{\overline{F}}(\xi) = F(\xi) \cdot e^{\mp \alpha \cdot L \cdot \frac{1}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{l} \mp 1\right)} \qquad 39)$$

in die Rechnung einzuführen.

Strom und Spannung auf unserer Wicklung setzen sich, wie wir gesehen, aus zwei Wellenzügen $F(\xi)$ zusammen, welche sich mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ in entgegengesetzter Richtung längs derselben hinbewegen und welche zur Zeit $t = o$ so liegen, daß sie die Anfangsbedingungen erfüllen, d. h. die Stromwellen, welche sich übrigens von den Spannungswellen noch durch einen Proportionalitätsfaktor $\left(\pm \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\right)$ unterscheiden, heben sich gerade auf, während sich die Spannungswellen gerade decken; da wir nicht nur die übergelagerten, sondern die tatsächlich vorhandenen Ströme und Spannungen betrachten wollen, haben wir zu den beiden, die Spannung darstellenden Wellenzügen noch einen konstanten Betrag $+ 2 \cdot E$ zu addieren. Aus vorstehendem ergibt sich nun ohne weiteres der Weg zur Darstellung des räumlichen Verlaufs von Strom und Spannung auf unserer Wicklung. Um die zu irgendeinem Zeitpunkt T längs unserer Wicklung herrschende Spannungsverteilung zu ermitteln, hat man nur die Funktion $F(\xi)$ über der um den Betrag E in Richtung wachsender Ordinaten verschobenen Abszissenachse zweimal aufzutragen, die eine Funktion längs der Abszissenachse um den Betrag $+ v \cdot T$, die andern um den Betrag $- v \cdot T$ zu verschieben und die Ordinaten zu addieren. Die so entstehende Kurve ergibt im Bereiche $o \leqq x \leqq l$ die vorhandene Spannungsverteilung. Ähnlich hat man zur Darstellung des Stromverlaufes zu verfahren, nur fällt hier die Verschiebung der Abszissenachse weg, ferner hat man die eine

Digitized by Google

Funktion mit dem Faktor $+\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$, die andere Funktion mit dem Faktor $-\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ zu multiplizieren.

Nach dieser Vorschrift wurde bei Anfertigung der Fig. 10 verfahren, welche das Eindringen einer ursprünglich rechtecksförmigen Wanderwelle von der Höhe E in die durch eine Drosselspule geschützte Wicklung veranschaulicht; es wurde vorausgesetzt, daß sich die gesamte Selbstinduktion der zu schützenden Wicklung zu der der Schutzdrosselspule wie 5 : 1 verhalte, die Selbstinduktion der letzteren betrage 0,001 Henry, der Wellenwiderstand der vor der Wicklung liegenden Leitung 50 Ω, die Wicklung besitze außerdem noch eine gesamte Kapazität von $0{,}001 \cdot 10^{-6}$ Farad. Die Verlustdämpfung wurde nicht berücksichtigt.

Man sieht, wie eine Welle mit der Höhe $2 \cdot E$ und abgeflachter Stirn in die Wicklung wandert; die Schutzdrosselspule hat die steile Stirn der ankommenden Wanderwelle gebrochen, sie konnte aber nicht verhindern, daß infolge von Reflexionserscheinungen

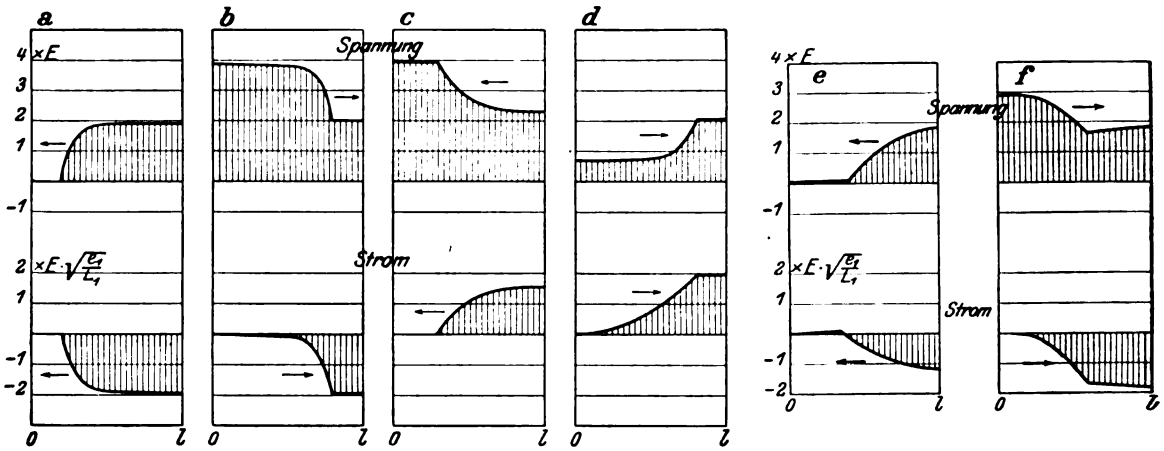


Fig. 10.

die Spannung der Wicklung auf den Betrag von $2 \cdot E$ ansteigt. Diese in die Wicklung eindringende Welle wird nun am offenen Ende derselben unter Beibehaltung des Vorzeichens vollkommen reflektiert, so daß eine weitere Erhöhung der Spannung auf $4 \cdot E$ eintritt, die Stirn der reflektierten Welle behält ihre ursprüngliche Form unverändert bei. Die Reflexion der Stromwelle erfolgt hingegen unter Umkehrung des Vorzeichens. Vom Zeitpunkte $v \cdot t = 2 \cdot l$ an, in welchem fast die ganze Wicklung stromlos ist und unter einer Spannung $4 \cdot E$ steht, setzt, von der Leitung ausgehend, eine Entladung derselben ein, welche zur Zeit $v \cdot t = 4 \cdot l$ vollendet ist; in diesem Augenblicke hat die Wicklung fast die ganze zu Anfang des betrachteten Ausgleichsvorganges in sie hineingeflossene Energie wieder an die Leitung abgegeben. Nun erfolgt ein neuer Vorstoß der Wanderwelle in die Wicklung, und das eben geschilderte Spiel wiederholt sich; man erkennt jedoch, daß die Abflachung der Wellenstirn stark zugenommen hat. Der betrachtete Vorgang ist demnach kein rein periodischer.

Das wichtigste Ergebnis unserer Betrachtungen ist folgendes: Die vor eine Wicklung geschaltete Schutzinduktivität verflacht die steile Stirn ankommender Wanderwellen und mildert so die zwischen den einzelnen Windungen der Wicklung auftretende Spannungsbeanspruchung, sie kann indes einen Anstieg der Spannung der Wicklung gegen Erde auf den vielfachen Betrag der Wanderwellenspannung nicht verhindern. Eine selbst weitgehende Vergrößerung der Induktivität der Schutzdrosselspule kann hieran nichts ändern, wenn wir an der Voraussetzung einer sehr langen Wanderwelle festhalten.

Digitized by Google

Die Fig. 11, welche unter Zugrundelegung einer gegen vorher 25-fachen Induktivität λ gezeichnet wurde, und bei welcher die im Verlaufe des Ausgleichsvorganges auftretende höchste Spannung noch nicht erreicht ist, zeigt dies deutlich; eine Zunahme der Größe der Schutzinduktivität bewirkt lediglich eine zunehmende Verflachung der Wellenstirn.

Man könnte den Fig. 10 und 11 auch den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung an irgendeiner Stelle der Wicklung entnehmen, doch ist es einfacher und übersichtlicher, zu diesem Zwecke direkt auf die abgeleiteten Gleichungen zurückzugreifen. Wir wollen uns auch hier wieder des für die Funktion F (ξ) gefundenen Näherungsausdruckes (32) bedienen.

Am Wicklungsanfang, d. h. im Punkte $x = l$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} e &= 2 \cdot E + F(l - v \cdot t) + F(l + v \cdot t) \\ i &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(l - v \cdot t) - F(l + v \cdot t)] \end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

Hierin bedeuten e und i die totalen Spannungen und Ströme; von der zeitlichen Dämpfung wurde zunächst abgesehen, bezüglich Berücksichtigung derselben sei auf die Gl. (39)

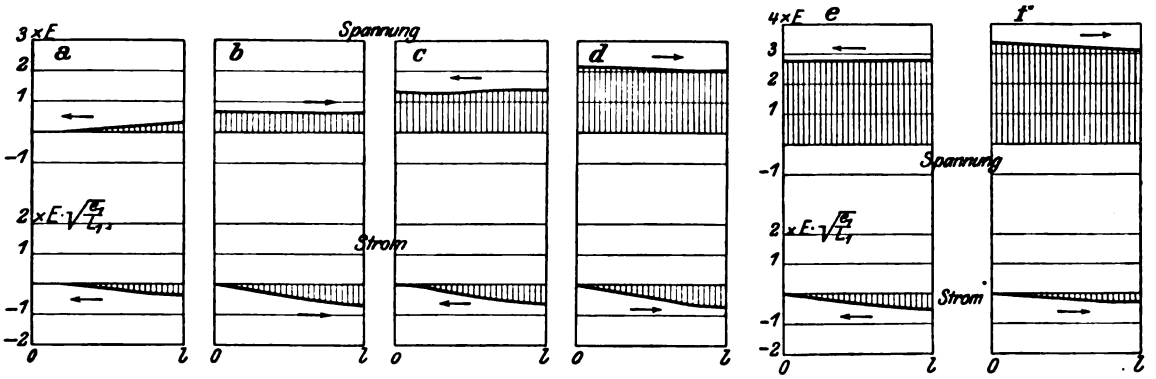


Fig. 11.

verwiesen. Gl. (39) kann natürlich sinngemäß auch auf irgendwelche Teilfunktionen G (ξ), H (ξ) usw. übertragen werden.

Die Funktion $H_1(\xi)$ ist, wie ein Blick auf die Fig. 6 lehrt, bezüglich des Punktes $x = l$ eine gerade Funktion, d. h. es gilt stets die Beziehung:

$$H_1(l + v \cdot t) = H_1(l - v \cdot t).$$

Im Gegensatz hierzu ist die Funktion $H_2(\xi)$ hinsichtlich des Punktes $x = l$ eine ungerade Funktion, so daß wir anschreiben können:

$$H_2(l + v \cdot t) = -H_2(l - v \cdot t)$$

Damit ergibt sich nun:

$$e_{x=l} = 2 \cdot E + G(l - v \cdot t) + G(l + v \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(l + v \cdot t) + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{v \cdot t}{l} \cdot H_2(l + v \cdot t) \right)$$

$$i_{x=l} = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left[G(l - v \cdot t) - G(l + v \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \cdot H_2(l + v \cdot t) \right]$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} e_{x=l} &= 2 \cdot E + 2 \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot l \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(l + v \cdot t) + t \cdot \frac{Z}{\lambda} \cdot H_2(l + v \cdot t) \right) \\ i_{x=l} &= -\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left[2 \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \cdot H_2(l + v \cdot t) \right] \end{aligned}\right| \qquad 41)$$

Digitized by Google

Hierin bedeutet:

$$G_0 = -2 \cdot E \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_0 \cdot l} \qquad 41a)$$

die Amplitude der Grundschwingung.

Die Grundgleichungen für Strom und Spannung im Punkte $x = o$ schreiben sich folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} e_{x=0} &= 2 \cdot E + F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) \\ i_{x=0} &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(-v \cdot t) - F(+v \cdot t)] \end{aligned}\right| \qquad 42)$$

Die Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ verhalten sich hinsichtlich des Punktes $x = o$ genau so wie früher, es gilt somit:

$$H_1(+v \cdot t) = H_1(-v \cdot t),$$
$$H_2(+v \cdot t) = -H_2(-v_2 \cdot t).$$

Damit können wir die Gl. (42) umformen in:

$$\left.\begin{aligned} e_{x=0} &= 2 \cdot E + 2 \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(+v \cdot t) + t \cdot \frac{Z}{\lambda} \cdot H_2(+v \cdot t)\right) \\ i_{x=0} &= o \end{aligned}\right| \qquad 43)$$

Man sieht, die Gl. (41) und (43) für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Anfang und Ende der Wicklung haben dieselbe Form. In der Gl. (41) für den in die Wicklung hineinfließenden Strom spielt das zweite Glied neben der Sinusschwingung nur eine unbedeutende Rolle, selbst noch, was sich bei Berücksichtigung der Funktion $D(\xi)$ ergibt, bei höheren Werten des Verhältnisses $\frac{L}{\lambda}$.

Wir hatten bereits früher gefunden und dies durch die Gl. (37) ausgedrückt, daß die Zeitkurve der am Wicklungsende herrschenden Spannung die Form der Funktion $F(\xi)$ besitzt; die Zeitkurve der Spannung am Wicklungsanfang unterscheidet sich von dieser Funktion in der Hauptsache nur dadurch, daß die Amplitude der Grundschwingung $G(\xi)$ nach Maßgabe des Faktors $\cos m_0 \cdot l$ verkleinert erscheint. Der zeitliche Verlauf des in die Wicklung hineinfließenden Stromes ist bei nicht zu großen Werten von $\frac{L}{\lambda}$ fast rein sinusförmig.

7. Das Spannungsgefälle in der Wicklung. Handelt es sich um die Dimensionierung der zum ausreichenden Schutze einer Wicklung gegen Sprungwellen erforderlichen Drosselspule, so ist es wichtig, das jeweilig in der Wicklung auftretende maximale Spannungsgefälle zu kennen. Wir wissen von vornherein nicht, an welcher Stelle der Wicklung und in welchem Zeitpunkte dieses Maximum erreicht wird; wollen wir uns also Klarheit über die Größe des maximalen Spannungsgefälles verschaffen, so wäre es eigentlich notwendig, den vollständigen räumlichen und zeitlichen Verlauf desselben zu bestimmen. Wir können jedoch schon den Fig. 10 und 11 entnehmen, daß, wenn wir den zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles für die Punkte $x = o$, $x = \frac{l}{2}$ und $x = l$ berechnen, wir sicher sein können, daß diese Berechnungen das maximal auftretende Spannungsgefälle einschließen; wir gewinnen so außerdem einen schnelleren Überblick über die auftretenden Erscheinungen.

Digitized by Google

Aus Gl. (27a) ergibt sich durch Differentiation nach x bei Vernachlässigung der zeitlichen Dämpfung:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_\mu \cdot l \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \cos m_\mu \cdot v \cdot t. \qquad 44)$$

Für Wicklungsanfang, Wicklungsmitte und Wicklungsende folgt somit:

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=l} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_\mu \cdot l \cdot \frac{\sin^2 m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot v \cdot t, \qquad 44a)$$

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_\mu \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot v \cdot t, \qquad 44b)$$

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \qquad 44c)$$

Das Spannungsgefälle am Ende der Wicklung ist also stets Null. Es ergeben sich interessante Beziehungen, wenn man die Gl. (44a) und (44b) für die beiden Grenzfälle $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $\frac{L}{\lambda} = \infty$ auswertet. Im ersteren Falle ergibt sich, wie man leicht zeigen kann:

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=l} = 0 \quad \text{für } \frac{L}{\lambda} = 0, \qquad 45a)$$

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{für } \frac{L}{\lambda} = 0. \qquad 45b)$$

Diese beiden Gleichungen decken sich vollkommen mit der Erfahrung, daß eine unendlich große Selbstinduktion λ die zu schützende Wicklung gegen ankommende Wanderwellen vollkommen absperrt.

Für den zweiten der angeführten Grenzfälle ergibt sich ferner:

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=l} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l} \quad \text{für } \frac{L}{\lambda} = \infty, \qquad 46a)$$

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{e=\frac{l}{2}} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (\pm 1) \cdot \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l} \quad \text{für } \frac{L}{\lambda} = \infty. \qquad 46b)$$

$$(\pm 1 = +1, -1, -1, +1, +1, -1, \ldots.)$$

Nun hat die unendliche Reihe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}$$

den Wert Null im Bereiche $0 < v \cdot t < 2 \cdot l$, mit Ausnahme jedoch der Punkte 0 und $2 \cdot l$; im Punkte $v \cdot t = 0$ springt nämlich die durch diese Reihe dargestellte Funktion plötzlich auf den Wert $+\infty$, im Punkte $v \cdot t = 2 \cdot l$ auf $-\infty$. Einen ähnlichen Verlauf zeigt die durch die Reihe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (\pm 1) \cdot \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}, \quad (\pm 1 = +1, -1, -1, +1, +1, -1, \ldots)$$

Digitized by Google

dargestellte Funktion. Sie hat im Bereiche $o \lessgtr v \cdot t \leqq 2 \cdot l$ den Wert Null, mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen $v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot l$ und $v \cdot t = \frac{3}{2} \cdot l$; im ersten Punkte springt sie plötzlich auf $+\infty$, um jedoch sofort wieder auf Null zu fallen, in letzterem Punkte nimmt sie den Wert $-\infty$ an.

Durch Aneinanderreihen der für das angegebene Intervall gefundenen Funktionswerte ergeben sich die durch die Fig. (12a) und (12b) gezeigten Bilder für den zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles in den Punkten $x = l$ und $x = \frac{l}{2}$; dieselben erklären sich physikalisch ohne weiteres aus der Form der durch die Fig. 5b dargestellten Funktion,

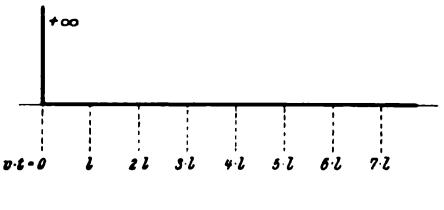


Fig. 12a.

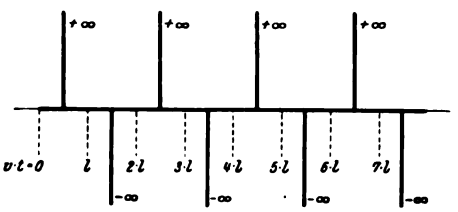


Fig. 12b.

während sie mathematisch wegen der Divergenz der beiden, eben angeschriebenen Reihen nicht ohne weiteres zu erkennen sind.

Die Gl. (44a) und (44b) lassen sich nun, solange das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht sehr groß wird, mit Hilfe des im 4. Abschnitt entwickelten Näherungsverfahrens verhältnismäßig einfach auswerten. Es ergibt sich nämlich folgender Näherungsausdruck:

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=l} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot m_0 \cdot l \cdot \frac{\sin^2 m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=\infty}{}' \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{v \cdot t}{l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty}{}' \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} \right], \quad 47a)$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial e_f}{\partial x}\right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4 \cdot E}{l} \cdot m_0 \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot l \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{4 \cdot E}{l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=\infty}{}' (-1)^k \cdot \frac{\cos (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi} - \frac{v \cdot t}{l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty}{}' (-1)^k \cdot \frac{\sin (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \pi^2} \right]. \quad 47b)$$

Man kann diese Gleichungen natürlich noch durch Hinzunahme eines Korrektionsgliedes, welches die Abweichung vom wahren Werte der Funktion $\frac{\partial e_f}{\partial x}$ angibt (ähnlich der Funktion D (ξ) des 4. Abschnittes), verbessern. Nun ist:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}{}' \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{k^2 \cdot \pi^2} = \frac{\left(\frac{v \cdot t}{l} - 1\right)^2}{4} - \frac{1}{12}\ ^{1}),$$

[1]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, Braunschweig 1910, § 33, Gl. 5.

Digitized by Google

gültig im Intervall

$$0 \leqq \frac{v \cdot t}{l} \leqq 2,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} = \frac{\left(\frac{v \cdot t}{l}\right)^3}{12} - \frac{\left(\frac{v \cdot t}{l}\right)^2}{4} + \frac{\frac{v \cdot t}{l}}{6},$$

ebenfalls gültig im Bereiche

$$0 \leqq \frac{v \cdot t}{l} \leqq 2,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2k-1) \cdot \pi} = -\frac{1}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \pi^2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{v \cdot t}{l},$$

beide gültig im Intervall

$$-1 < \frac{v \cdot t}{l} < +1.$$

Die durch diese Reihenentwicklungen dargestellten Funktionen veranschaulichen die Fig. 13a bis 13d.

Die Fig. 14 gibt ein Bild vom zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles in den Punkten $x = l$ (Fig. 14a) und $x = \frac{l}{2}$ (Fig. 14b) bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$. Man sieht, daß das maximale Spannungsgefälle im Punkte $x = l$ bereits zur Zeit $t = 0$ auftritt, im Punkte

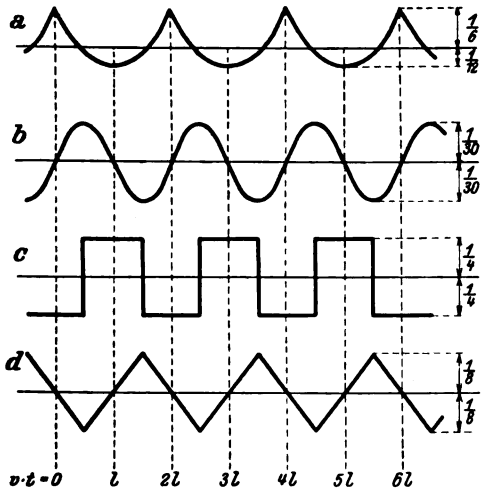


Fig. 13.

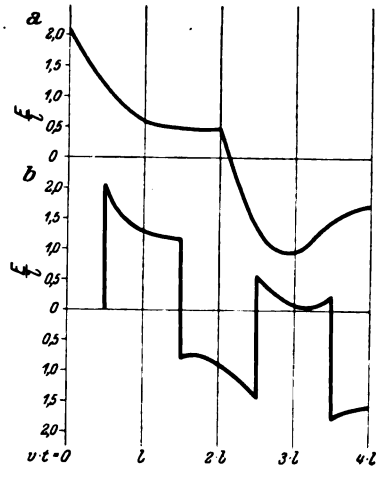


Fig. 14.

$x = \frac{l}{2}$ erfolgt sein Auftreten kurze Zeit später, nämlich im Zeitpunkte $t = \frac{l}{2 \cdot v}$. Die beiden Maxima des Spannungsgefälles in den Punkten $x = l$ und $x = \frac{l}{2}$ sind natürlich, wenn man von der Dämpfung absieht, einander gleich.

Digitized by Google

Unter der Voraussetzung, daß das Maximum des Spannungsgefälles bereits zur Zeit $t = o$ bzw. $t = \frac{l}{2 \cdot v}$ auftritt, und daß das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht allzu groß wird, kann man eine einfache Näherungsformel für das maximale Spannungsgefälle ableiten. Für kleine Winkel $m_0 \cdot l$ gilt nämlich angenähert:

$$\operatorname{tg} m_0 \cdot l = \sim m_0 \cdot l = \sim \sin m_0 \cdot l.$$

Damit folgt aus Gl. (20):

$$m_0 \cdot l = \sqrt{\frac{L}{\lambda}}$$

und es wird weiterhin:

$$\frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_0 \cdot l} = \sim \frac{1}{2},$$

$$m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot l = \sim \frac{L}{\lambda}$$

und

$$m_0 \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot l = \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\lambda}.$$

Für kleine Zeiten t folgt damit aus den Gl. (47):

$$\frac{\partial e_f}{\partial x_{max}} = \sim \frac{2 \cdot E}{l} \cdot \frac{L}{\lambda}. \qquad 48)$$

Fig. 14 zeigt, daß diese Gleichung bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$ noch mit ziemlicher Genauigkeit gilt.

8. Der Schutzwert des Kondensators. Schutzdrosselspulen und Schutzkondensatoren verhalten sich bekanntlich gegenüber Sprungwellen sehr ähnlich. Eine Ausdehnung der bisher gepflogenen Betrachtungen auf Schutzkondensatoren würde aus diesem Grunde nur wenig Neues bieten, so daß wir hierauf lieber verzichten wollen. Wir werden vielmehr unsere Aufmerksamkeit einem Problem zuwenden, das ebenfalls außerordentliche praktische Wichtigkeit besitzt; wir wollen nämlich untersuchen, wie sich die durch Kondensatoren geschützte Maschinenwicklung beim Abschalten von der speisenden Leitung verhält. Hier kann es sich nun um zwei prinzipiell verschiedene Fälle handeln:

a) die Lostrennung von der Speiseleitung erfolgt in dem Augenblicke, in welchem die Kurve des zu unterbrechenden Stromes gerade betriebsmäßig durch Null geht,

b) die eben ausgesprochene Voraussetzung trifft nicht zu.

Außer diesen beiden Voraussetzungen können noch viele andere gegeben sein; wir wollen uns auf die folgenden, praktisch wichtigsten Probleme beschränken und dabei der Übersichtlichkeit zuliebe die angegebenen Vereinfachungen treffen.

1. Das Abschalten des leerlaufenden Transformators usw.

Der Strom sei gerade Null. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung betrage im stationären Zustand 90°, d. h. wir sehen von den Verlusten ab. Die Verteilung der Betriebsspannung über die Wicklung befolge im stationären Zustande ein lineares Gesetz, wir vernachlässigen also die Wirkung der Streuung sowie der Kapazität zwischen den Windungen.

2. Das Abschalten des kurzgeschlossenen Transformators usw.

Die Kurve des Kurzschlußstromes möge kurz vor der Unterbrechung gerade ihr Maximum durch laufen, da wir von den Verlusten absehen, herrscht also im Momente der Unterbrechung auf der Wicklung überall die Spannung Null.

Digitized by Google

Die hier betrachteten Ausgleichsvorgänge laufen in so außerordentlich kurzer Zeit ab, daß die mit der Netzfrequenz verlaufende Leerlaufsspannung bzw. der Kurzschlußstrom sich währenddessen nicht merklich ändern, so daß wir dieselben als konstante Größen auffassen können. Wir nennen den Maximalwert der Leerlaufsspannung E, den des Kurzschlußstromes J. Im übrigen sollen die bisher benutzten Bezeichnungen beibehalten werden, es bezeichne noch K die Kapazität des Schutzkondensators, die Abschaltung erfolge zur Zeit $t = 0$.

9. Das Abschalten des leerlaufenden, durch einen Kondensator geschützten Transformators. Wir können die uns gestellte Aufgabe folgendermaßen präzisieren: Die beiden Platten eines Kondensators mit der Kapazität K sind durch eine Leiterschleife A B C verbunden (Fig. 15). Das geschilderte System sei im Zeitpunkte $t = 0$ stromlos, an den Klemmen des Kondensators herrsche eine Spannung E, diese fällt längs der Leiterschleife entsprechend der Funktion

$$e = E \cdot \frac{x}{l} \qquad 44)$$

bis zum Betrage Null, den sie im Kurzschlußpunkte B natürlich dauernd beibehält, ab (Fig. 15). Vom Zeitpunkte $t = 0$ an bleibe die eben beschriebene Anordnung sich selbst überlassen, und es sind die auf der Leiterschleife A B C sich abspielenden Ausgleichsvorgänge anzugeben. Die Leiterschleife wird in Wirklichkeit durch die Wicklung des abgeschalteten Transformators gebildet.

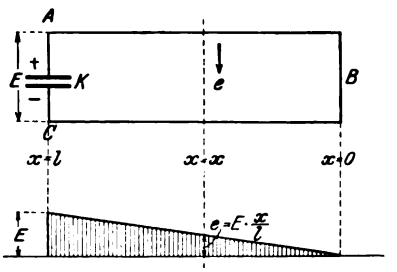


Fig. 15.

Wir können, wenn wir wieder zunächst von der zeitlichen Dämpfung absehen, folgende Gleichungen für die auf der Leiterschleife A B C sich ausbildenden Spannungen und Ströme anschreiben:

$$e = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu, \qquad 45a)$$

$$i = C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu . \qquad 45b)$$

Hierin bedeuten V_μ eine reine Ortsfunktion, V'_μ deren erste Ableitung, es ist:

$$V_\mu = a_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x + b_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x , \qquad 45c)$$

$$V'_\mu = a_\mu \cdot m_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x - b_\mu \cdot m_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x . \qquad 45d)$$

Wir wollen uns noch einmal kurz der Bedeutung der eben angeschriebenen Gleichungen erinnern. Spannung und Strom setzen sich aus einer großen Zahl von Einzelschwingungen zusammen, welche räumlich und zeitlich ein einfaches harmonisches Gesetz befolgen; $\frac{n_\mu}{2 \cdot \pi}$ ist die Frequenz, $\frac{2 \cdot \pi}{m_\mu}$ die Wellenlänge der Schwingungen, beide sind durch die folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$m_\mu = \sqrt{L_1 \cdot C_1} \cdot n_\mu . \qquad 45e)$$

Die Konstanten A_μ, B_μ, a_μ und b_μ endlich bestimmen die zeitliche und räumliche Phase sowie die Amplitude der Schwingungen. Sämtliche Konstanten sind zunächst noch vollkommen willkürlich, und es ist unsere Aufgabe, sie aus den speziellen Bedingungen des Problems zu bestimmen. Der Punkt $x = 0$ bleibt dauernd spannungslos, wir haben dort also die Grenzbedingung:

$$e = 0 \quad \text{für } x = 0. \qquad 46a)$$

Im Punkte $x = l$ herrscht wegen des Kondensators zwischen der Spannung e und dem Strome i jederzeit die Beziehung:

$$i = K \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{für } x = l . \qquad 46b)$$

Digitized by Google

Die eben angeschriebenen Grenzbedingungen müssen für alle Zeiten erfüllt werden. Aus Gl. (46a) folgt somit:

$$V_\mu'(o) = o. \tag{47}$$

Dies bedingt, wie ein Blick auf die Gl. (45d) lehrt, daß sämtliche Konstanten a_μ verschwinden. Wir vereinigen außerdem die Konstanten b_μ mit den noch vollkommen willkürlichen Konstanten A_μ und B_μ und erhalten dann die folgenden einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} V_\mu &= \cos m_\mu \cdot x \\ V_\mu' &= -\, m_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Dies in die Gl. (46b) eingeführt, ergibt:

$$V_\mu(l) = -\frac{K}{C_1} \cdot V_\mu'(l). \tag{49}$$

Durch Einführen der Werte für V_μ und V_μ' in diese Beziehung ergibt sich endlich die transzendente Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen $\frac{2\pi}{m_\mu}$:

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{C}{K}, \tag{50}$$

welche wir bereits im 4. Abschnitt kennen lernten; an Stelle des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ ist lediglich das Verhältnis der gesamten Kapazität des Entladekreises A B C zur Kapazität des Kondensators getreten. Diese Gleichung hat eine unendliche Anzahl von positiven reellen Wurzeln und wird durch die Fig. 4 am deutlichsten erklärt, Neues ist an dieser Stelle hierzu nicht mehr zu sagen.

Zur Berechnung der Konstanten A_μ und B_μ sind wir gezwungen, auf die zur Zeit $t = o$ gegebene Strom- und Spannungsverteilung einzugehen. Wir haben:

$$\left.\begin{aligned} i &= o \\ e &= \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l} \end{aligned}\right\} \text{ für } t = o\,^{1}) \tag{51}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen für Strom und Spannung in diese Anfangsbedingungen ergibt sich weiter:

$$o = -C_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - C_1 \cdot n_2 \cdot A_2 \cdot V_2 - \ldots - C_1 \cdot n_\nu \cdot A_\nu \cdot V_\nu - \ldots \tag{52a}$$

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l} = B_1 \cdot V_1' + B_2 \cdot V_2' + \ldots + B_\nu \cdot V_\nu' + \ldots \tag{52b}$$

Wie nun die Konstanten dieser beiden Reihen zu bestimmen sind, wurde im 4. Abschnitt ausführlich gezeigt, wir können hier gleich die Resultate angeben.

Aus Gl. (52a) ergibt sich ohne weiteres:

$$A_\mu = o. \tag{53a}$$

Aus Gl. (52b) folgt:

$$B_\mu = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{\int_0^l \frac{x}{l} \cdot V_\mu' \cdot dx + \frac{K}{C_1} \cdot V_\mu'(l)}{\int_0^l V_\mu'^2 \cdot dx + \frac{K}{C_1} \cdot [V_\mu'(l)]^2}. \tag{53b}$$

[1]) Da die beiden Hälften A B und C B des Entladekreises durchaus symmetrisch sind, können wir unsere Betrachtungen auf eine Hälfte desselben beschränken.

Digitized by Google

Im vorliegenden Falle ist:

$$V_\mu' = -m_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x$$

und damit wird:

$$\int_0^l \frac{x}{l} \cdot V_\mu' \cdot dx = -\frac{m_\mu}{l} \cdot \int_0^l x \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot dx = \left[\frac{x}{l} \cdot \cos m_\mu \cdot x - \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x\right]_0^l$$

$$= \cos m_\mu \cdot l - \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot l,$$

$$\int_0^l V_\mu'^2 \cdot dx = m_\mu^2 \cdot \int_0^l \sin^2 m_\mu \cdot x \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4 \cdot m_\mu} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot x\right]_0^l \cdot m_\mu^2$$

$$= \frac{m_\mu}{2} \cdot (m_\mu \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l)$$

und

$$B_\mu = \frac{E}{m_\mu} \cdot \frac{\cos m_\mu \cdot l - \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \sin m_\mu \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_\mu \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \cos 2 \cdot m_\mu \cdot l}.$$

Nun sind sämtliche Konstanten bestimmt, und wir sind somit imstande, die vollständigen Gleichungen für Spannung und Strom im Entladekreis A B C anzuschreiben. Dieselben lauten nach Hinzunahme des Dämpfungsfaktors:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{-\cos m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \sin m_\mu \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_\mu \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \cos 2 m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \cos n_\mu \cdot t, \qquad 54a)$$

$$i = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\cos m_\mu \cdot l - \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \sin m_\mu \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_\mu \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \cos 2 m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot x \cdot \sin m_\mu \cdot t. \qquad 54b)$$

Wir können auch jetzt wieder den eben angeschriebenen Gleichungen für Spannung und Strom eine übersichtlichere Form geben, wenn wir uns die Beziehung

$$n_\mu = \frac{m_\mu}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}} = m_\mu \cdot v$$

ins Gedächtnis zurückrufen und die folgenden trigonometrischen Regeln beachten:

$$\cos m_\mu \cdot v \cdot t \cdot \sin m_\mu \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \sin m_\mu \cdot (x - v \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin m_\mu \cdot (x + v \cdot t),$$

$$\sin m_\mu \cdot v \cdot t \cdot \cos m_\mu \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \sin m_\mu \cdot (x - v \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \sin m_\mu \cdot (x + v \cdot t).$$

Es ergibt sich nämlich:

$$\left.\begin{aligned} e &= e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \\ i &= -e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \end{aligned}\right\}, \qquad 55)$$

wo das Funktionszeichen F eine Abkürzung für:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \sin m_\mu \cdot l - \cos m_\mu \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_\mu \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_\mu \cdot l \cdot \cos 2 m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot \xi. \qquad 55a)$$

ξ bedeutet entweder das Argument $x - v \cdot t$ oder das Argument $x + v \cdot t$.

Digitized by Google

Spannung und Strom lassen sich somit durch zwei mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ gegenläufig bewegte Wellenzüge darstellen, deren Form durch die Gl. (55a) gegeben ist. Die Spannungswellen liegen so, daß sie sich zur Zeit $t = 0$ vollständig decken, die Stromwellen ergeben sich aus ihnen durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor $\mp \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$.

Es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung der Form der Funktion $F(\xi)$. Wir werden uns auch hier wieder eines Näherungsverfahrens bedienen, das auf der Zerlegung der Funktion $F(\xi)$ in eine Summe von Teilfunktionen beruht. Dabei werden wir uns jedoch auf den praktisch wichtigen Fall beschränken, daß die Kapazität des Schutzkondensators K groß gegenüber der Kapazität C der zu schützenden Wicklung ist, was ja auch in der Regel zutreffen dürfte. In diesem Falle können, wie aus der Fig. 4 hervorgeht, die Winkel ε_μ für höhere Ordnungszahlen μ vernachlässigt werden; bei einem Verhältnis $\frac{C}{K} = 0{,}2$ ist dies, wie wir im 5. Abschnitt sahen, bereits von $\mu = 2$ ab zulässig. Die Lösung der Gl. (50) lautet dann:

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi \text{ für } \mu > 1. \qquad 56)$$

Wir entnehmen dieser Gleichung das wichtige Ergebnis, daß, da die Wellenlängen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, die Reihe der Oberschwingungen der Funktion $F(\xi)$ eine harmonische ist; ausgenommen hiervon ist die Grundschwingung. Indem wir also die nichtperiodische Funktion $F(\xi)$ gemäß der Gleichung:

$$\overline{F}(\xi) = G(\xi) + H(\xi) \qquad 57)$$

mit

$$G(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{\frac{1}{m_0 \cdot l} \cdot \sin m_0 \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot l - \cos m_0 \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_0 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_0 \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_0 \cdot l \cdot \cos 2 m_0 \cdot l} \cdot \sin m_0 \cdot \xi \qquad 57a)$$

und

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \sin m_k \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_k \cdot l \cdot \sin m_k \cdot l - \cos m_k \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_k \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_k \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_k \cdot l \cdot \cos 2 m_k \cdot l} \cdot \sin m_k \cdot \xi, \qquad 57b)$$

wo

$$k = \mu - 1,$$

aufspalten, gelingt es uns, dieselbe auf die Summe zweier periodischer Funktionen zurückzuführen.

Die Gl. (57a) stellt eine einfache Sinusschwingung dar, zur Ermittlung der Form der Funktion $H(\xi)$ bedienen wir uns der Gl. (56). Es ergibt sich:

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \left[\frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} - \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} - \frac{C}{K} \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} \right]. \qquad 58)$$

In der ersten in der Klammer stehenden Summenformel erkennen wir nun die Fouriersche Reihenentwicklung für die durch die Fig. 16 dargestellte Dreieckswelle[1]).

[1]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I. § 36, Gl. (1). (Braunschweig 1910.)

Digitized by Google

Es ist nämlich:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{l}$$

gültig im Bereiche:

$$-1 < \frac{\xi}{l} < +1.$$

Durch zweimalige Integration folgt hieraus:

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} = \frac{1}{12} \cdot \left\{ \left(\frac{\xi}{l} \right)^3 - \frac{\xi}{l} \right\}.$$

Es ist dies die letzte der in der Gl. (58) vorkommenden Summenformeln, die durch sie dargestellte Funktion zeigt die Fig. 17.

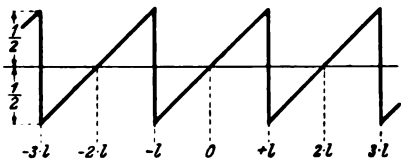


Fig. 16.

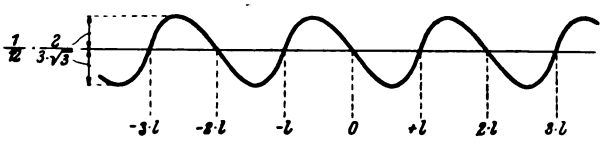


Fig. 17.

Die beiden ersten in der Klammer der Gl. (58) vorkommenden Summanden heben sich auf, es verbleibt somit:

$$H(\xi) = -\frac{C}{2 \cdot K} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3}. \qquad 58a)$$

10. Räumlicher und zeitlicher Verlauf des Entladevorganges. Wir wollen uns das Ergebnis der Betrachtungen des vorigen Abschnittes an einem Beispiel vor Augen führen. Da der Verlauf des Entladevorganges nur durch die Größe des Parameters $\frac{C}{K}$ bestimmt wird, brauchen wir nur über diesen bestimmte Annahmen zu machen. Wir werden den nun folgenden Untersuchungen ein Verhältnis

$$\frac{C}{K} = 0{,}2$$

zugrunde legen.

In diesem Falle besitzt die Grundwelle $G(\xi)$ eine Amplitude von

$$G_0 = 0{,}597 \cdot E,$$

ihre Wellenlänge beträgt

$$\frac{2 \cdot \pi}{m_0} = 14{,}5 \cdot l.$$

Die Funktion $H(\xi)$ schwankt zwischen

$$H(\xi)_{max} = \mp 0{,}0016 \cdot E,$$

man sieht also, daß sie die Form der Grundwelle nicht nennenswert zu stören vermag wie dies denn auch die Fig. 18 erkennen läßt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Funktion

$$\overline{F}(\xi) = 0{,}597 \cdot E \cdot \sin 0{,}433 \cdot \frac{x}{l} + \frac{1}{120} \cdot E \cdot \left\{ \left(\frac{x}{l} \right)^3 - \frac{x}{l} \right\}$$

Digitized by Google

im Intervalle

$$0 \leqq x \leqq$$

von dem Betrage

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l},$$

welchen die Anfangsbedingung erfordert, nirgends um mehr als ca. $^1/_{1000}$ abweicht, die erreichte Genauigkeit ist also mehr als genügend.

Wie nun mit Hilfe der Funktion $\overline{F}(\xi)$ ein Bild vom räumlichen Verlauf der auf dem Entladekreis A B C bzw. auf der Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorgänge. entworfen werden kann, haben wir bereits früher gesehen. Fig. 19 zeigt die ausgeführte Konstruktion, die zeitliche Dämpfung wurde vernachlässigt.

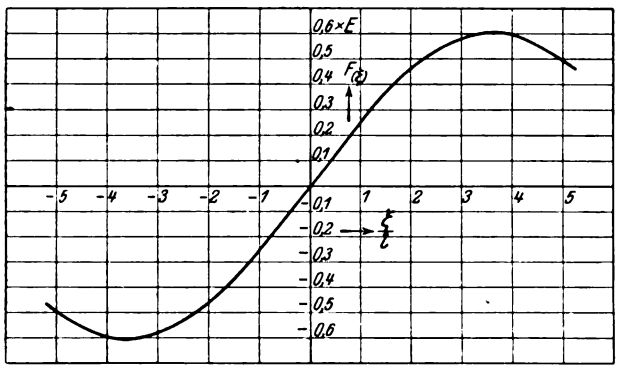


Fig. 18.

Die Entladung des Kondensators und der an ihn angeschlossenen Wicklung verläuft etwa folgendermaßen: Die auf der Wicklung liegende Ladung setzt sich nach dem Mittelpunkte derselben $x = 0$ hin in Bewegung und erzeugt, indem sie sich ausgleicht, einen ständig wachsenden, gleichmäßig über die Wicklung verteilten Strom. Die abfließenden Ladungsmengen werden vom Kondensator aus, der sich hierdurch allmählich entlädt, ständig ersetzt. Der ganze Entladungsvorgang verläuft stetig ohne Erzeugung von unstetigen Spannungs- oder Stromsprüngen. In dem Maße, in welchem sich der Kondensator entlädt, sinkt die auf der Wicklung herrschende Spannung, der in derselben fließende Strom steigt ständig, d. h. die im Kondensator und in der Wicklung aufgespeicherte elektrische Energie verwandelt sich allmählich in magnetische Energie. Es kommt ein Zeitpunkt, in welchem die Wicklung und der Kondensator spannungslos geworden sind, der Strom hat in diesem Augenblicke sein Maximum erreicht; es hat sich die ganze ursprüngliche elektrische Energie in magnetische Energie umgesetzt. Nun beginnt sich der Kondensator und damit die Wicklung wieder aufzuladen; seine Ladung hat diesmal jedoch entgegengesetztes Vorzeichen, der Strom nimmt wieder ab. Die Rückwandlung in elektrische Energie setzt sich so lange fort, bis der Strom Null geworden und, abgesehen

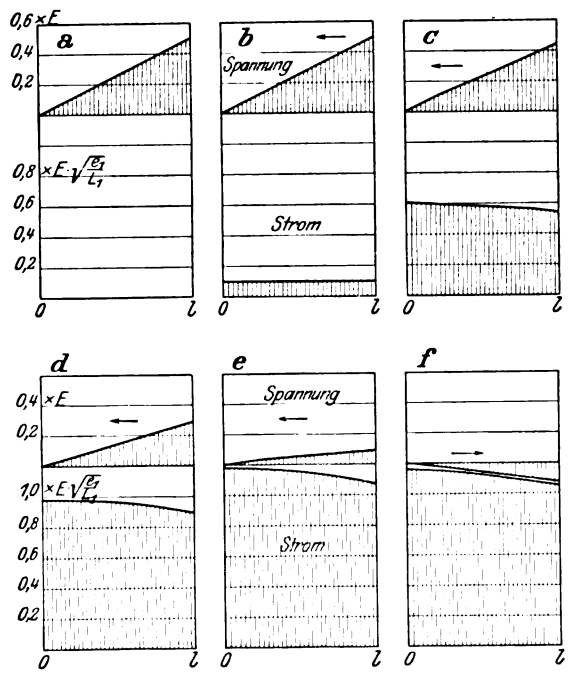


Fig 19.

Digitized by Google

vom Vorzeichen, wieder die ursprüngliche Spannungsverteilung vorhanden ist. Nun beginnt das geschilderte Spiel, jedoch diesmal mit entgegengesetztem Vorzeichen, wieder von neuem. Die Verlustdämpfung bewirkt eine allmähliche Abnahme von Strom und Spannung, und das Spiel der Energien, das sich sonst in alle Ewigkeit fortsetzen würde, kommt so bald zu einem Stillstand.

Es ist in diesem Zusammenhange nützlich, den Verlauf des eben geschilderten Ausgleichsvorganges in den beiden Grenzfällen

$$\frac{C}{K} = 0 \text{ und } \frac{C}{K} = \infty$$

zu betrachten. Im ersteren Falle, also bei unendlich großer Kapazität des Kondensators, fällt die in dér Fig. 4 eingezeichnete Hyperbel mit der Abszissenachse zusammen, die Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen $\frac{2\pi}{m_\mu}$ geht über in

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi \quad \text{für } \mu = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

und die Gl. (55a) nähert sich folgendem Grenzwert:

$$F(\xi) = \frac{1}{4} \cdot E \cdot \frac{\xi}{l}, \tag{59}$$

welchen die Fig. 20 veranschaulicht.

Die Funktion F (ξ) geht somit in eine Gerade über. Eine Verfolgung des auf der Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorganges würde folgendes Bild ergeben. Die auf der Wicklung ruhende Ladung setzt sich wieder nach dem Punkte $x = 0$ hin in Bewegung, dabei einen ständig wachsenden Strom erzeugend. Dieser Vorgang vermag

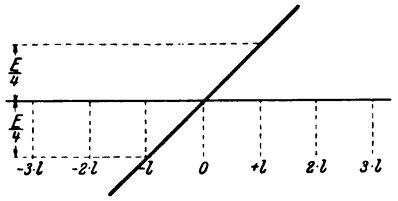


Fig. 20.

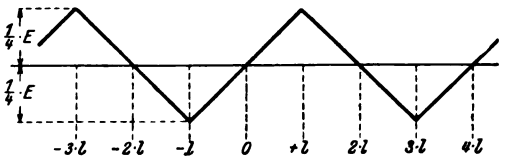


Fig. 21.

indes die ursprüngliche Spannungsverteilung nicht zu stören, denn wegen der unendlich großen Ergiebigkeit des Kondensators ändert dieser seine Spannung nicht, so groß auch der demselben entnommene Strom werden mag.

Im Falle $\frac{C}{K} = \infty$, d. h. also bei fehlendem Kondensator, ergibt sich folgendes: Die Wellenlängen bestimmen sich aus der Gleichung

$$m_\mu \cdot l = (2 \cdot \mu - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

und damit geht die Gleichung für die Funktion F (ξ) über in:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu+1} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \mu - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l}}{(2 \cdot \mu - 1)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}. \tag{60}$$

Die durch diese Reihenentwicklung dargestellte Funktion zeigt die Fig. 21, sie besteht, wie die durch die Fig. 13 gezeigte Funktion, aus lauter geraden, aber im Gegensatz zu dieser stetig zusammenhängenden Linien. Den Verlauf des Entladungsvorganges bei fehlendem Kondensatorschutz zeigt die Fig. 22. Hier ist besonders bemerkenswert,

Digitized by Google

daß, da der Nachschub vom Kondensator her wegfällt, die Entladung der Leitung sehr schnell vor sich geht. Die Periodizität des Ausgleichsvorganges ist sehr schön zu erkennen.

Es verleiht uns einen guten Überblick über die auftretenden Erscheinungen, wenn wir uns noch den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung ableiten. Wir werden die zeitliche Dämpfung vernachlässigen, bezüglich Berücksichtigung derselben gilt das im 6. Abschnitt Gesagte.

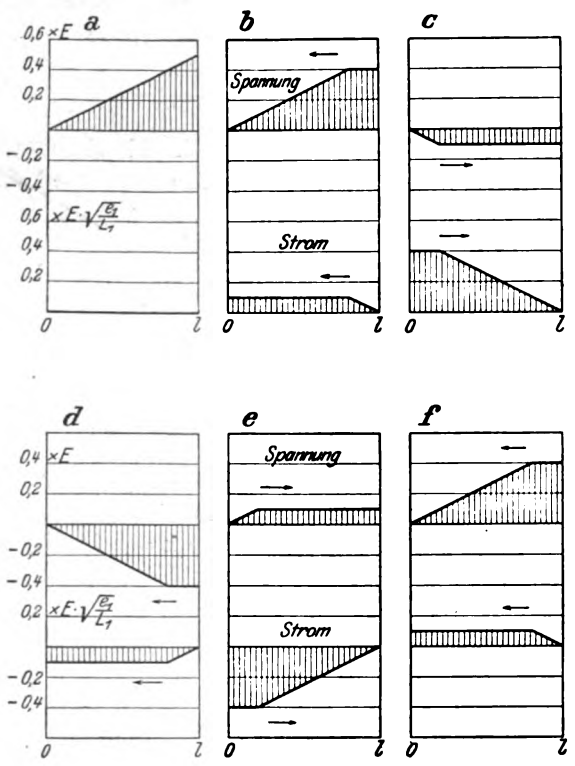


Fig 22.

a) Im Punkte $x = o$ gilt nach Gl. (55):

$$e_{x=o} = F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) = o.$$

Dies wird nur dadurch ermöglicht, daß die Funktion $F(\xi)$ nach Gl. (55a) eine ungerade Funktion ist, d. h. es ist stets:

$$F(\xi) = -F(-\xi).$$

Daraus folgt aus der zweiten der Gl. (55) jedoch weiter:

$$i_{x=o} = 2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot F(v \cdot t). \quad 61)$$

Das heißt also, die Funktion $F(\xi)$ ergibt mit dem Faktor $2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ multipliziert den zeitlichen Verlauf des Stromes im Punkte $x = o$.

b) Im Punkte $x = l$ ist:

$$\left.\begin{aligned} e &= F(l - v \cdot t) + F(l + v \cdot t) \\ i &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [-F(l - v \cdot t) + F(l + v \cdot t)] \end{aligned}\right\} \quad 62)$$

Wir kommen hier wieder am schnellsten zum Ziele, wenn wir die Funktion $F(\xi)$ in ihre Bestandteile $G(\xi)$ und $H(\xi)$ aufspalten, d. h. in die Grundschwingung und in eine Funktion, welche durch die Zusammenwirkung sämtlicher Oberschwingungen entsteht. Ein Blick auf die Fig. 14 lehrt uns, daß die Funktion $H(\xi)$ bezüglich des Punktes $x = l$ eine ungerade Funktion ist, so daß stets die Beziehung gilt:

$$H(l + \xi) = -H(l - \xi).$$

Damit folgt aus Gl. (62):

$$e_{x=l} = G(l - v \cdot t) + G(l + v \cdot t)$$

$$i_{x=l} = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [-G(l - v \cdot t) + G(l + v \cdot t) + 2 \cdot H(l + v \cdot t)]$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} e_{x=l} &= 2 \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t \\ i_{x=l} e &= 2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t + 2 \cdot H(l + v \cdot t). \end{aligned}\right\} \quad 63)$$

Darin bedeutet G_0 die aus Gl. (57a) zu bestimmende Amplitude der Grundwelle.

Digitized by Google

Wir kommen somit zu dem interessanten Ergebnis, daß die Spannungskurve am Kondensator eine reine Sinusschwingung ist. Die Kurve des aus dem Kondensator fließenden Stromes dagegen enthält die Welle H (ξ).

Bei fehlendem Kondensator ergibt die durch die Fig. 21 dargestellte Funktion, mit dem Proportionalitätsfaktor $2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ multipliziert, den zeitlichen Verlauf des Stromes im Punkte $x = o$, dagegen um den Betrag $v \cdot t = -l$ verschoben, den Spannungsverlauf am offenen Wicklungsende. Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung bei unendlich großer Kapazität K braucht wohl nicht erst erörtert zu werden.

11. Das Verhalten des Schutzkondensators bei der plötzlichen Unterbrechung. Die in diesem Abschnitt zu behandelnde Aufgabe schließt sich in mathematischer Beziehung eng an die des vorigen Abschnittes an, sie unterscheidet sich von dieser nur durch die veränderten Anfangsbedingungen. Wir haben nämlich:

$$\left.\begin{array}{llll} e = o & \text{für} & o \leqq x \leqq l & \text{und} \quad t = o \\ i = J & \text{für} & o < x < l & \text{und} \quad t = o \\ i = o & \text{für} & x = l & \text{und} \quad t = o \end{array}\right\} \qquad 64)$$

Die Grenzbedingungen haben sich nicht geändert, so daß die Gl. (48), (49) und (50) des vorigen Abschnitts auch jetzt noch zu Recht bestehen. Wir schreiben diese Gleichungen nochmals an:

$$V_\mu = \cos m_\mu \cdot x\,, \qquad 65a)$$

$$V'_\mu = -\, m_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x\,, \qquad 65b)$$

$$V_\mu (l) = -\frac{K}{C_1} \cdot V'_\mu (l)\,. \qquad 65c)$$

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{C}{K}\,. \qquad 65d)$$

Die allgemeinen Gleichungen für Spannung und Strom lauten:

$$e = e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu\,, \qquad 66a)$$

$$i = e^{-a_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu\,. \qquad 66b)$$

Setzt man in diese Gleichungen die Anfangsbedingungen ein, so folgt sofort:

$$B_\mu = o. \qquad 67a)$$

In Gl. (24a) wird das bestimmte Integral

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx = o\,,$$

in Gl. (25d) verschwinden somit die Konstanten a_1 und a_2, und es wird:

$$A_\mu = -\frac{J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\int_0^1 V_\mu \cdot dx}{\int_0^1 V_\mu^2 \cdot dx}\,. \qquad 67b)$$

Nun ist:

$$V_\mu = \cos m_\mu \cdot x,$$

Digitized by Google

und damit nehmen die Integrale der eben angeschriebenen Gleichung folgenden Wert an:

$$\int_0^1 V_\mu \cdot dx = \int_0^1 \cos m_\mu \cdot x \cdot dx = \frac{1}{m_\mu} \cdot \sin m_\mu \cdot l .$$

$$\int_0^1 V_\mu^2 \cdot dx = \int_0^1 \cos^2 m_\mu \cdot x \cdot dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{4 \cdot m_\mu} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l .$$

Die Konstante A_μ ergibt sich somit zu:

$$A_\mu = -\frac{2 \cdot J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l},$$

so daß die Gl. (66a) und (66b) für Spannung und Strom folgende Gestalt annehmen:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot 2 \cdot J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \sin n_\mu \cdot t \qquad 68a)$$

$$i = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot 2 \cdot J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot x \cdot \cos n_\mu \cdot t . \qquad 68b)$$

Diese Gleichungen lassen sich wieder umformen in:

$$\left.\begin{aligned} e &= e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \\ i &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \end{aligned}\right\} \qquad 69)$$

mit

$$F(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi . \qquad 69a)$$

Die eben angeschriebene Gl. (69a) ist identisch mit der Gl. (28a) des 4. Abschnitts, so daß alle dort an jene Gleichung angeknüpften Betrachtungen ohne weiteres auf unser jetziges Beispiel übertragen werden können. Die auf unserer Wicklung sich abspielenden Vorgänge sind den dort beschriebenen ganz ähnlich, nur haben Strom und Spannung ihre Rolle vertauscht, und ferner ist der von der Wicklung angestrebte Endzustand etwas anders. Wir hatten nämlich im 4. Abschnitt:

$$e_{1\,2} = 2 \cdot E$$
$$i_{1\,2} = 0.$$

Hingegen strebt die Wicklung bei unserm jetzigen Beispiele folgendem Endzustande zu:

$$e_{1\,2} = 0$$
$$i_{1\,2} = 0.$$

Wir sehen also schon, die Fig. 10 und 11 zeigen uns, sofern wir das Vorzeichen umkehren und den Maßstab passend verändern, direkt den Verlauf der Spannung, der schließlich ja auch am meisten interessiert. An Stelle des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ tritt hier das Verhältnis der gesamten Kapazität der Wicklung zu jener des Schutzkondensators $\frac{C}{K}$; Fig. 10 bezieht sich auf ein Verhältnis $\frac{C}{K} = 5$, Fig. 11 auf ein solches $\frac{C}{K} = \frac{1}{5}$.

Digitized by Google

Wir können nun etwa folgendes Bild von den zur Zeit $t = 0$ einsetzenden Ausgleichsvorgängen entwerfen: Es ist klar, daß jede Strombahn dauernd geschlossen sein muß; unterbrechen wir also im Punkte $x = l$ die Leitung, so schließt sich der Strom über den Kondensator; der ehemalige Leitungsstrom erscheint als Verschiebungsstrom im Dielektrikum. Der Ladestrom J bewirkt naturgemäß ein schnelles Steigen der Spannung an den Klemmen des Kondensators, und dieser sendet nun seinerseits einen wachsenden Strom in die Wicklung, der im Vergleiche zum Kurzschlußstrome J entgegengesetztes Vorzeichen hat und diesen somit schwächt. Die Ladung des Kondensators ist beendet, sobald der in die Wicklung zurückfließende Strom die Stärke $-J$ erreicht hat; von diesem Augenblicke an wird die Wicklung, beim Punkte $x = l$ beginnend, stromlos und steht unter einer Spannung $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ Volt. Die eben angestellten Betrachtungen gelten natürlich nur so lange, als nicht im Punkte $x = 0$ reflektierte Wellen wieder den Kondensator erreichen und neue Störungen hervorrufen, bevor dieser die Spannung $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ erreicht hat. Der letztere Fall wird eintreten, wenn die Kapazität des Kondensators groß im Vergleich zur Kapazität der Wicklung ist, wie dies bei der Fig. 11 vorausgesetzt wurde. In diesem Falle wird die angeführte Spannung von $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ Volt auch nicht annähernd erreicht; denn die im Punkte $x = 0$ unter Umkehrung des Vorzeichens reflektierte Spannungswelle bewirkt ein schnelles Sinken der Spannung des Kondensators. Der weitere Verlauf des Ausgleichsvorganges wird durch die Reflexionserscheinungen an den Wicklungsenden charakterisiert und kann aus den Figuren ohne weiteres herausgelesen werden.

Wir gewinnen einen guten Überblick über die Höhe der auftretenden Spannungen durch Betrachtung der Gleichungen für den zeitlichen Verlauf derselben. Daß die Unterbrechungsüberspannung proportional mit der Stärke des plötzlich unterbrochenen Stroms wächst, können wir jetzt schon sagen.

Die im 6. Abschnitt gefundenen Gleichungen für den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung gelten, sofern wir in ihnen Strom und Spannung vertauschen, im Prinzip auch hier. Wir haben somit:

$$e_{x=0} = 0 \tag{70a}$$

$$i_{x=0} = 2 \cdot F(v \cdot t) \tag{70b}$$

$$e_{x=l} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left[G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{C}{K}\right)^2 \cdot H_2(l + v \cdot t) \right] \tag{70c}$$

$$i_{x=l} = G_0 \cdot \cos m_0 \cdot l \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \frac{C}{K} \cdot \left(H_1(l + v \cdot t) + \frac{t}{K \cdot Z} \cdot H_2(l + v \cdot t) \right) \tag{70d}$$

In den Gleichungen des 4. Abschnitts für die Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$, $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ ist natürlich $-2 \cdot E$ durch J zu ersetzen.

Uns interessiert nun vor allem die Gl. (70c), denn die Fig. 10 und 11 ließen uns erkennen, daß die höchste Spannung stets im Punkte $x = l$ auftritt.

Im Falle das Verhältnis $\frac{C}{K}$ klein gegen 1 ist, können wir die Funktion $H_2(\xi)$ vernachlässigen, so daß die Gl. (70c) sich folgendermaßen vereinfacht:

$$e_{x=l} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t.$$

Ferner ergibt sich in diesem Falle, da $m_0 \cdot l$ ein kleiner Winkel ist,

Digitized by Google

$$\sin m_0 \cdot l = m_0 \cdot \qquad \operatorname{tg} m_0 \cdot l = \sqrt{\frac{C}{K}}$$

und

$$G_0 = \frac{1}{2} \cdot J .$$

Wir können also schreiben:

$$e_{x=l} = J \cdot \sqrt{\frac{L}{K}} \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t. \tag{71}$$

Das heißt, die in unserer Wicklung auftretende Spannung wird um so größer, je größer das Verhältnis der gesamten Selbstinduktion der Wicklung zur Kapazität des Kondensators ist. Dies ist sehr einleuchtend, und wir hätten übrigens die Beziehung:

$$e_{x=l_{max}} = J \cdot \sqrt{\frac{L}{K}} \tag{71a}$$

auch direkt aus den Energiegleichungen ableiten können.

Unter dem Einflusse der Verlustdämpfung verringert sich diese Spannung natürlich etwas. Hierüber möge der Leser den Anfang des 6. Abschnittes nachlesen.

Die in der Wicklung auftretende Spannung nimmt zu mit abnehmender Kapazität des Kondensators. Im Grenzfalle, $\frac{C}{K}$ groß gegen 1, ergibt sich:

$$e_{x=l_{max}} = J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \tag{72}$$

eine Beziehung, zu welcher man leicht bei Beachtung der Gl. (35) des 5. Abschnitts gelangt. Der zeitliche Verlauf der Spannung ist in diesem Falle annähernd rechtecksförmig, genau rechtecksförmig mit der Periode $\tau = \frac{4 \cdot l}{v}$ im Extremfalle $K = 0$[1]).

12. Der Schutzkondensator beim Abschalten der induktiv belasteten Leitung. Die Behandlung des vorliegenden Problems dürfte an dieser Stelle noch einiges Interesse bieten, einmal, weil sie Gelegenheit bietet, den Gang der mathematischen Behandlung bei etwas weniger einfachen Grenzbedingungen, als wir sie bis jetzt voraussetzten, zu zeigen, und dann auch, weil sie interessante Ergebnisse über den Schutzwert des Kondensators zeitigen wird.

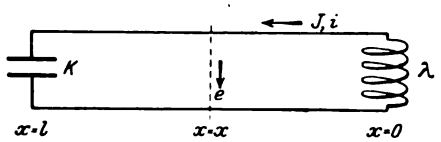


Fig. 23.

Wir werden uns auch hier wieder bemühen, das Problem möglichst zu vereinfachen; diese Vereinfachungen sollen indes nur die rein analytische Seite betreffen, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen.

Die Leitung sei an ihrem Ende $x = 0$ rein induktiv belastet, so daß wir uns diese Belastung durch eine Drosselspule, deren Selbstinduktionskoeffizienten wir λ nennen wollen, ersetzt denken können. Die „plötzliche" Unterbrechung des Stromes J erfolge zur Zeit seines maximalen Momentanwerts ($t = 0$), die Leitung sei gerade spannungslos. Der Anfangszustand unserer Leitung ist also derselbe wie der des vorigen Abschnitts, das Schema, auf welches wir uns zu beziehen haben, zeigt die Fig. 23. Die Grenzbedingungen unsers Problems lauten:

$$\left.\begin{aligned} e &= -\lambda \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \qquad \text{für } x = 0 \\ i &= K \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \qquad \text{für } x = l \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

[1]) Vgl. hierüber auch: K. W. Wagner, Leipzig 1908, Kapitel 7.

Digitized by Google

Durch Einsetzen der allgemeinen Gleichungen für Spannung und Strom:

$$\left.\begin{aligned} e &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu \\ i &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu \end{aligned}\right\} \quad 74)$$

folgt hieraus:

$$V'_\mu(o) = -m_\mu^2 \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(o), \quad 75a)$$

$$V'_\mu(l) = -\frac{C_1}{K} \cdot V_\mu(l). \quad 75b)$$

Nun ist

$$V_\mu = a_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x + b_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x,$$

oder, wenn wir a_μ, das ja noch vollkommen willkürlich ist, gleich 1 setzen,

$$V_\mu = \sin m_\mu \cdot x + \frac{b_\mu}{a_\mu} \cdot \cos m_\mu \cdot x.$$

Durch Einsetzen in Gl. (75a) ergibt sich:

$$\frac{b_\mu}{a_\mu} = -\frac{1}{m_\mu} \cdot \frac{L_1}{\lambda}$$

und damit wird:

$$\left.\begin{aligned} V_\mu &= \sin m_\mu \cdot x - \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot x, \\ V'_\mu &= m_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x + \frac{L_1}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot x. \end{aligned}\right\} \quad 76)$$

Ferner ergibt sich aus Gl. (75b) die transzendente Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen:

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = -m_\mu \cdot l \cdot \frac{1}{\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}} + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda}{L} + \frac{K}{C}}. \quad 77)$$

Auf die Diskussion dieser Gleichung werden wir später zurückkommen.

Aus Gl. (24a) folgt nach Einsetzen der Grenzbedingungen (75):

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_o^l V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx = -(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(o) \cdot V_\nu(o).$$

Für die Konstanten A_μ folgt somit:

$$A_\mu = -\frac{J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\int_o^l V_\mu \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(o)}{\int_o^l V_\mu^2 \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu^2(o)}. \quad 78a)$$

Ferner wird:

$$B_\mu = 0. \quad 78b)$$

Digitized by Google

Nun ist:

$$V_\mu(o) = -\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}$$

$$V'_\mu(o) = m_\mu$$

$$\int_o^l V_\mu \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(o) = -\frac{1}{m_\mu} \cdot \left[\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l\right]$$

$$\int_o^l V_\mu^2 \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu^2(o) = \frac{1}{2 \cdot m_\mu} \cdot \left[m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2\, m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)\right]$$

und damit wird:

$$A_\mu = \frac{2 \cdot J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2\, m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gl. (74) erhält man leicht nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} e &= e^{-\alpha_1 t} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \\ i &= e^{-\alpha_1 t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \end{aligned}\right\} \qquad 79)$$

mit:

$$F(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 \cdot m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi \pm \sin m_\mu \cdot \xi\right). \qquad 79a)$$

Das —-Zeichen in der letzten Klammer gilt für den Stern.

Bevor wir nun zur Auswertung dieses Ausdruckes schreiten können, sind wir gezwungen, etwas näher auf die Bestimmungsgleichung (77) für die Wellenlängen einzugehen. Man erkennt, daß das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung mit wachsender Ordnungszahl μ sehr bald auf einen gegenüber dem ersten Gliede unwesentlichen Betrag herabsinkt, besonders dann, wenn es sich um den praktisch weitaus am wichtigsten Fall handelt, daß die Selbstinduktion λ groß gegenüber der gesamten Selbstinduktion der abgeschalteten Leitung, und die Kapazität des Schutzkondensators K nicht wesentlich kleiner als die Kapazität der Leitung ist. Die Fig. 24 zeigt dies sehr deutlich, dieselbe wurde unter Voraussetzung folgender Verhältnisse gezeichnet:

$$\frac{L}{\lambda} = 0{,}1$$

$$\frac{C}{K} = 1.$$

Dieselbe Figur läßt auch erkennen, daß in den Punkten P_1, P_2, P_3 ... die Gl. (77) erfüllt ist, und daß die Lösung dieser Gleichung wie folgt angeschrieben werden kann:

Digitized by Google

$$m_\mu \cdot l = (2 \cdot \mu - 3) \cdot \frac{\pi}{2} + \varepsilon_\mu \qquad \text{für } \mu > 1, \tag{80}$$

wo ε_μ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und mit wachsender Ordnungszahl μ sich der Zahl Null unbegrenzt nähert. Die eben angeschriebene Gleichung gilt nicht für $\mu = 1$. Wir kommen somit zu dem Ergebnis, daß die Gl. (77) eine unendliche Anzahl von positiven Wurzeln besitzt und daß diese sich mit wachsender Ordnungszahl μ ganzzahligen Vielfachen der

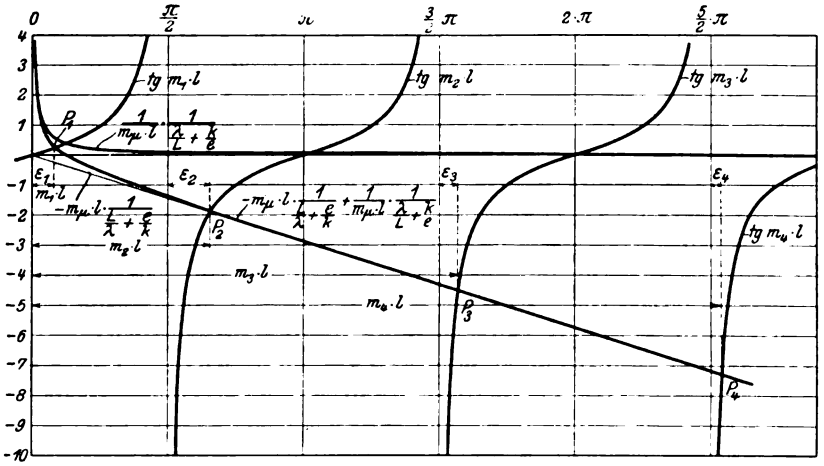


Fig. 24.

Zahl π nähern; die Reihe der Einzelschwingungen, aus welchen sich die Funktion $F(\xi)$ zusammensetzt, kann somit von irgendeiner Ordnungszahl $\mu = k$ ab mit genügender Annäherung als harmonisch betrachtet werden. Die Zahl liegt um so niedriger, je größer der Parameter $\frac{1}{\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}}$ unseres Schwingungskreises ist.

Wir werden den nun folgenden Betrachtungen die Annahme voraussetzen, daß die Werte von $\frac{L}{\lambda}$ und $\frac{C}{K}$ die eben angeschriebenen Zahlen nicht wesentlich überschreiten. Wir können dann, wie aus Fig. 24 hervorgeht, von $\mu = 3$ ab den Winkel ε_μ gegenüber $\frac{\pi}{2}$ als klein betrachten, ohne hierdurch einen großen Fehler zu begehen; somit können wir anschreiben:

$$m_k \cdot l = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } k = 1, 2, 3 \ldots, \tag{80a}$$

wo

$$k = \mu - 2.$$

Zur Untersuchung der Funktion $F(\xi)$ ist es nun vorteilhaft, dieselbe in eine Funktion:

$$G(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=2} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2\, m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi \pm \sin m_\mu \cdot \xi\right), \tag{81a}$$

Digitized by Google

welche die Grundwelle und die nächstfolgende Oberwelle, und in eine Funktion:

$$H(\xi) = J \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_k \cdot l + \cos m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2\, m_k \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_k \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_k \cdot \xi \pm \sin m_k \cdot \xi\right), \quad 81b)$$

welche die Gesamtheit der weiteren Oberwellen enthält, zu zerlegen. Die Funktion G (ξ) kann, nachdem mittels Gl. (77) die Wellenlängen $\frac{m_1}{2 \cdot \pi}$ und $\frac{m_2}{2 \cdot \pi}$ bestimmt sind, leicht berechnet werden. Für die Funktion H (ξ) werden wir einen Näherungsausdruck entwickeln und dabei von der Gl. (80a) Gebrauch machen.

Wir hatten:

$$m_k \cdot l = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dann wird:

$$\sin m_k \cdot l = (-1)^k$$

$$\sin 2 \cdot m_k \cdot l = 0$$

$$\cos 2 \cdot m_k \cdot l = -1.$$

Zur Berechnung von cos $m_k \cdot l$ machen wir von folgender Beziehung Gebrauch:

$$\cos m_k \cdot l = (-1)^{k+1} \cdot \sin \varepsilon_k.$$

Nun ist:

$$\sin \varepsilon_k = \operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{-1}{\operatorname{tg} m_k \cdot l},$$

da ε_k doch ein kleiner Winkel ist.

Ferner ergibt sich aus Gl. (77) bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes der rechten Seite:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} m_k \cdot l} = -\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}\right).$$

Dies ergibt:

$$\cos m_k \cdot l = \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}\right).$$

Im Nenner von Gl. (81b) können sämtliche außer $m_k \cdot l$ noch verbleibenden Glieder neben diesem vernachlässigt werden. Wir gewinnen dann folgenden Ausdruck für die Funktion H (ξ):

$$H(\xi) = -\frac{4}{\pi^2} \cdot J \cdot \frac{C}{K} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty}{}' \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^3} \cdot \cos (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l} \pm \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^2} \cdot \sin (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l}\right]. \quad 81c)$$

Nun wissen wir aus dem 10. Abschnitte, daß:

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty}{}' \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^2} \cdot \sin (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{l},$$

Digitized by Google

gültig im Intervall:

$$-1 < \frac{\xi}{l} < +1.$$

Es ist dies die durch Fig. 21 dargestellte Funktion.

Durch Integration folgt hieraus

$$\frac{8}{\pi^3} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^3} \cdot \cos(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{\xi}{l} \right)^2 - 1 \right),$$

ebenfalls gültig im Bereiche:

$$-1 < \frac{\xi}{l} < +1.$$

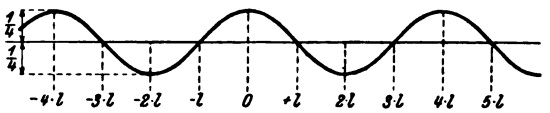


Fig. 25.

Die durch diese Reihenentwicklung dargestellte Funktion zeigt die Fig. 25.

Wenn wir nun die eben erhaltenen Summenformeln in die Gl. (81c) einführen, so müssen wir die Grundwellen (k = 0), da Gl. (81c) diese ja nicht enthält, wieder abziehen. Wir müssen also schreiben:

$$H(\xi) = -\frac{4}{\pi^2} \cdot J \cdot \frac{C}{K} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\cos(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l}}{(2 \cdot k + 1)^3} \pm \frac{\sin(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l}}{(2 \cdot k + 1)^2} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l} \mp \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l} \right\} \qquad 81d)$$

Diese beiden Wellen mit der Ordnungszahl k = 0, sowie die beiden in der Funktion G(ξ) enthaltenen Oberschwingungen (μ = 2) ergeben zusammen eine Funktion, welche eine ähnliche Rolle spielt wie die Funktion D(ξ) des 4. Abschnittes.

13. Der Verlauf des Ausgleichsvorganges. Wir wollen nun noch kurz die auf der abgeschalteten Leitung sich abspielenden Vorgänge betrachten, wobei wir das schon einmal gewählte Beispiel beibehalten werden, nämlich:

$$\frac{L}{\lambda} = 0{,}1,$$

$$\frac{C}{K} = 1.$$

Die Fig. 26 und 27 zeigen, daß die Funktion

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 \cdot m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right\}} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi + \sin m_\mu \cdot \xi\right)$$

das genaue Spiegelbild der Funktion

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 \cdot m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\, m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi - \sin m_\mu \cdot \xi\right)$$

Digitized by Google

ist. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen, denn es ist ja die bezüglich des Punktes $\frac{\xi}{l} = 0$ ungerade Sinusfunktion, welche in beiden Fällen das Vorzeichen wechselt.

Mit Hilfe der Kurven Fig. 26 und 27 kann nun der räumliche Verlauf des Ausgleichsvorganges in genau derselben Weise konstruiert werden, wie wir es bei den früheren Beispielen schon gesehen haben; die Fig. 28 zeigt das Ergebnis.

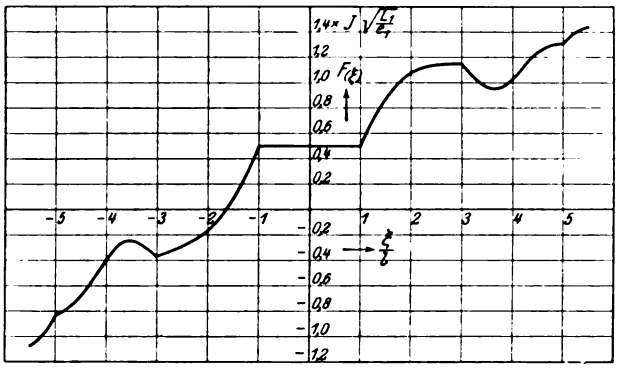


Fig. 26.

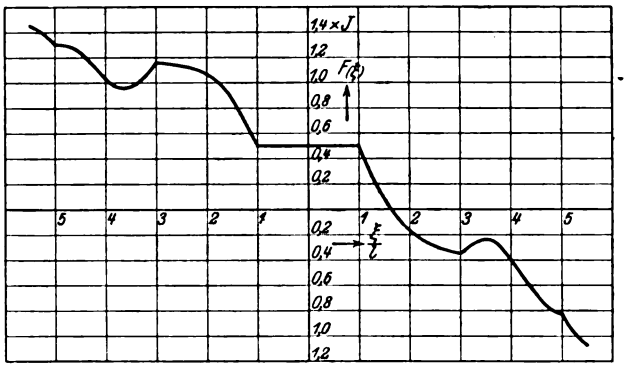


Fig. 27.

Der hauptsächlichste Unterschied im Verhalten der induktiv belasteten gegenüber der einfach kurzgeschlosseenn Leitung liegt nun darin, daß die im Punkte $x = 0$ ankommenden Spannungswellen nicht mehr mit umgekehrtem, sondern mit gleich bleibendem Vorzeichen reflektiert werden. Der physikalische Grund hierfür ist folgender: Die Drosselspule λ sucht vermöge der in ihr aufgespeicherten magnetischen Energie den Kurzschlußstrom J aufrechtzuerhalten. Die vom Unterbrechungspunkte aus auf sie zueilenden Stromwellen, welche entgegengesetztes Vorzeichen wie der Kurzschlußstrom J besitzen, werden aus diesem Grunde von ihr unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert, so daß, da ankommende und reflektierte Wellen stets gleiche Höhe besitzen, der Strom J erhalten bleibt. (Dies gilt streng genommen allerdings nur bei unendlich großer Selbstinduktion λ, in Wirklichkeit nimmt der Strom im Punkte $x = 0$ in dem Maße ab, in welchem die Drosselspule die in ihr aufgespeicherte magnetische Energie in Form elektrischer Energie an die Leitung abgibt.) Den so reflek-

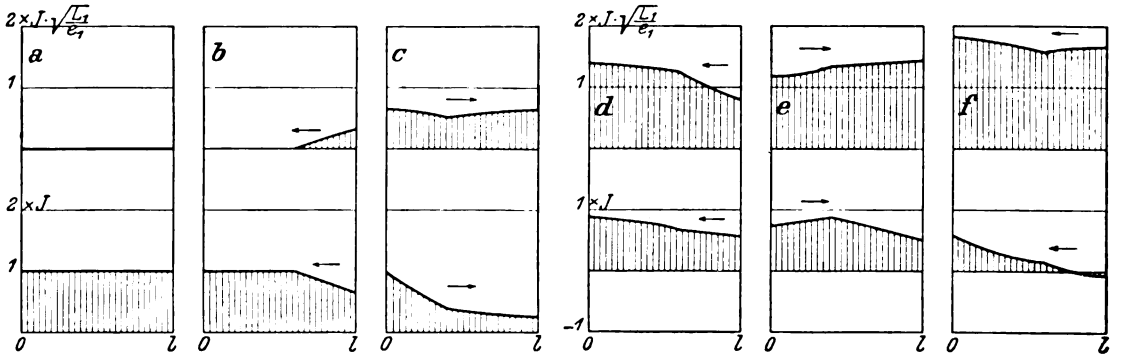


Fig. 28.

Digitized by Google

tierten positiven Stromwellen entsprechen natürlich auch Spannungswellen mit gleichem Vorzeichen, welche sich zu den ankommenden Spannungswellen addieren.

Wäre im Punkte $x = l$ kein Kondensator vorhanden, so würden die von der Drosselspule ausgehenden Spannungswellen dort ebenfalls mit gleichem Vorzeichen reflektiert werden, und die Spannung auf unserer Leitung würde sich weiterhin erhöhen[1]). Hier zeigt nun Fig. 28 die günstige Wirkung des Kondensatorschutzes; der Kondensator wirft aufprallende Spannungswellen unter Umkehrung des Vorzeichens zurück und bewirkt so jedesmal ein ganz erhebliches Heruntergehen der Spannung.

Die Schutzwirkung des Kondensators erhellt auch aus folgender Überlegung: Der ganze, auf unserer Leitung sich abspielende Ausgleichsvorgang beruht darauf, daß die in der Drosselspule aufgespeicherte magnetische Energie zu gewissen Zeiten in Form elektrischer Energie auf der Leitung aufgespeichert ist; die auf unserer Leitung auftretende höchste Spannung wird also um so größer werden, je größer die Selbstinduktion λ der Drosselspule und je kleiner die Kapazität C der Leitung ist. Indem wir also die Kapazität unserer Leitung durch Hinzunahme des Schutzkondensators künstlich vergrößern, drücken wir die zu erwartende Unterbrechungsüberspannung im selben Maße herunter.

Die Energiegleichung lautet:

$$\frac{1}{2} \cdot e_u^2 \cdot C = \frac{1}{2} \cdot J^2 \cdot \lambda.$$

Hierin bedeutet e_u die höchste auftretende Überspannung, von der Verlustdämpfung sehen wir ab.

Hieraus ergibt sich:

$$e_u = J \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Schalten wir nun den Schutzkondensator an unsere Leitung, so geht diese Gleichung über in:

$$e_{uK} = J \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{C + K}}.$$

Hieraus:

$$\frac{e_{uK}}{e_u} = \sqrt{\frac{C}{C + K}}. \qquad 82)$$

Wir sehen also schon, wir müssen dem Kondensator recht erhebliche Dimensionen geben, wenn wir mit demselben eine nennenswerte Schutzwirkung gegen die absolute Höhe der auftretenden Unterbrechungsüberspannung erzielen wollen. Man wird sich bei der Dimensionierung des Kondensatorschutzes im allgemeinen mit der Abflachung der unstetigen Spannungssprünge begnügen; die Figur zeigt, daß der Kondensator die ursprünglich senkrechte Front der hin- und herlaufenden Wellen in durchgreifender Weise umbildet.

14. Zusammenfassung. Die Behandlung der Schutzwirkung von Drosselspulen und Kondensatoren gegen Wanderwellen, darauf fußend, daß man die zu erwartenden freien Schwingungen der Spannung und des Stromes in eine unendliche Anzahl von Sinusschwingungen, die Eigenschwingungen des betr. schwingenden Systems zerlegt, führt, wenn man die auf den zu beiden Seiten der Schutzapparate liegenden Leitungen auftretenden Strom- und Spannungswellen untersuchen will, auf schwierig zu behandelnde unendliche Reihen. Der Verfasser zog es aus diesem Grunde vor, sich eines Ersatzschemas zu bedienen, welches das Eindringen einer rechtecksförmigen Wanderwelle in die z. B. durch eine Drosselspule geschützte Wicklung auf einen einfachen Schaltvor-

[1]) K. W. Wagner, Leipzig 1908, Kapitel 10.

Digitized by Google

gang zurückzuführen gestattet; dieses Ersatzschema bildet die Wirklichkeit mit genügender Annäherung nach. Die vor der Drosselspule sich abspielenden Vorgänge gehen dadurch zwar der Beurteilung verloren, aber sie interessieren uns hier ja auch nicht in dem Maße wie gerade die in der Wicklung zu erwartenden Erscheinungen.

Die Untersuchungen des Verfassers bestätigen die bekannte Erscheinung, daß die vor die zu schützende Wicklung geschaltete Seriendrosselspule eine Abflachung der senkrechten Stirn ankommender Wanderwellen bewirkt; für das Maß der Abflachung der Wanderwellenstirn ist allein ausschlaggebend das Verhältnis der Selbstinduktion der Schutzdrosselspule zur gesamten Selbstinduktion der zu schützenden Wicklung. Die Drosselspule kann jedoch, selbst bei Werten des Selbstinduktionskoeffizienten derselben, wie sie für die praktische Ausführung niemals in Frage kämen, nicht verhindern, daß bei zwischen Erde und Leitung verlaufenden Wanderwellen genügender Länge (durch atmosphärische Störungen entstanden) die Spannung der Wicklung gegen Erde sich auf nahezu den vierfachen Wert der Wanderwellenspannung hinaufarbeitet.

Es wird ferner das Verhalten der mittels Kondensators geschützten Maschinenwicklung beim Abschalten untersucht, und es zeigt sich, daß der Kondensator nicht nur die steile Front der Unterbrechungsüberspannungswellen abflacht, sondern bei genügender Dimensionierung desselben auch die absolute Höhe dieser Wellen herunterdrückt. Maßgebend für das Verhalten des Kondensators ist, ähnlich wie bei der Drosselspule, das Verhältnis der Kapazität desselben zur gesamten Kapazität der Wicklung.

Ähnlich verhält sich der Kondensator beim Abschalten der induktiv belasteten Leitung. Nur kann hier leicht der Fall eintreten, daß, um eine genügende Herabsetzung der absoluten Höhe der auftretenden Überspannungen zu erreichen, der Kondensator derartige Dimensionen beansprucht, daß sich dem aus wirtschaftlichen Gründen Schwierigkeiten in den Weg stellen.

Die Wechselwirkung schräg stehender Solenoide mit Eisenkernen.

Von

H. Lorenz, Danzig.

Die Berechnung der Wechselwirkung beliebig geformter und gegeneinander angeordneter Solenoide bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, solange ihre Leiter als lineare angesehen werden dürfen und durchweg in dasselbe Medium von konstanter magnetischer Permeabilität eingebettet sind. Ist beides nicht der Fall, so werden die Koeffizienten der gegenseitigen und Selbstinduktion nicht nur infolge der Hautwirkung von der Periode der Wechselströme abhängig, sondern auch durch die Veränderlichkeit der Permeabilität von der Stromstärke derart beeinflußt, daß von einer genauen Berechnung keine Rede mehr sein kann. Damit aber wäre jedem Versuche einer Theorie elektrischer Maschinen, die ausnahmslos derartige gegeneinander drehbare Solenoide mit Eisenkernen als Anker und Feldmagnete besitzen, der Boden entzogen, wenn es nicht gelingt, eine, wenn auch nur grobe Näherungslösung des Problems anzugeben.

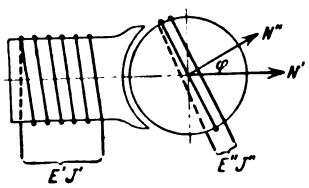


Fig. 1.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in Fig. 1 zwei aus linearen Windungen bestehende Spulen mit Eisenkernen von den Querschnitten F_1 und F_2 und den mittleren Achsenlängen l_1 und l_2 um den Winkel φ gegeneinander verdreht. Die Windungszahlen der Spulen seien n_1 und

Digitized by Google

n_2, die Widerstände der Einzelwindungen bzw. W_1 und W_2. Leiten wir nun durch die Spulen die Ströme J' und J'', so bedingen diese in den Eisenkernen parallel den Achsen die Kraftlinienzahlen N' und N''. Betrachten wir die hier hervorgerufenen Kraftfelder als homogen und sehen außerdem von der Streuung der Kraftlinien ab, so tritt zu der Kraftlinienzahl N' der ersten Spule noch die in ihre Achse fallende Komponente N'' cos φ der zweiten und zu der Kraftlinienzahl N'' die in ihre Achse fallende Komponente N' cos φ der ersten Spule. Insgesamt werden also beide Spulen in ihrer Achsenrichtung durchsetzt von den Kraftlinienzahlen

$$N' + N'' \cos\varphi \quad \text{bzw.} \quad N'' + N' \cos\varphi,$$

deren zeitliche Änderungen nach dem Induktionsgesetz elektromotorischer Kräfte in den Spulen wecken. Mit Rücksicht auf die Widerstände ergeben sich die gesamten elektromotorischen Kräfte der Spulen demnach zu

$$\left.\begin{aligned} E' &= n_1 W_1 J' + n_1 \frac{d}{dt}(N' + N'' \cos\varphi) \\ E'' &= n_2 W_2 J'' + n_2 \frac{d}{dt}(N'' + N' \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit J'dt bzw. J''dt und addieren, so wird

$$(E' J' + E'' J'')\, dt = (n_1 W_1 J'^2 + n_2 W_2 J''^2)\, dt + n_1 J'\, d(N' + N'' \cos\varphi) + \\ + n_2 J''\, d(N'' + N' \cos\varphi) \quad 2)$$

Hierin stellt die linke Seite die gesamte elektrische Energiezufuhr im Zeitelemente, das erste Glied rechts dagegen den Verlust durch die Stromwärme in den Spulen dar.

Fällt bei konstantem Winkel φ die äußere Arbeit fort, so sind die übrigen beiden Glieder rechts nichts anderes als die auf die Eisenkerne und den sie umgebenden Luft raum entfallenden Energiebeträge. Diese aber zerlegen sich nach dem Schema[1])

$$n J \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\, dV + \frac{1}{\lambda} \int j^2\, dV, \quad 3)$$

worin $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{B}$ die von ihr herrührende Induktion, λ die elektrische Leitfähigkeit des Kernmaterials, j die spezifische Wirbelstromstärke und dV das Volumelement bedeutete. Die Induktion kann man nun nach Fig. 2 angenähert in die Glieder

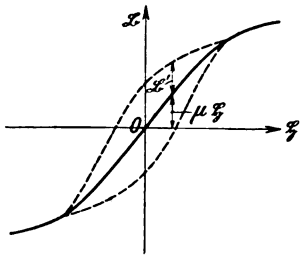


Fig. 2.

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{B}' \quad 4)$$

zerlegen, von denen das erste, bei konstanter Permeabilität μ der Feldstärke proportionale Bestandteil der umkehrbaren Magnetisierung entspricht, während das zweite der Hysteresisschleife zukommt. Damit wird aus (3) nach Multiplikation mit dt, wenn, wie in unserem Problem, vorläufig nur zeitliche Änderungen in Frage stehen,

$$n J\, dN = \frac{1}{8\pi} \mu \mathfrak{H}^2\, dV + \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}'\, dV + \frac{dt}{\lambda} \int j^2\, dV, \quad 3a)$$

d. h. die den Spulenkernen zugeführte Arbeit zerfällt in den Zuwachs an elektromagnetischer Feldenergie, in Hysteresisarbeit und in Wirbelstromwärme. Da nun nach der bekannten Näherungsformel

$$4\pi n J = \mathfrak{H} l \quad 5)$$

[1]) Vgl. Lorenz: Bemerkungen zur Theorie der Eisenverluste in Spulenkernen. Archiv für Elektrotechnik. 1915. Heft 3.

Digitized by Google

die als konstant anzusehende mittlere Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern eines Solenoides von der Länge l der Stromstärke in den umgebenden Windungen proportional ist, so gilt dies auch von der zugehörigen Kraftlinienzahl

$$N = \mu \mathfrak{H} F = \frac{4\pi \mu n J \cdot F}{l} \qquad 5a)$$

Bezeichnen wir nunmehr die elektromagnetische Feldenergie in unserem Falle mit U, so haben wir dafür einerseits den Ausdruck

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 dV, \qquad 6)$$

worin die Intregation auf beide Spulenkerne und den zwischen ihnen befindlichen, von Kraftlinien durchzogenen Spalt zu erstrecken ist, während im Außenraume, wie schon in der Näherungsgleichung (5), die Feldstärke als verschwindend klein betrachtet werden darf. Andererseits aber dürfen wir für die Änderung dieser Energie nach (3a) unter Einführung der Faktoren L_1 und L_2 durch die analog (5) gebauten Gleichungen

$$N' = L_1 J' \qquad N'' = L_2 J'' \qquad 7)$$

auch schreiben

$$dU = n_1 J' d(L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi) + n_2 J'' d(L_2 J'' + L_1 J' \cos\varphi) \qquad 8)$$

oder geordnet bei konstant gehaltenem Winkel φ

$$dU = n_1 L_1 J' dJ' + n_2 L_2 J'' dJ'' + (n_1 L_2 J' dJ'' + n_2 L_1 J'' dJ') \cos\varphi \qquad 8a)$$

Da die elektromagnetische Energie nur eine Funktion der beiden willkürlich veränderlichen Stromstärken J' und J'' ist, so hat man auch

$$dU = \frac{\partial U}{\partial J'} dJ' + \frac{\partial U}{\partial J''} dJ'' \qquad 9)$$

oder nach Vergleich mit (8a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial J'} &= n_1 L_1 J' + n_2 L_1 J'' \cos\varphi \\ \frac{\partial U}{\partial J''} &= n_2 L_2 J'' + n_1 L_2 J' \cos\varphi \end{aligned}\right| \qquad 9a)$$

und daraus

$$\frac{\partial^2 U}{\partial J' \partial J''} = n_2 L_1 \cos\varphi = n_1 L_2 \cos\varphi \qquad 9b)$$

also unter Einführung eines neuen Faktors L

$$n_1 L_2 = n_2 L_1 = n_1 n_2 L \qquad 10)$$

Damit aber geht das Energieelement (8a) über in

$$dU = L(n_1^2 J' dJ' + n_2^2 J'' dJ'' + n_1 n_2 d(J' J'')\cos\varphi) \qquad 8b)$$

und liefert integriert mit U = o für J' = J'' = o

$$U = \frac{L}{2}(n_1^2 J'^2 + n_2^2 J''^2 + 2 n_1 n_2 J' J'' \cos\varphi) \qquad 8c)$$

Schreibt man dafür, wie üblich,

$$U = \frac{1}{2}(L_{11} J'^2 + L_{22} J''^2 + 2 L_{12} J' J''), \qquad 11)$$

Digitized by Google

so erkennt man, daß sowohl die sog. Selbstinduktanzen beider Spulen

$$\left.\begin{aligned} L_{11} &= n_1^2 L = n_1 L_1 \\ L_{22} &= n_2^2 L = n_2 L_2 \end{aligned}\right\} \qquad 11a)$$

als auch deren gegenseitige Induktanz

$$L_{12} = n_1 n_2 L \cos\varphi \qquad 11b)$$

durch die eine Konstante L bestimmt sind, zu deren Ermittlung wir auf den Ausdruck (6) zurückgreifen müssen. Dessen rechte Seite zerlegen wir nach Fig. 1 in die Energie der festen Spule, des Luftspaltes uud der drehbaren Spule, deren Volumina wir mit V_1 V_0 und V_2 bezeichnen, während die darin herrschenden Feldstärken $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_2$ und die entsprechenden Permeabilitäten μ_1 μ_0 und μ_2 sein mögen. Dann wird aus (6)

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mu_1 \mathfrak{H}_1^2 \, dV_1 + \frac{1}{8\pi}\int \mu_0 \mathfrak{H}_0^2 \, dV_0 + \frac{1}{8\pi}\int \mu_2 \mathfrak{H}_2^2 \, dV_2 \qquad 6a)$$

oder, wenn die Feldstärken angenähert als homogen in den drei Räumen angesehen werden dürfen,

$$U = \frac{1}{8\pi}(\mu_1 \mathfrak{H}_1^2 V_1 + \mu_0 \mathfrak{H}_0^2 V_0 + \mu_2 \mathfrak{H}_2^2 V_2) \qquad 6b)$$

Diese Feldstärken zerfallen nun in je zwei Komponenten, von denen wir die mit der Achse der festen Spule gleichgerichteten, von dem Kraftfluß

$$N' + N'' \cos\varphi = L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi$$

herrührenden mit den Querschnitten F_1 F_0 und F_2, von denen der letztere sich durch die Drehung entsprechend Fig. 1 nicht ändern soll, sofort zu

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_{x_1} &= \frac{L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi}{\mu_1 F_1} \\ \mathfrak{H}_{x_0} &= \frac{L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi}{\mu_0 F_0} \\ \mathfrak{H}_{x_2} &= \frac{L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi}{\mu_2 F_2} \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

angeben können. Demgegenüber sind die Querschnitte des hierzu normalen Kraftflusses

$$N'' \sin\varphi = L_2 J'' \sin\varphi$$

in den drei Räumen nicht ohne weiteres bekannt. Wir wollen sie vorläufig mit F_{y1} F_{y0} F_{y2} bezeichnen und erhalten damit die Normalkomponente der Feldstärken

$$\mathfrak{H}_{y1} = \frac{L_2 J'' \sin\varphi}{\mu_1 F_{y1}}, \qquad \mathfrak{H}_{y0} = \frac{L_2 J'' \sin\varphi}{\mu_0 F_{y0}}, \qquad \mathfrak{H}_{y2} = \frac{L_2 J'' \sin\varphi}{\mu_2 F_{y2}} \qquad 13)$$

Setzenwir nunmehr die Ausdrücke (12) und (13) in die Energieformel (6b) ein und schreiben gleichzeitig für die Volumina

$$V_1 = F_1 l_1, \quad V_0 = F_0 l_0, \quad V_2 = F_2 l_2, \qquad 14)$$

worin l_0 die mittlere Breite des Luftspaltes bedeutet, so wird daraus

$$U = \frac{(L_1 J' + L_2 J'' \cos\varphi)^2}{8\pi}\left(\frac{l_1}{\mu_1 F_1} + \frac{l_0}{\mu_0 F_0} + \frac{l_2}{\mu_2 F_2}\right) + \frac{L_2^2 J''^2 \sin^2\varphi}{8\pi}\left(\frac{l_1 F_1}{\mu_1 F_{y1}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{l_0 F_0}{\mu_0 F_{y0}^2} + \frac{l_2 F_2}{\mu_2 F_{y2}^2}\right) \qquad 15)$$

Digitized by Google

oder mit Rücksicht auf (10)

$$U = \frac{L^2}{8\pi}(n_1 J' + n_2 J'' \cos\varphi)^2 \left(\frac{l_1}{\mu_1 F_1} + \frac{l_0}{\mu_0 F_0} + \frac{l_2}{\mu_2 F_2}\right) + \\ + \frac{L^2}{8\pi} n_2^2 J''^2 \sin^2\varphi \left(\frac{l_1 F_1}{\mu_1 F_{y1}^2} + \frac{l_0 F_0}{\mu_0 F_{y0}^2} + \frac{l_2 F_2}{\mu_2 F_{y2}^2}\right) \qquad 15a)$$

Nach Gleichsetzen dieser Formel mit (8c) ergibt dann die Übereinstimmung der Faktoren von J'^2, J''^2, und $J' J''$ die gesuchte Konstante

$$L = \frac{4\pi}{\frac{l_1}{\mu_1 F_1} + \frac{l_0}{\mu_0 F_0} + \frac{l_2}{\mu_2 F_2}} \qquad 16)$$

und außerdem die Bedingungsgleichung

$$\frac{l_1}{\mu_1 F_1}\left(\frac{F_1^2}{F_{y1}^2} - 1\right) + \frac{l_0}{\mu_0 F_0}\left(\frac{F_0^2}{F_{y0}^2} - 1\right) + \frac{l_2}{\mu_2 F_2}\left(\frac{F_2^2}{F_{y2}^2} - 1\right) = 0, \qquad 17)$$

die indessen umsoweniger von Interesse ist, als sie zur Berechnung der unbekannten Querschnitte F_{y1}, F_{y0}, F_{y2} des Normalkraftflusses nicht ausreicht.

Zu denselben Formeln (16) und (17) bzw. zu (10) wäre man auch gelangt durch Gleichsetzen des Differentials von (15) mit (8a) ohne Zuhilfenahme der Gl. (9). Schließlich hätten wir mit Rücksicht auf die Konstanz der Faktoren L_1 und L_2 bzw. von L deren Berechnung unter Zugrundelegung einer besonders bequemen gegenseitigen Lage der Spulen vornehmen können. Als solche bietet sich zwangslos der Fall $\varphi = 0$, d.h. die koachsiale Lage dar, in welcher die beiden Spulen auf den Amperewindungen $n_1 J' + n_2 J''$ deren gesamten Kraftfluß N umschlingen. Alsdann gilt analog (5) unter Vernachlässigung der nur kleinen Feldstärke im Außenraum

$$4\pi(n_1 J' + n_2 J'') = \mathfrak{H}_1 l_1 + \mathfrak{H}_0 l_0 + \mathfrak{H}_2 l_2 \qquad 18)$$

Wegen

$$N = \mu_1 \mathfrak{H}_1 F_1 = \mu_0 \mathfrak{H}_0 F_0 = \mu_2 \mathfrak{H}_2 F_2 \qquad 19)$$

sowie nach Zerlegung in

$$N = N' + N'' = L_1 J' + L_2 J'' \qquad 20)$$

haben wir dafür auch

$$4\pi(n_1 J' + n_2 J'') = (L_1 J' + L_2 J'')\left(\frac{l_1}{\mu_1 F_1} + \frac{l_0}{\mu_0 F_0} + \frac{l_2}{\mu_2 F_2}\right) \qquad 18a)$$

Die Übereinstimmung der Faktoren von J' und J'' auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert dann wieder die Formeln (10) und (16).

Hiernach scheint es fast, als wäre die zuletzt gegebene viel einfachere Ableitung allgemeiner, als die auf der Energiegleichung beruhende, bei der wir in Gl. (12) voraussetzen mußten, daß der Querschnitt F_2 des Kraftflusses in der drehbaren Spule in der Achsenrichtung der feststehenden unabhängig von Drehwinkel φ sein sollte. Dies aber setzt streng genommen die in Fig. 1 gezeichnete Scheiben- oder auch eine Ringform des Eisenkernes der drehbaren Spule voraus, während bei koaxialen Spulen eine solche Einschränkung nicht besteht. Man braucht aber im Falle zylindrischer Eisenkerne beider Spulen lediglich eine Verdrehung vorzunehmen, um einzusehen, daß alsdann weder im Spalt, noch in der gedrehten Spule der von der feststehenden ausgehende Kraftfluß auch nur angenähert homogen sein kann. Diese Annahme ist also die allgemeine Voraussetzung für die in Gl. (1) benutzte vektorielle Zusammensetzung der Kraftfelder und damit der Konstanz der Faktoren L_1 L_2 und L.

Wenn man demnach auch für andere als scheiben- oder ringförmige Anker diese Induktionsfaktoren (10) und (16) benutzt, so darf man nicht übersehen, daß hierin eine über die Grundannahmen hinausgehende Vernachlässigung liegt, welches nicht ohne störenden Einfluß auf etwaige Schlußfolgerungen sein kann.

Digitized by Google

Behufs Verallgemeinerung unserer Untersuchung auf drehbare Spulen kehren wir nun noch einmal zur Energiegleichung (2) zurück und schreiben diese unter Beachtung von (3a) und (6) in der Form[1])

$$(E' J' + E'' J'') dt = (n_1 W_1 J'^2 + n_2 W_2 J''^2) dt + \frac{dt}{\lambda_1}\int j^2 dV_1 + \frac{dt}{\lambda_2}\int j^2 dV_2$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}' d\mathfrak{B}' dN_1 + \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}'' d\mathfrak{B}'' dV_2$$
$$+ L[n_1^2 J^1 dJ^1 + n_2^2 J'' dJ'' + n_1 n_2 J' d(J'' \cos\varphi) + n_1 n_2 J'' d(J' \cos\varphi)] \qquad 2a)$$

Hierin bedeutet die linke Seite die im Zeitelement dt von außen zugeführte elektrische Energie, die erste Zeile rechts den Leitungsverlust in den Wicklungen und den Eisenkernen (durch Wirbelströme), die zweite Zeile rechts den Hysteresisverlust, während die letzte Zeile bei veränderlichem Winkel φ mit Rücksicht auf (8c) in den umkehrbaren Zuwachs der elektromagnetischen Feldenergie U und die mechanische Arbeitsleistung zerfällt. Wir dürfen darum hierfür unter Einführung des Drehmoments $\mathfrak{M}$ auch schreiben

$$L(n_1^2 J' dJ' + n_2^2 J'' dJ'' + n_1 n_2 d(J' J'' \cos\varphi)] + n_1 n_2 L J' J'' d\cos\varphi$$
$$= dU + \mathfrak{M} d\varphi, \qquad (2b)$$

wonach dieses Moment sich zu

$$\mathfrak{M} = n_1 n_2 L J' J'' \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -n_1 n_2 L J' J'' \sin\varphi \qquad 21)$$

ergibt. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von U nach (8c) ist aber auch

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \qquad 21c)$$

wobei die Stromstärken J' und J'' als von φ unabhängig betrachtet werden, während eine derartige Einschränkung für die Formel (21) nicht besteht, die somit ganz allgemein für alle gegeneinander drehbaren Spulen mit Eisenkern gilt.

Zusammenfassung. Aus dem Vergleich der umkehrbar zugeführten elektrischen Arbeit und der magnetischen Feldenergie zweier schräg stehender Spulen mit Eisenkernen, von denen die drehbar gedachte die Gestalt einer Kreisscheibe oder eines Kreisringes hat, deren Mittelpunkt in der Achse der feststehenden liegt, werden unter Vernachlässigung der Streuung, sowie der Feldstärke im Außenraum die Koeffizienten der gegenseitigen und Selbstinduktion abgeleitet und sämtlich auf eine und dieselbe Konstante zurückgeführt. Schließlich wird aus der Energiegleichung noch ein allgemein giltiger Ausdruck für das Drehmoment der beweglichen Spule abgeleitet.

[1]) Wie wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, beziehen sich die Größen $\mathfrak{H}' \mathfrak{B}' V_1$ wie schon $E' J' n_1 W_1$ auf die Statorspule, während die Größen $\mathfrak{H}'' \mathfrak{B}'' V_2$ sowie $E'' J'' n_2 W_2$ für die Rotorspule gelten.

Digitized by Google

Günstigste Schaltung der Vibrationsgalvanometer.

Von

W. Jaeger.

1. **Aufgabe.** Bei den Messungen mit den Vibrationsgalvanometern ist es, wie bei den analogen Gleichstrommessungen von Wichtigkeit, sich Rechenschaft zu geben 1. über die günstige Schaltungsweise der Galvanometer selbst bei einer gegebenen Meßanordnung, 2. über die günstigen Verhältnisse der Meßanordnung. Beide Fragen sind für Gleichstrommessungen in den wichtigsten Anordnungen (Wheatstone-, Thomson-Brücke, Differentialschaltung, Kompensationsanordnung) erledigt[1]).

Im folgenden soll bei Wechselstrommessungen die Frage unter 1., d. h. die günstigste Schaltungsweise der Vibrationsgalvanometer behandelt werden. Es wird sich daraus ein Maß für die bei Benutzung verschiedenartiger Instrumente zu erreichende Genauigkeit ergeben. Zunächst erscheint es aber zweckmäßig, die für Gleichstromgalvanometer geltenden Bedingungen nochmals kurz zu betrachten, da von vornherein anzunehmen ist, daß für Vibrationsinstrumente ähnliche Verhältnisse gelten, die aber hier noch durch neu hinzutretende Faktoren (Frequenz des Wechselstroms, Kurvenform, Induktivitäten und Kapazitäten) eine gewisse Komplikation erfahren.

2. **Günstigste Schaltung der Gleichstromgalvanometer.** Für die Gleichstrominstrumente gelten bekanntlich die folgenden Grundsätze, die später noch näher erläutert werden. Bei einem Nadelgalvanometer ist die günstige Schaltung dann vorhanden, d. h. das Galvanometer ergibt für eine bestimmte Spannungsänderung dann den größten Ausschlag, wenn der Widerstand der Windungen des Galvanometers dem Widerstand des äußeren Stromkreises gleich ist. Beim Drehspulgalvanometer dagegen muß im aperiodischen Grenzfall der Klemmenwiderstand gegenüber dem äußeren Widerstand möglichst klein sein[2]); bei diesem Instrument ist also der äußere Widerstand und der Gesamtwiderstand des Schließungskreises nahe identisch.

Es sei nun noch kurz erläutert, was unter der Bezeichnung „Äußerer Widerstand" bei diesen Betrachtungen zu verstehen ist. Es werde z. B. eine Wheatstone-Brücke (Fig. 1) ins Auge gefaßt, bei der die 4 Brückenzweige die Widerstände a, b, c, d besitzen, während in dem Galvanometerkreis außer dem Klemmenwiderstand g des Instruments noch ein Widerstand e vorhanden ist. Dann wird der äußere Widerstand gebildet durch die parallel geschalteten Widerstände a + c und b + d, vermehrt um den Widerstand e. Der Widerstand R des Hauptstromkeises spielt dagegen für die vorliegende Frage keine Rolle. Denn man kann annehmen, daß eine kleine Widerstandsänderung in einem der 4 Brückenzweige, die einen gewissen Ausschlag des Galvanometers hervorruft, im wesentlichen weiter keine Wirkung hat, als wenn man in den Galvanometerzweig g eine kleine elektromotorische Kraft einschalten würde. Wie groß diese Kraft ist, gehört nicht hierher, sondern zur anfangs erwähnten Frage 2. Man sieht also, daß man die Frage nach der günstigsten Schaltung des Galvanometers in der Wheatstone-Brücke zurückführen kann auf die Schal-

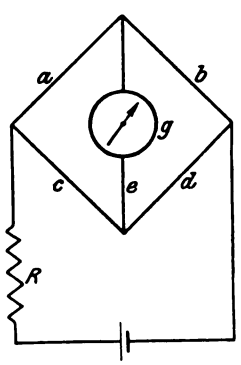


Fig. 1.

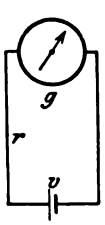


Fig. 2.

[1]) Vgl. hierüber W. Jaeger, Ztschr. f. Instrk. **26**, 69; 1906.

[2]) W. Jaeger, Ztschr. f. Instrk. **23**, 261 u. 353; 1903, **28**, 206; 1908. Ann. d. Phys. **21**, 64; 1906.

Digitized by Google

tung nach Fig. 2, in der v die oben erwähnte kleine elektromotorische Kraft bedeutet, und wo der „äußere Widerstand" r den Wert hat:

$$r = e + \frac{(a + c)(b + d)}{a + b + c + d}. \qquad 1)$$

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei anderen Meßanordnungen, das gleiche gilt auch für Wechselstromanordnungen; stets läßt sich eine Schaltung gemäß Fig. 2 supponieren. Die Frage lautet also, wie groß muß bei einer Anordnung nach Fig. 2 der Widerstand des Galvanometers gewählt werden, damit der größte Ausschlag erzielt wird; von der Größe von v ist diese Frage unabhängig.

Zur Beantwortung dieser Frage ist folgendes zu beachten. Die Galvanometer enthalten ein bewegliches System, das, wenn es sich selbst überlassen ist, nach den Gesetzen des gedämpften Pendels Schwingungen ausführt[1]). Dem System kommt eine bestimmte Schwingungsdauer zu, die im ungedämpften Zustand nur von der auf das System wirkenden Richtkraft D und dem Trägheitsmoment K abhängt. Die Schwingungsdauer T_0 im ungedämpften Zustand, für die man auch die Frequenz $\nu_0 = 1/T_0$ oder die Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi/T_0$ einführen kann, ist:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{K/D}, \quad \text{also} \quad \omega_0 = \sqrt{D/K}.$$

Wenn auf das bewegliche System eine äußere elektromagnetische Kraft einwirkt, so nimmt es, falls diese Kraft konstant ist, eine neue Gleichgewichtslage ein; es wird um einen Winkel aus der Nullage abgelenkt, der von der Stromempfindlichkeit des Galvanometers abhängt. Fließt dagegen ein Wechselstrom durch das Galvanometer, so gerät das System in erzwungene Schwingungen, die nach Ablauf einiger Zeit nicht mehr von der Eigenfrequenz ω_0 des Systems, sondern nur von der Frequenz ω des Wechselstroms abhängen.

Man hat nun im wesentlichen zwei Arten von Galvanometern zu unterscheiden, nämlich die Nadelgalvanometer, bei denen eine Magnetnadel im Feld einer Stromspule schwingt, und die Drehspulgalvanometer, bei denen die Spule beweglich ist und sich in einem konstanten Magnetfeld befindet. Die letzteren Galvanometer sind also nach dem Prinzip der Dynamomaschine gebaut. Wie eine nähere Untersuchung zeigt, hängt bei beiden Galvanometertypen die Stromempfindlichkeit von der Eigenfrequenz des beweglichen Systems ab, aber diese Abhängigkeit ist verschieden bei beiden Typen. Ferner ist die Empfindlichkeit abhängig von der Windungszahl und den Dimensionen der Spule.

Beim Nadelgalvanometer kann man nun annehmen, daß für die Spule ein bestimmter Wicklungsraum gegeben ist, und daß also die Stromempfindlichkeit davon abhängt, ob man diesen Raum mit dickerem oder dünnerem Draht ausfüllt. Wenn daher g den Widerstand der Spulen des Galvanometers bedeutet, so ist die Windungszahl, falls die Dicke der Isolation vernachlässigt werden kann, proportional $\sqrt{g}$. Um die Galvanometerangaben vergleichbar zu machen, bezieht man sie häufig auf den Fall, daß der Widerstand der Spule ein Ohm beträgt. Je größer der Widerstand g der Spule ist, um so größer ist die Stromempfindlichkeit der Meßanordnung; die Gesichtspunkte hierfür werden weiter unten besprochen. Beim Drehspulengalvanometer liegen die Verhältnisse anders; dieses Instrument ist am besten im aperiodischen Grenzzustand zu brauchen, d. h. dann, wenn es durch einen solchen Widerstand geschlossen wird, daß es gerade keine Schwingungen mehr ausführt. Der in diesem Fall auftretende Gesamtwiderstand des Schließungskreises spielt dann eine ähnliche Rolle wie der Spulenwiderstand beim Nadelgalvanometer. Von diesem Widerstand hängt die Stromempfindlichkeit ab, wenn man den aperiodischen

[1]) Vgl. z. B. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik (12. Aufl.), S. 519; 1914 und Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. II, S. 135 (A. Barth, Leipzig 1912).

Digitized by Google

Grenzzustand zugrunde legt. Dies Ergebnis kommt dadurch zustande, daß die Dämpfung beim Drehspulgalvanometer im wesentlichen von der in der Spule bei der Bewegung des Systems induzierten EMK abhängt, so daß sie also durch den Widerstand des Schließungskreises bedingt wird. Die Dämpfung hängt aber ferner von dem magnetischen Fluß ab, der auch für die Stromempfindlichkeit des Galvanometers bestimmend ist.

Unter „Widerstand des Galvanometers" wird also im folgenden zu verstehen sein: 1. beim Nadelgalvanometer der Spulenwiderstand, 2. beim Drehspulgalvanometer der Gesamtwiderstand des Schließungskreises im aperiodischen Grenzzustand (bei dem also die Spule gerade keine Schwingungen mehr ausführt)[1]). Bedeutet ε_0 die Stromempfindlichkeit des Galvanometers (z. B. den Ausschlag desselben in Skalenteilen für ein Mikroampere) für den Widerstand 1 Ohm und die Eigenfrequenz $\omega_0 = 1$ des beweglichen Systems (oder ganze Schwingungsdauer $T = 2\pi$ wegen $\omega = 2\pi/T$), so ist die Stromempfindlichkeit desselben Galvanometers bei einem Widerstand g (bzw. $g + r$) und einer Frequenz ω_0:

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Nadelgalvanometer:} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{g}}{\omega_0^2}, \\ &\text{beim Drehspulgalvanometer:} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{g + r}}{\sqrt{\omega_0}}\text{[2])}. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Beim Drehspulinstrument ist dabei vorausgesetzt, daß der Grenzwiderstand im wesentlichen durch die im Galvanometer bei der Bewegung der Spule induzierte EMK erreicht wird[3]).

Bezüglich des Widerstandes verhalten sich also beide Typen von Galvanometern gleich, d. h. bei beiden ist die Empfindlichkeit proportional der Wurzel aus dem Widerstand, hinsichtlich der Frequenz dagegen verschieden. Beim Nadelgalvanometer nimmt die Empfindlichkeit proportional dem Quadrat, beim Drehspulgalvanometer mit der Wurzel aus der Frequenz ab. Das Nadelgalvanometer ist also bei kleinen, das Drehspulgalvanometer bei großen Frequenzen des schwingenden Systems vorteilhafter.

Fließt daher durch das Galvanometer ein Strom von der Stärke J, so ist der Ausschlag gleich $J\varepsilon$. Bei der Anordnung nach Fig. 2 ist somit für das Nadelgalvanometer der Ausschlag proportional $\sqrt{g}/(r + g)$. Dieser Ausdruck hat ein Maximum für $g = r$, d. h. der Spulenwiderstand muß, wie allgemein bekannt ist, gleich dem äußeren Widerstand sein, damit ein Maximum des Ausschlags erreicht wird. Beim Drehspulgalvanometer dagegen ist der Ausschlag proportional $1/\sqrt{g + r}$, ist also am größten für $g = 0$ bzw. sehr klein gegen r. Der Widerstand der Spule wirkt hier als schädlicher Ballast, der Joulesche Wärme verbraucht. Das Instrument verhält sich wie ein von einer Stromquelle angetriebener Elektromotor, bei dem gleichfalls die Widerstände als schädlicher Ballast wirken. Die größte elektromagnetische Wirkung wird erreicht, wenn dieser Ballast möglichst klein ist[4]). Ich habe in der zitierten Mitteilung gezeigt, daß die Bedingung

[1]) Der aperiodische Grenzzustand ist deshalb für die Messungen mit dem Drehspulinstrument am günstigsten, weil bei einem größeren Widerstand des Schließungskreises die Empfindlichkeit herabgesetzt wird, bei einem kleineren Widerstand dagegen das Galvanometer „kriecht".

[2]) Vgl. Zitat S. 262 Anm. 2 $g + r$ ist hier also der oben angegebene Grenzwiderstand.

[3]) Die Formel für das Drehspulgalvanometer gilt unter der Annahme, daß bei einer Veränderung der Eigenfrequenz des beweglichen Systems die Direktionskraft D ungeändert bleibt. Bei kleinen Veränderungen der Frequenz durch Abstimmung wird aber in der Regel bei unverändertem Trägheitsmoment K die Direktionskraft geändert; dann ist statt $\omega^{1/2}$ zu setzen $\omega^{3/2}$. Bei den vorliegenden Betrachtungen, bei denen es sich um Vergleichung von Systemen von prinzipiell verschiedener Schwingungsdauer handelt, wird vorausgesetzt, daß diese Verschiedenheit bei gleichbleibender Direktionskraft durch Veränderung des Trägheitsmoments erzielt sei.

[4]) Diese Folgerung ist von Herrn H. Hansrath (Helios, Fach-Zeitschr. f. Elektrotechnik, 1909) zu Unrecht angefochten worden mit der Behauptung, daß für das Drehspulinstrument dieselben Bedingungen wie für das Nadelgalvanometer gelten.

Digitized by Google

eines im Verhältnis zum äußeren Widerstand kleinen Klemmenwiderstandes bei den meisten Drehspulinstrumenten verwirklicht ist[1]). Im Idealfall lautet also die Bedingung für das Drehspulinstrument, daß der Klemmenwiderstand null sein soll. Unter diesen Annahmen erhält man daher für den Ausschlag a der Instrumente $J\varepsilon = v\varepsilon/(r + g)$ oder:

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Nadelgalvanometer:} \quad a = \varepsilon_0 \frac{v}{2\sqrt{r \cdot \omega_0^2}} \\ &\text{beim Drehspulgalvanometer:} \quad a = \varepsilon_0 \frac{v}{\sqrt{r\,\omega_0}} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Größe ε_0, welche auch später noch eine Rolle spielt, heiße die Normalempfindlichkeit des Galvanometers. Man sieht, daß beim Nadelgalvanometer im Nenner noch der Faktor 2 auftritt, so daß seine Spannungsempfindlichkeit auch bei gleicher Stromempfindlichkeit ε (s. Gl. 2) nur die Hälfte derjenigen des Drehspulgalvanometers ist.

3. Vibrationsgalvanometer. Die Vibrationsgalvanometer[2]) unterscheiden sich prinzipiell nicht von den Gleichstromgalvanometern; sie haben nur eine viel kleinere Schwingungsdauer (größere Frequenz) und besitzen eine Vorrichtung zur leichten Veränderung der Frequenz durch Abänderung der Richtkraft (Abstimmung). In der Anwendung unterscheiden sie sich ferner dadurch, daß nicht ein dauernder Ausschlag, sondern die Amplitude von Schwingungen gemessen wird, die durch den Wechselstrom erzeugt werden (Verbreiterung eines Spaltbildes).

Im allgemeinen sind die Schwingungen gedämpft. Nimmt man an, daß die Dämpfung proportional der Winkelgeschwindigkeit des Systems erfolgt, so nehmen die Amplituden der Schwingung mit dem Faktor $e^{-p_0 t/2K}$ ab,[3]) werden also um so schneller gedämpft, je größer die Zeitkonstante $p_0/2K$ ist, in der p_0 die sogenannte Dämpfungskonstante bedeutet. Der Wechselstrom andererseits erzeugt erzwungene Schwingungen von der Frequenz des Wechselstroms, die sich den Eigenschwingungen des Systems überlagern, und die schließlich, wenn die Eigenschwingung infolge der Dämpfung abgeklungen ist, allein übrig bleiben. Es ist erwünscht, daß die Eigenschwingungen sehr rasch verschwinden, da sonst das Galvanometer einer Veränderung der Wechselstromschwingungen, z. B. bei der Einstellung in der Brücke, nicht rasch genug folgt.

Am günstigsten erscheint für den Gebrauch der Vibrationsgalvanometer der aperiodische Grenzzustand, bei dem die Gesamtdämpfungskonstante p mit der Richtkraft und der Trägheit des Systems durch die Beziehung

$$p^2 = 4\,K\,D \qquad 4)$$

verknüpft ist. Bei schwächerer Dämpfung treten störende Eigenschwingungen auf, die im Grenzfall nicht vorhanden sind; bei stärkerer Dämpfung dagegen wird, wie wir später sehen werden, die Amplitude herabgesetzt, also die Empfindlichkeit unnötig verkleinert.

Es ist dabei zu beachten, daß durch die Schwingungen des Systems eine elektromotorische Gegenkraft induziert wird, die gleichfalls dämpfend wirkt, bzw. die aufgedrückte Spannung verkleinert, und dadurch den Strom schwächt.

4. Empfindlichkeit des Vibrationsgalvanometers[4]). Für die Empfindlichkeitsbetrachtungen braucht man nur die erzwungenen Schwingungen ins Auge zu fassen, indem

[1]) Erst große Abweichungen von dieser Bedingung fallen praktisch ins Gewicht.

[2]) Nadel- oder Spulengalvanometer; die Saitengalvanometer werden hier nicht behandelt.

[3]) Vgl. Anm. 1, S. 263, Kohlrausch l. c.

[4]) Vgl. auch F. Wenner, Bull. Bur. of. Stand., Washington **6**, 347; 1910. — H. Zöllich, diese Zeitschrift **3**, 369; 1915. Bezüglich des Optimums komme ich zu einem anderen Ergebnis als diese Autoren.

Digitized by Google

man die Eigenschwingungen des beweglichen Systems als bereits abgeklungen ansieht. Benutzt man also sinusförmigen Wechselstrom, so sind auch die erzwungenen Schwingungen sinusförmig und man kann sich der symbolischen Bezeichnungsweise bedienen (die symbolischen Vektoren sind im folgenden mit Frakturbuchstaben bezeichnet). Hat der Wechselstrom die Frequenz ω und bedeutet $\mathfrak{x}$ den Winkelausschlag des Systems zur Zeit t, so ist also $d\mathfrak{x}/dt = j\omega\mathfrak{x}$ und $d^2\mathfrak{x}/dt^2 = -\omega^2\mathfrak{x}$ (wo $j = \sqrt{-1}$ ist). Wird ferner der Wechselstrom symbolisch mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet (absoluter Betrag von $\mathfrak{J}$ gleich Amplitude des Wechselstroms), so ist die auf das bewegliche System wirkende Kraft gleich $q\mathfrak{J}$, worin q die sogenannte dynamische Galvanometerkonstante bedeutet[1]). Die bekannte Bewegungsgleichung[2]) des Systems läßt sich also in der Form schreiben:

$$(-K\omega^2 + j p_0 \omega + D)\,\mathfrak{x} = q\,\mathfrak{J}. \qquad 5)$$

Im vorliegenden Fall interessiert die Stromempfindlichkeit nicht; um die Spannungsempfindlichkeit zu erhalten, wird die Beziehung:

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{J} = \mathfrak{V} - q\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{V} - j\omega q\,\mathfrak{x} \qquad 6)$$

benutzt, in der $\mathfrak{V}$ die aufgedrückte Spannung (in symbolischer Darstellung) und $\mathfrak{R}$ den Widerstandsoperator des Stromkreises bedeutet. Die Größe $j\omega q\,\mathfrak{x}$ ist die durch die Bewegung des Systems induzierte elektromotorische Gegenkraft $\mathfrak{V}_i$.

Führt man Gl. (6) in (5) ein, dividiert durch K und setzt:

$$p = p_0 + q^2/\mathfrak{R}, \qquad 7)$$

worin p die gesamte Dämpfungskonstante, p_0 diejenige im offenen Stromkreis bedeutet, und beachtet ferner, daß $q/K = q\,D/DK = \omega_0^2\,\varepsilon$ ist[3]), so erhält man:

$$\mathfrak{x} = \frac{\omega_0^2\,\mathfrak{V}\,\varepsilon}{\mathfrak{R}\,[(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega p/K]}, \qquad 8)$$

woraus sich ohne weiteres in bekannter Weise die Amplitude der Schwingung ergibt, die also zu der Gleichstromempfindlichkeit ε in einfacher Beziehung steht.

Die Amplitude hat ein Maximum für $\omega_0 = \omega$; führt man diese Bedingung ein, sowie die Bedingung für den aperiodischen Zustand: $p^2 = 4\,KD$ oder $p/K = 2\,\omega_0 = 2\,\omega$, so folgt unter diesen Voraussetzungen:

$$\mathfrak{x} = -\frac{j\,\mathfrak{V}\,\varepsilon}{2\,\mathfrak{R}}.^{4}) \qquad 9)$$

Dieser Ausdruck hängt nicht mehr von der Frequenz ω ab, d. h. die Amplitude der Schwingung ist bei sonst gleichen Verhältnissen (gleiche Werte von $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{R}$, ε) für alle Frequenzen gleich groß.

5. Günstigste Schaltung der Vibrationsgalvanometer. Bei der Frage nach der günstigsten Schaltung spielt im Gegensatz zu Gl. (9) die Frequenz des Wechselstroms eine erhebliche Rolle. Im übrigen ergeben sich ganz analoge Betrachtungen wie beim Gleichstrom (S. 262ff.). Bezeichnet wieder beim Nadelgalvanometer g den Ohmschen Widerstand der Windungen, und ferner r den scheinbaren Widerstand des Schließungskreises abzüglich des Widerstandes g, so ist $\mathfrak{R} = r + g$, und man erhält das Optimum (maximale Amplitude) für $g = r$. Beim Drehspulgalvanometer dagegen ist das Optimum vorhanden, wenn der Klemmenwiderstand und die Selbstinduktion des Instruments möglichst klein ist im Verhältnis zu $\mathfrak{R}$.

---

[1]) Für Gleichstrom von der Stärke J, der die Ablenkung x hervorruft, gilt die Beziehung $q\,J = Dx$; x/J oder $q/D = \varepsilon$ bestimmt die Gleichstromempfindlichkeit.

[2]) Vgl. Kohlrausch, Lehrbuch, l. c.

[3]) Denn es ist $q/D = \varepsilon$, $D/K = \omega_0^2$.

[4]) Für größere Werte von p wird $\mathfrak{x}$ nach Gl. 8) kleiner.

Digitized by Google

Bezeichnet man wieder die Normalempfindlichkeit des Galvanometers für 1 Mikroamp. usw. (S. 264) mit ε_0, so erhält man als Optimum:

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Nadelgalvanometer:} \quad 2\mathfrak{x} = -\frac{j\,\mathfrak{V}\,\varepsilon_0}{2\sqrt{r}\,\omega^2}, \\ &\text{beim Drehspulgalvanometer:} \quad 2\mathfrak{x} = -\frac{j\,\mathfrak{V}\,\varepsilon_0}{\sqrt{r}\cdot\sqrt{\omega}}. \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Die Verbreiterung $2X$ des Spaltbildes ergibt sich daraus durch Einführung der Amplituden. Bezeichnet man die effektive Spannung mit V, so hat man dann statt $\mathfrak{V}$ zu setzen $\sqrt{2}\,V$. Hat ferner r die Form $r = a + jb$ und setzt man $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\text{beim Nadelgalvanometer:} \quad 2X = \frac{\sqrt{2}\,V\,\varepsilon_0}{2\sqrt{r}\,\omega^2}, \\ &\text{beim Drehspulgalvanometer:} \quad 2X = \frac{\sqrt{2}\,V\,\varepsilon_0}{\sqrt{r}\sqrt{\omega}}\ ^{1}). \end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

Die Verbreiterung läßt sich aus der normalen Stromempfindlichkeit ε_0 nunmehr berechnen. Die Gleichungen zeigen wieder die prinzipielle Überlegenheit des Drehspulvalganometers wegen der Abhängigkeit von der Frequenz ω.

Wenn die Dämpfung p_0 im offenen Stromkreis null ist, so folgt im Resonanzfall ($\omega_0 = \omega$) aus Gl. (5) $\mathfrak{J} = 0$, da $D/K = \omega_0^2$ ist (S. 263), also nach Gl. (6)

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_i. \qquad 12)$$

Die induzierte elektromotorische Gegenkraft ist also dann gleich der aufgedrückten EMK und das System leistet keine Arbeit, wie es z. B. auch der Fall ist beim Leerlauf eines reibungslosen Motors. In diesem Fall tritt kein Arbeitsverlust auf, dagegen ist dies der Fall, wenn p_0 von Null verschieden ist, sei es nun, daß die Dämpfung von Luftreibung oder Wirbelströmen in den Metallteilen oder in Kurzschlußwindungen herrührt. Um also die größtmögliche Amplitude zu erhalten, muß man solche Dämpfungen nach Möglichkeit vermeiden, was allerdings nur bei den Drehspulgalvanometern, gegebenenfalls unter Zwischenschaltung von Meßwandlern, ausführbar ist. Um die Nadelgalvanometer zu dämpfen, wie es für den Gebrauch notwendig ist, müßte man zur Luftdämpfung greifen, da bei diesen Instrumenten die induzierte EMK zu gering ist. Man kann also hierbei die günstigste Schaltung nicht herstellen.

In dem oben angegebenen Fall $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}$, bzw. $\mathfrak{J} = 0$, wird allgemein nach Gl. (6)

$$\mathfrak{x} = \frac{-j\,\mathfrak{V}}{q\,\omega}. \qquad 13)$$

Je kleiner q ist, desto größer wird also die Amplitude. Aus Zweckmäßigkeitsgründen muß man aber, wie angegeben, den aperiodischen Grenzfall wählen. Dann wird $p = 2\sqrt{K\,D}$ und gemäß Gl. (7) wegen $p_0 = 0$,

$$q = \frac{2\,\mathfrak{R}\sqrt{K\,D}}{q} = 2\,R\cdot\frac{D}{q}\cdot\sqrt{\frac{K}{D}} = \frac{2\,\mathfrak{R}}{\varepsilon\,\omega}. \qquad 14)$$

Man erhält dann aus Gl. (13) wieder Gl. (9).

Bei den jetzt gebräuchlichen Vibrationsgalvanometern sind die vorstehend entwickelten Bedingungen wohl zumeist nicht erfüllt.

Ob der hier vorausgesetzte aperiodische Grenzzustand hergestellt ist, läßt sich auf die Weise ermitteln, daß man dem Galvanometer in der Schaltung, die zur Messung dient,

---

[1]) Vgl. hierzu die für Gleichstrom geltenden ganz analogen Gleichungen 3.

Digitized by Google

eine Ablenkung aus der Nullage (z. B. durch einen Stromstoß) erteilt, und beobachtet, ob es ohne Schwingung auszuführen in die Nullage zurückkehrt. Bei einer Verkleinerung des Widerstandes im Schließungskreis müssen dagegen Schwingungen auftreten.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten für reinen Sinusstrom. Infolge der Abstimmung des Vibrationsgalvanometers sind die Oberwellen, falls sie nicht eine besonders große Amplitude besitzen, von geringem Einfluß; vgl. Gl. 8). Hierauf soll aber nicht weiter eingegangen werden.

Zusammenfassung. Für den Gebrauch der Vibrationsgalvanometer wird der Satz aufgestellt, daß der aperiodische Grenzzustand am zweckmäßigsten ist. Wo es angängig ist, nämlich bei den Drehspulgalvanometern, soll zur Erreichung dieses Zustandes Luft- oder Wirbelstromdämpfung nach Möglichkeit vermieden werden, weil diese einen schädlichen Arbeitsverlust bedingt. Wenn die Dämpfung des Galvanometers im offenen Stromkreis null ist, wird dann im Resonanzfall die induzierte elektromotorische Gegenkraft gleich der aufgedrückten EMK. Bei Nadelgalvanometern ist man dagegen zur Erreichung des Grenzzustandes genötigt, zu Luft- oder anderer Dämpfung zu greifen.

Die günstigste Schaltung der Vibrationsgalvanometer ergibt sich für beide Typen (Nadel- und Drehspultyp) in analoger Weise wie bei Gleichstrom; man erhält dementsprechend auch ganz analoge Gleichungen für die Amplitude der Schwingungen wie für den Ausschlag bei Gleichstrom. Beim Nadelgalvanometer soll der Spulenwiderstand gleich dem scheinbaren Widerstand des äußeren Stromkreises sein, beim Drehspulgalvanometer soll der Klemmenwiderstand und die Selbstinduktion der Spule möglichst klein und der scheinbare Widerstand des Stromkreises gleich dem aperiodischen Grenzwiderstand des Galvanometers sein.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 9. Heft. 1916.

Die graphische Integration von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Von

A. Schwaiger, Karlsruhe i. B.

1. Allgemeines. In Heft 7 des II. Bandes dieser Zeitschrift teilt H. v. Sanden die von C. Runge angegebene Methode der graphischen Intregation von Differentialgleichungen I. Ordnung mit. Im Folgenden soll eine andere Methode der graphischen Integration von Differentialgleichungen bekannt gegeben werden, die auch bei Differentialgleichungen höherer Ordnung Anwendung finden kann.

Bei der graphischen Intregation von Differentialgleichungen kann man im allgemeinen auf zweierlei Arten vorgehen: 1. man geht von der Differentialgleichung aus oder 2. man benützt bekannte Intregale einfacher Differentialgleichungen zur Lösung schwieriger Gleichungen. Die letztgenannte Methode hat der Verfasser früher verwendet[1]); da sie aber in vielen Fällen versagt oder doch zu umständlich ist, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Bei der im Folgenden mitgeteilten Lösungsmethode geht man von der Differentialgleichung aus.

Die mathematischen Grundlagen, auf denen die Methode beruht, sind sehr einfach und bekannt. Das Neue dürfte in der Verwendung bereits bekannter einfacher Konstruktionsmethoden liegen.

2. Mathematische Grundlagen. Bringt man die Differentialgleichung I. Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad 1)$$

auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad 1a)$$

so kann man sie geometrisch in folgender Weise deuten: Für jeden Punkt x, y im Bereich der XY-Ebene gibt es einen Wert $\frac{dy}{dx}$, d. h. eine zugehörige Fortschreitungsrichtung. Folgt man dieser eine kleine Strecke bis zum Punkt $x + \Delta x, y + \Delta y$, so gibt die Gleichung (1a) für diesen neuen Punkt eine neue, von der ersten etwas abweichende Fortschreitungsrichtung, in der man wieder um ein kleines Stückchen fortzuschreiten hat usw. Durch Aneinanderreihen solcher Stückchen erhält man einen Polygonzug (Fig. 1). Beim Übergang zur Grenze Δx, Δy gleich unendlich klein geht der Polygonzug in eine Kurve $y = \Psi(x)$ über, die ein partikuläres Intregal der Differentialgleichung darstellt.

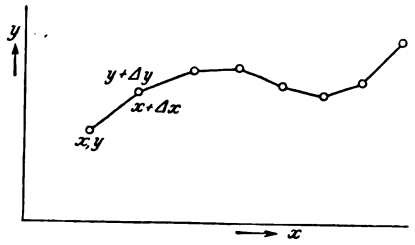


Fig. 1.

[1]) E. und M. 1909, S. 633 und ff. „Über Einschaltungsvorgänge in kapazitätsfreien Stromkreisen"; E. und M. 1910, S. 929 und ff. „Einschaltungsvorgänge bei selbsterregenden Gleichstrommaschinen"; „Das Regulierproblem in der Elektrotechnik", 1909 erschienen bei Teubner. — Diese Methode hat neuerdings auch Herr Dr. R. Bachmann in seiner Dissertation: „Die thermischen Grundlagen der Ölkühlung elektrischer Apparate" (S. 56) verwendet.

Digitized by Google

Die graphische Intregation von Differentialgleichungen läuft nun darauf hinaus, die Fortschreitungsrichtung für jeden Punkt x,y auf konstruktivem Wege zu finden. Je größer die dabei geforderte Genauigkeit ist, um so kleiner muß man die Werte Δx, Δy wählen, innerhalb welcher man die Fortschreitungsrichtungen als konstant annimmt.

Liegt eine Differentialgleichung II. Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \qquad 2)$$

vor, so schreibt man sie in der Form an:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\int x\,dx, \int y\,dx, y, k\right), \qquad 2a)$$

wobei k die Integrationskonstante bedeutet. Das Intregal $\int y\,dx$ kann man natürlich nicht auswerten, da ja die Funktion $y = \Psi(x)$ noch nicht bekannt ist. Dagegen gelingt es meist das Intregal der Störungsfunktion anzugeben; ist aber das Integral nicht bekannt, so behandelt man das Intregral $\int x\,dx$ ebenso, wie wir es nachher für $\int y\,dx$ kennen lernen werden. Im übrigen liegen die Verhältnisse bei technischen Problemen meist so, daß man die Differentialgleichung von vorne herein in der Form der Gl. (2a) anschreiben kann.

Die Auffindung der Fortschreitungsrichtungen scheint nun in beiden Fällen daran zu scheitern, daß man die Intregalkurve $y = \Psi(x)$ noch nicht kennt. Wie beim schrittweisen rechnerischen Verfahren kann man aber auch bei der graphischen Integration so vorgehen, daß man den Verlauf der Integralkurve Stück für Stück probeweis annimmt und durch ein graphisches Verfahren prüft, ob die angenommene Intregalkurve die geforderte Fortschreitungsrichtung besitzt. Ist das nicht der Fall, so zeichnet man eine neue Integralkurve u. s. f., bis man die Fortschreitungsrichtung mit der geforderten Genauigkeit gefunden hat.

Insoweit bietet die graphische Methode nichts Neues; im Gegenteil, es wird dem mathematisch Geschulten dieses Verfahren für die praktische Anwendung vielleicht zu langwierig erscheinen. Wie wir jedoch sehen werden, liegt der Vorteil der graphischen Intregation darin, daß sich die graphische Prüfung der angenommenen Fortschreitungsrichtung sehr rasch und einfach durchführen läßt; sie wird infoge dessen nicht als lästig empfunden, auch wenn man mehrfach probieren muß, bis man die richtige Fortschreitungsrichtung gefunden hat.

Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung kommen in der Technik bei einfachen Systemen kaum vor. Hat man die Vorgänge zu ermitteln bei Systemen, die eine Kopplung von einfachen Systemen darstellen, so erhält man ein System von simultanen Differentialgleichungen. Offenbar kann man auch solche Systeme durch Probieren lösen; man muß in diesem Falle soviele Fortschreitungsrichtungen annehmen, als Differenzialgleichungen vorhanden sind; natürlich muß man dann bei der Kontrolle der einzelnen Fortschreitungsrichtungen alle Differentialgleichungen beachten.

3. Konstruktionsmethoden. Die Konstruktionsmethoden für die graphische Integration sollen nun an Hand der Differentialgleichungen II. Ordnung mit Störungsfunktion von der Form

$$A \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot y = \varphi'(x) \qquad 3)$$

erläutert werden. Wir integrieren die Differentialgleichung zunächst einmal und erhalten abgesehen von der Integrationskonstanten

$$A \cdot \frac{dy}{dx} + B \cdot y + C \cdot \int y \cdot dx = \varphi(x). \qquad 4)$$

Digitized by Google

Diese Gleichung haben wir auf die Form zu bringen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x) - B \cdot y - C \cdot \int y \cdot dx}{A}. \qquad 5)$$

Setzen wir

$$\varphi(x) - B \cdot y - C \cdot \int y \cdot dx = u, \qquad 6)$$

so können wir die Gleichung (5) kürzer schreiben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{A}. \qquad 7)$$

Wir nehmen nun z. B. an, daß nach den Anfangsbedingungen für $x = o$ auch $y = o$ sei und stellen uns die Aufgabe, die Fortschreitungsrichtung im Coordinatenanfangspunkt zu ermitteln. Zu diesem Zweck nehmen wir für u einen willkürlichen Wert u_1' an[1]) und

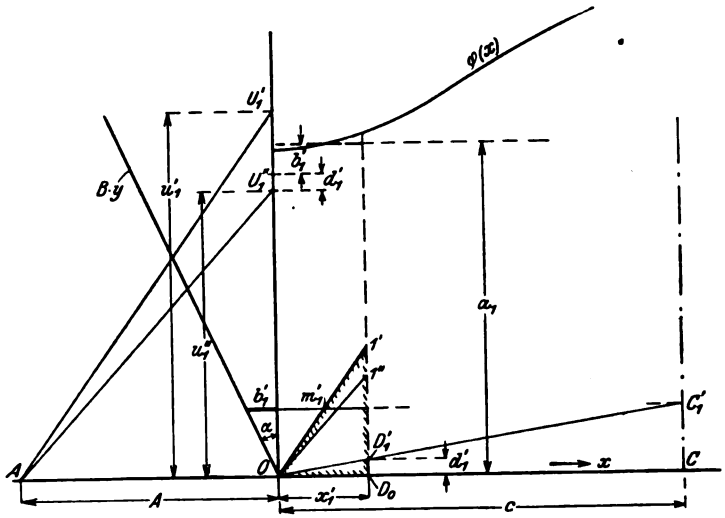


Fig. 2.

machen in der Fig. 2 die Strecke $OU_1' = u_1'$ und die Strecke $OA = A$; wir verbinden nun A mit U_1', die Neigung der Strecke AU_1' gibt dann die Fortschreitungsrichtung im Punkte $x = o$, $y = o$ an unter der Voraussetzung, daß wir für u_1' gleich den richtigen Wert erraten haben; denn nach Konstruktion ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{u_1'}{A} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x = o,\ y = o} \qquad 8)$$

Diese Fortschreitungsrichtung nehmen wir als gültig an bis zum Punkte 1' mit den Coordinaten x_1', y_1'; in der Fig. 2 ist dieser Gültigkeitsbereich der Deutlichkeit halber sehr groß angenommen worden.

Wir haben nunmehr zu kontrollieren, ob wir für u_1' den richtigen Wert erraten haben. Die beste Annäherung an die Integralkurve werden wir natürlich erhalten, wenn die Fortschreitungsrichtung im Punkte m_1' (= Mitte, siehe Fig. 2) mit der von der Differentialgleichung geforderten übereinstimmt. Wir haben also die Aufgabe, die Fortschreitungsrichtung für den Punkt m_1' zu kontrollieren.

[1]) Zweckmäßigerweise wird man natürlich u_1' möglichst in der Nähe des richtigen Wertes zu fassen suchen. Dazu bietet sich folgende Handhabe: nach Gl. (6) kann u keinesfalls größer als $[\varphi(x)]_{x = o,\ y = o}$ werden. Man wird also dem richtigen Wert schon sehr nahe kommen, wenn man $u_1' = [\varphi(x)]_{x = o,\ y = o}$ wählt. In Fig. 2 ist u_1' absichtlich sehr weit weg vom richtigen Wert und zwar größer als $[\varphi(x)]_{x = o,\ y = o}$ gewählt worden.

Digitized by Google

Haben wir die Fortschreitungsrichtung richtig gewählt, dann muß sein

$$u_1' = \varphi(x_{m_1'}) - B \cdot y_{m_1'} - C \int_{x=0}^{x=x_1'} y \cdot dx \qquad 9)$$

1. $\varphi(x)$. — Die Funktion $\varphi(x)$ ist als gegeben zu betrachten, sie ist in Fig. 2 eingezeichnet. Wir sehen, daß für den Punkt m_1' die Funktion den Wert a_1 hat.

2. Von a_1 haben wir nach Gl. 9 zu subtrahieren B. y, wobei y den Wert y_{m_1}' hat; wir setzen $B \cdot y_{m_1}' = b_1'$. Diesen Wert können wir leicht mit dem Zirkel abgreifen; denn die Funktion B · y stellt eine Gerade mit der Neigung $tg\,\alpha = B$ gegen die Y-Achse dar. In der Fig. 2 ist die Strecke b_1' eingezeichnet.

3. Endlich haben wir nach Gleichung (9) von a_1 noch zu subtrahieren $C \int y\,dx$, wobei sich das Intregal zu erstrecken hat von $x = 0$ bis $x = x_1'$. Offenbar stellt das Intregal den Flächeninhalt des mit Schraffur umrandeten Dreieckes dar. Dieses Dreieck ist aber flächengleich mit dem Rechteck, welches die gleiche Basis und die halbe Höhe wie das Dreieck hat. Da die Grundlinie und Höhe des Rechteckes bekannt sind, kann man den Flächeninhalt leicht berechnen. Wir ziehen es aber vor, ihn auf graphischem Wege zu ermitteln:

Nach den eben angestellten Überlegungen ist

$$\frac{1}{c} \int y \cdot dx = \frac{1}{c} \cdot y_{m_1}' \cdot x_1' \qquad 10)$$

wobei wir die Konstante in der uns bequemeren Form $\frac{1}{c}$ angeschrieben haben.

Wir machen nun in Fig. 2 die Strecke OC = c, errichten in C eine Senkrechte und projizieren auf diese y_{m_1}'. Wir erhalten so Punkt C_1'; diesen Punkt verbinden wir mit O; die Verbindungslinie O C_1' schneidet die in x_1' (Punkt D_0) errichtete Senkrechte im Punkte D_1'. Die Strecke $D_0 D_1' = d_1'$ ist dann gleich

$$d_1' = \frac{1}{c} y_{m_1}' \cdot x_1' = \frac{1}{c} \int_{x=0}^{x=x_1'} y\,dx.$$

Nach Gl (9) haben wir auch diese Strecke von a_1 zu subtrahieren.

Von der Strecke a_1 bleibt demnach noch übrig u_1'' und dies soll gleich sein u_1'. Wie aus der Fig. 2 ersichtlich ist, ist dies nicht der Fall, d. h. also wir haben die Strecke u_1' nicht richtig gewählt. Wir beginnen nun die Konstruktion nochmals, indem wir $u = (u')_1$ wählen, wobei $u_1' < (u')_1 < u_1''$ ist. Mit diesem $(u')_1$ konstruieren wir eine neue Fortschreitungsrichtung und kontrollieren wieder in der angegebenen Weise, ob diese der Gl. (9) entspricht. Wir werden dann finden, daß der gemachte Fehler bereits viel kleiner geworden ist. Je nach der geforderten Genauigkeit müssen wir die Konstruktion dann noch ein drittes Mal wiederholen. Wenn man jedoch einige Übung gewonnen hat, gelingt es meist auf das erste Mal, die Fortschreitungsrichtung mit der gewünschten Genauigkeit zu finden Daß der Wert von u_1', den wir zu Anfang gewählt haben, nicht der richtige sein konnte, hätten wir auch ohne jede Kontrolle erkennen können; denn wir haben u_1' größer gewählt als a_1, was nach Gl. (9) unmöglich richtig sein kann.

In ähnlicher Weise konstruiert man nun auch die Fortschreitungsrichtung, die sich an die eben konstruierte anschließt u. s. f.

Es sei bemerkt, daß es sich sehr empfiehlt, auf den Ordinaten $y_{m_{1,2,\ldots}}$ die Werte von $b_{1,2,3,\ldots}$ und von $d_{1,2,3,\ldots}$ aufzutragen und durch eine Kurve zu verbinden, weil man so stets eine Kontrolle für die Richtigkeit der Konstruktion hat und ferner kann man durch Vorauskonstruieren dieser Kurven die Werte von $u'_{1,2,3,\ldots}$ viel sicherer erraten.

Digitized by Google

Obwohl mit dem Vorstehenden das Wesentliche der Methode bekannt ist, sollen im Folgenden doch noch zwei Beispiele gebracht werden, weil der Verfasser zeigen möchte, daß diese Intregationsmethode sehr geeignet ist, dem Lernenden einen tieferen Einblick in das Spiel der Kräfte und Widerstände zu verschaffen.

4. **I. Beispiel.** Als erstes Beispiel wählen wir die Vorgänge beim Anlegen einer Wechselspannung an einen Stromkreis, welche den Ohmschen Widerstand R, die Induktivität L und die Kapazität C in Reihenschaltung enthält. Wir nehmen dabei an, daß die Induktivität L nicht konstant, sondern eine eindeutige Funktion des Stromes i ist also $L = \chi(i)$. Damit haben wir uns eine Aufgabe gestellt, die analytisch zum mindesten sehr umständlich zu lösen ist.

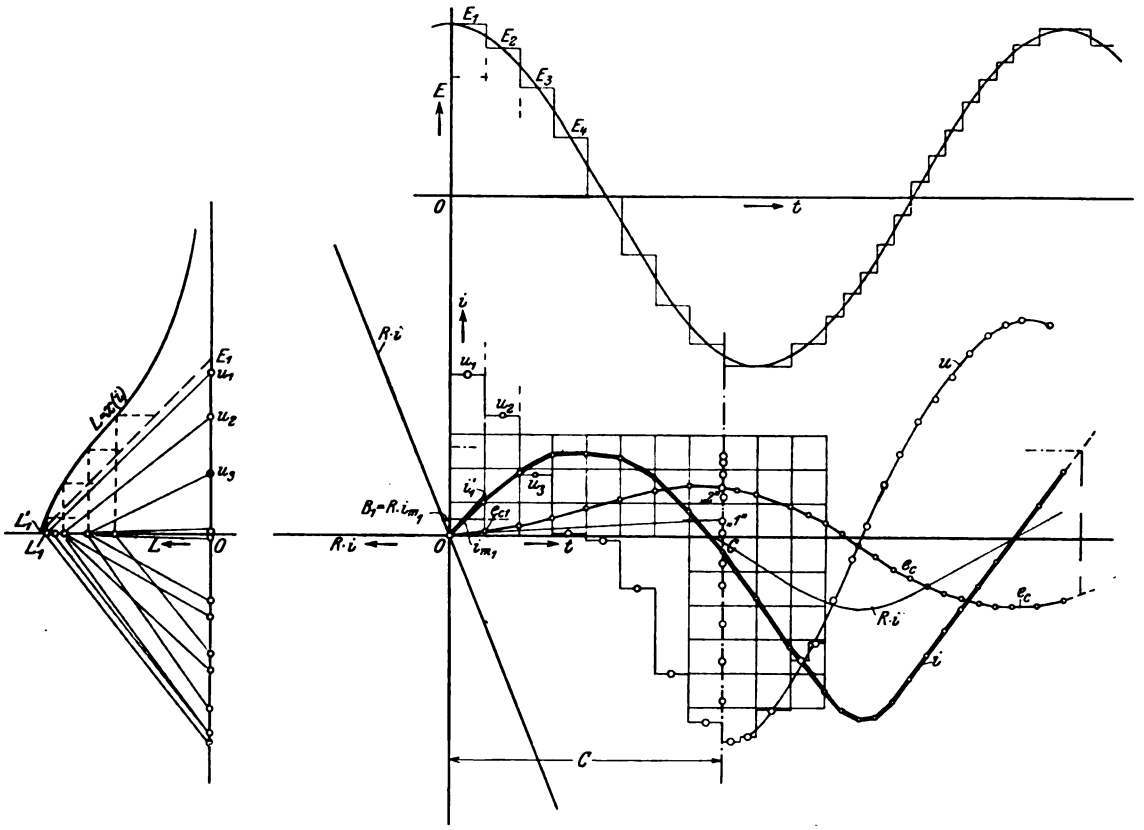


Fig. 3.

Der Vorgang beim Einschalten wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt = E \sin(\omega t + \delta) \qquad 15)$$

Hierin bedeutet E den Höchstwert der Wechselspannung, t die Zeit und δ die Phase der Spannung zur Zeit $t = o$.

Wir schreiben zunächst die Differentialgleichung in der für die graphische Integration bequemeren Formen an:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E \sin(\omega t + \delta) - R \cdot i - \frac{1}{C}\int i\,dt}{L}. \qquad 16)$$

1. Die Störungsfunktion $\varphi(x)$ ist im vorliegenden Fall eine Sinusfunktion. Es würde für die Integration keine Schwierigkeit bereiten, wenn die Störungsfunktion beliebig

Digitized by Google

kompliziert wäre. In Fig. 3 ist die Sinuslinie eingezeichnet und zwar ist angenommen, daß zur Zeit t = o die Spannung ihren Höchstwert hat ($\delta = 90^0$). Da wir die Fortschreitungsrichtungen für kurze Zeitelemente Δt als konstant annehmen wollen (in der Originalzeichnung ist $\Delta t = 1$ cm gemacht), können wir auch die Störungsfunktion durch einen treppenförmigen Linienzug ersetzen mit der gleichen Stufenbreite Δt. In der Fig. sind die einzelnen Stufen mit E_1, E_2, E_3,.... bezeichnet.

2. Für die Geschwindigkeit des Stromanstieges ist, wie Gl. (16) zeigt, nicht die volle angelegte Spannung wirksam; ein Teil der angelegten Spannung wird verbraucht zur Überwindung des Ohmschen Spannungsabfalles R. i. Da wir im vorliegenden Fall den Ohmschen Widerstand während des ganzen Vorganges als konstant annehmen, wird der Spannungsabfall als Funktion des Stromes durch die Gerade R. i. dargestellt, die in der Fig. über der Ordinatenachse eingezeichnet ist.

3. Ein weiterer Teil der angelegten Spannung wird verbraucht zur Überwindung der Gegenspannung des Kondensators, und zwar der Betrag $\frac{1}{C}\int i \cdot dt$. Wie man diese Gegenspannung finden kann, ist uns bereits bekannt. In der Fig. ist die Strecke für C wieder nach rechts eingezeichnet.

Der Größe A in der vorher behandelten allgemeinen Differentialgleichung entspricht im vorliegenden Fall die Induktivität L. Während wir aber vorher A als konstant angenommen haben, soll L eine gegebene Funktion des Stromes i sein. Bei der Konstruktion haben wir also L je nach dem augenblicklich herrschenden Strom verschieden groß zu wählen. In Fig. 3 ist die Funktion $L = \chi(i)$ eingezeichnet und zwar über der Ordinatenachse.

Wir beginnen nunmehr mit der Integration.

Wir wissen, daß zur Zeit t = o der Stromkreis stromlos und der Kondonsator entladen war, der Stromanstieg muß also bei i = o beginnen[1]). Da wir nicht wissen, wie hoch der Strom im ersten Zeitelement Δt_1 ansteigt, zeichnen wir den Stromanstieg vorderhand probeweis unter der Annahme, daß während des ganzen Zeitelementes Δt_1 die erste Spannungsstufe E_1 voll wirksam ist. Da i = o ist besitzt die Induktivität L zunächst ihren höchsten Wert L_1'. Wir verbinden nun L_1' mit E_1 und tragen die so erhaltene Fortschreitungsrichtung in das Zeitdiagramm ein (Strecke Oi_1').

Diese Fortschreitungsrichtung kann natürlich nicht richtig sein; denn wir haben sie unter der Annahme gewonnen, daß i = O ist. Offenbar werden wir den Stromanstieg genauer bekommen, wenn wir annehmen, daß der Strom während der Zeit Δt_1 dauernd konstant und etwas kleiner als i_{m1}' ist, also vielleicht i_{m1}. Für den Strom i_{m1} ist der Ohmsche Spannungsabfall gleich $R \cdot i_{m1}$ und wird durch die Strecke b_1 dargestellt. Um die Gegenspannung des Kondensators zu bekommen $\left(\frac{1}{C}\int_{t=0}^{t=\Delta t_1} i\,dt\right)$, projizieren wir i_{m1} auf die Senkrechte im Punkte C und erhalten so den Schnittpunkt „1". Diesen Punkt verbinden wir mit O und erhalten so die Gegenspannung $e_{C1} = \frac{1}{C} i_{m1} \Delta t_1$. Die beiden Beträge b_1 und e_{C1} subtrahieren wir von E_1 und erhalten so die für den Stromanstieg wirksame Spannung u_1.

Diese Spannung tragen wir im L-Diagramm auf. Beim Strome i_{m1} ist die Induktivität $L = L_1$. Wir verbinden L_1 mit u_1 und ziehen hierzu durch O eine Parallele. Wenn wir richtig geschätzt haben, muß diese Parallele durch i_{m1} gehen, was auch der Fall ist. Damit haben wir die Fortschreitungsrichtung während des Zeitelementes Δt_1 gefunden.

Nunmehr geht man zur Konstruktion des Stromanstieges während der Zeit Δt_2 über.

[1]) Damit ist die Integrationskonstante berücksichtigt.

Digitized by Google

Man wählt wieder probeweis eine Fortschreitungsrichtung und kontrolliert in nunmehr bekannter Weise, ob sie richtig gewählt ist.[1] In dieser Weise geht die Konstruktion weiter. Es sei noch bemerkt, daß bei der Ermittlung der Gegenspannung des Kondensators zu beachten ist, daß die Ladung des Kondensators zu Beginn der weiteren Zeitelemente nicht mehr o ist, wie beim ersten Zeitelement. Bei der Konstruktion des Stromanstieges während des zweiten Zeitelementes, z. B. projiziert man wie vorher $i_{m\,2}$ auf die Senkrechte im Punkte C und verbindet Punkt 2 mit dem Coordinatenanfangspunkt. Zu dieser Verbindungslinie hat man nun im oberen Endpunkt von $e_{C\,1}$ eine Parallele zu ziehen, um die Gegenspannung $e_{C\,2}$ zu erhalten.

Bezüglich der Größe der einzelnen Zeitelemente ist Folgendes zu bemerken. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Konstruktion ist es nicht zulässig, alle Zeitelemente Δt_1, Δt_2 Δt_3.... gleich groß zu wählen, so wie wir es bis jetzt gemacht haben und wie es im ersten Teil der Konstruktion durchgeführt wurde (ungenaue Konstruktion!), man muß vielmehr die Zeiten um so kleiner wählen, je rascher sich z. B. die Störungsfunktion oder die L-Funktion ändert; die treppenförmigen Kurven müssen sich eben möglichst innig an die wahren Kurven anschmiegen. Im zweiten Teil der Konstruktion sind die Stufen verschieden groß gewählt (genaue Konstruktion), und man sieht auf den ersten Blick, daß sich die einzelnen Fortschreitungsrichtungen viel besser zu einer stetigen Kurve aneinanderreihen.

Wie bereits erwähnt wurde, empfiehlt es sich, die Kurven für e_c und $i \cdot R$ einzuzeichnen, weil man so eine gute Übersicht über die Bilanz der Kräfte und Widerstände bekommt (in Fig. 3 ist die Kurve für $i \cdot R$ nur von der zweiten Halbwelle an eingezeichnet, um die Figur nicht zu sehr zu belasten).

Wir haben bei der Konstruktion angenommen, daß der Ohmsche Widerstand während des ganzen Vorganges konstant ist. Die Einfachheit der Konstruktion leidet jedoch nicht darunter, wenn sich der Ohmsche Widerstand ändert (z. B. Lichtbogen oder Detektor im Stromkreis). Auch die Funktion $L = \chi(i)$ braucht nicht eindeutig zu sein; die Konstruktion ist durchaus nicht schwerer auszuführen, wenn diese Funktion entsprechend den Magnetisierungsschleifen in Form von Schleifen gegeben ist.

Es ist hier nicht die Aufgabe, den Verlauf des Vorganges selbst an Hand der Kurven zu diskutieren; es möge vielmehr dem Leser, der sich hierfür interessiert, überlassen bleiben, die Konstruktion zu wiederholen. Er wird dann die Erfahrung machen, daß man auf diese Weise einen tiefen Einblick in die physikalischen Vorgänge bekommt, weil man sozusagen die Vorgänge selbst miterlebt.

Wir haben im vorliegenden Fall den einzelnen Größen keine bestimmten Zahlenwerte zugeschrieben, wir haben vielmehr die einzelnen Strecken nach Belieben gewählt. Wenn jedoch bestimmte Zahlenwerte gegeben sind, so dürfen wir die Strecken nicht mehr beliebig groß wählen, sondern müssen die Maßstäbe beachten. In der Wahl der Maßstäbe hat man gewisse Freiheiten, wegen der Abhängigkeit der einzelnen Größen von einander darf man jedoch nicht alle Maßstäbe nach Belieben wählen. Macht man z. B. 1 Volt gleich m_V cm, 1 Amp. gleich m_A cm und 1 Sekunde gleich m_t cm, so sind damit auch schon die anderen Maßstäbe festgelegt, also z. B. der Maßstab von $R \cdot i$ (Volt); ferner ist der Maßstab von R: $m_R = \frac{m_V}{m_A}$; der Maßstab von L: $m_L = m_t \cdot m_R$; endlich der Maßstab von C: $m_C = \frac{m_A \cdot m_t}{m_V}$.

5. II. Beispiel. Das zweite Beispiel wählen wir aus dem Gebiete der Dynamik. 2 Körper mit den Massen M_1 und M_2 sind, wie Fig. 4 zeigt, durch eine Feder F_1 gekuppelt; der zweite Körper ist außerdem durch die

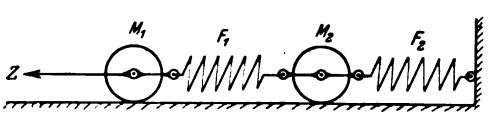


Fig. 4.

Digitized by Google

Feder F_2 mit einer starren Wand verbunden. Auf den ersten Körper soll von der Zeit $t = 0$ an eine konstante Zugkraft Z wirken; es ist nun zu ermitteln, wie sich die beiden Körper unter der Einwirkung dieser Kraft bewegen. Der Widerstand der Reibung, den die beiden Körper bei der Bewegung erfahren, werde proportional den resp. Geschwindigkeiten angenommen also gleich $R_1 \cdot v_1$ und $R_2 \cdot v_2$. Dieses Modell entspricht, ins Elektrische übertragen, einem zweigliedrigen Kettenleiter, an den eine Gleichspannung angelegt wird. (zwei „elektrisch" gekuppelte Schwingungskreise.)

Bezeichnen wir die Federspannungen mit f_1 und f_2, so wird der Geschwindigkeitsverlauf der beiden Körper durch die beiden Differentialgleichungen beschrieben:

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} + R_1 v_1 + f_1 = Z; \qquad \text{I)}$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} + R_2 v_2 + f_2 = f_1. \qquad \text{II)}$$

Bezeichnen wir die Dehnungen der beiden Federn mit d_1 und d_2, die Federkonstanten mit $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{c_2}$, so gelten für die Federspannungen folgende Beziehungen:

$$f_2 = \frac{1}{c_2} \cdot d_2 = \frac{1}{c_2} \int v_2 \cdot dt; \qquad 17)$$

$$f_1 = \frac{1}{c_1} \cdot d_1 = \frac{1}{c_1} \left(\int v_1 \, dt - \int v_2 \cdot dt \right). \qquad 18)$$

Wir sehen also, daß wir die Federspannungen in genau gleicher Weise konstruieren können wie vorher die Gegenspannung des Kondensators.

Substituieren wir diese Werte in die obigen Gleichungen, so erhalten wir

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} + R_1 v_1 + \frac{1}{c_1} \left(\int v_1 \, dt - \int v_2 \cdot dt \right) = Z; \qquad \text{I')}$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} + R_2 v_2 + \frac{1}{c_2} \int v_2 \, dt = \frac{1}{c_1} \left(\int v_1 \, dt - \int v_2 \, dt \right). \qquad \text{II')}$$

Wenn wir den Geschwindigkeitsverlauf beispielsweise des 1. Körpers auf analytischem Wege finden wollen, so haben wir aus beiden Gleichungen v_2 und dessen Ableitungen zu eliminieren; durch mehrmaliges Differentieren erhalten wir nach Ordnen der Gleichung folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 v_1}{dt^4} + \frac{d^3 v_1}{dt^3} \left[\frac{R_1}{M_1} + \frac{R_2}{M_2} \right] + \frac{d^2 v_1}{dt^2} \left[\frac{R_1 R_2}{M_1 M_2} + \frac{1}{c_1 M_1} + \frac{1}{c_2 M_2} + \frac{1}{c_1 M_2} \right]$$
$$+ \frac{dv_1}{dt} \left[\frac{R_1}{c_1 M_1 M_2} + \frac{R_1}{c_2 M_1 M_2} + \frac{R_2}{c_1 M_1 M_2} \right] + v_1 \frac{1}{c_1 c_2 M_1 M_2} = 0 \qquad 19)$$

Die analytische Lösungsmethode ist bekannt; es soll hier nicht näher darauf eingegangen werden; es soll vielmehr gezeigt werden, wie wir den Verlauf der beiden Geschwindigkeiten sowie die Federspannungen auf graphischem Wege finden können. Wir wollen dabei, um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, einige Vereinfachungen treffen; wir nehmen an, daß sich die beiden Körper reibungsfrei auf ihren Unterlagen bewegen können und daß die beiden Körper die gleichen Massen und die beiden Federn die gleichen Konstanten haben. Die Differentialgleichungen lauten dann:

$$M \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{c} \int v_1 \, dt - \frac{1}{c} \int v_2 \, dt = Z; \qquad \text{Ia)}$$

$$M \frac{dv_2}{dt} + \frac{2}{c} \int v_2 \, dt - \frac{1}{c} \int v_1 \, dt = 0. \qquad \text{IIa)}$$

Digitized by Google

Wir schreiben die Differentialgleichungen in der aufgelösten Form an:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{Z - \frac{1}{c}\int v_1\,dt + \frac{1}{c}\int v_2\,dt}{M} = \frac{u_I}{M}; \qquad \text{Ib)}$$

$$\frac{dv_2}{dt} - = \frac{\frac{1}{c}\int v_1\,dt - \frac{2}{c}\int v_2 \cdot dt}{M} = \frac{u_{II}}{M}. \qquad \text{IIb)}$$

Wir nehmen weiter an, daß zur Zeit $t = o$, wo die konstante Kraft plötzlich zu wirken beginnt, die beiden Körper in Ruhe und die Federn im entspannten Zustand sind. Die Geschwindigkeiten beginnen also mit dem Werte Null.

Die graphische Behandlung dieses Systems von simultanen Differentialgleichungen beruht natürlich auf den gleichen Prinzipien wie in Beispiel I. Der Unterschied gegenüber dem vorigen Beispiel besteht darin, daß wir hier die Fortschreitungsrichtungen für zwei Gleichungen zu wählen haben, die nicht nur jede für sich, sondern auch gegenseitig zu kontrollieren sind.

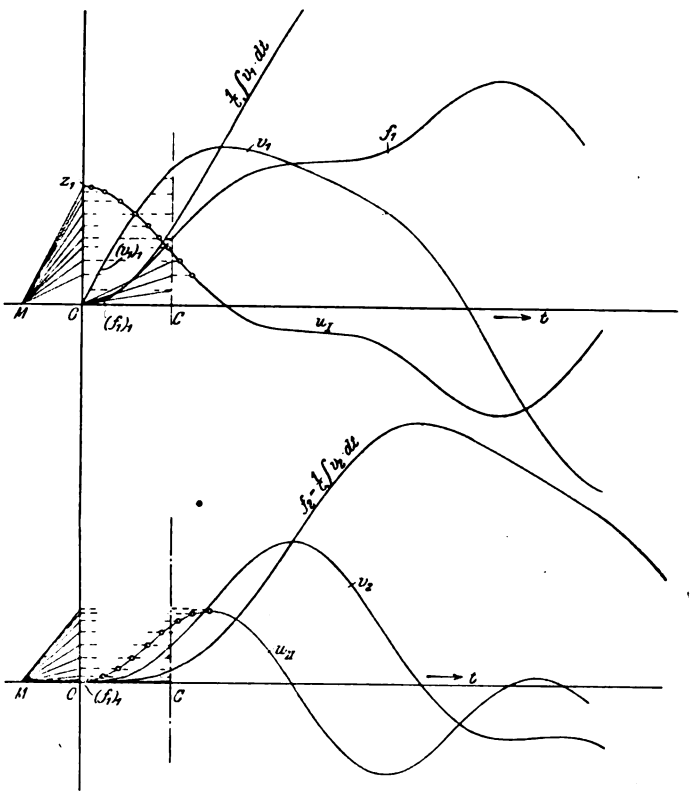


Fig. 5.

Die Beschleunigung des ersten Körpers ist, wie wir aus Gl. (Ib) sehen, auch von der Federspannung f_2 abhängig. Da diese bei Beginn der Bewegung gleich Null ist, können wir sie vorderhand auch für das ganze erste Zeitelement Δt_1 gleich Null setzen, d. h. wir nehmen an, daß sich der erste Körper im ersten Augenblick so bewegt, als wenn die Feder F_1 mit ihrem hinteren Ende an einer starren Wand befestigt wäre. Wir konstruieren nun genau wie im ersten Beispiel die Beschleunigung des ersten Körpers, indem wir die für die Beschleunigung wirksame Kraft etwas kleiner als Z annehmen. Daß wir sie etwas kleiner als Z annehmen, ist dadurch begründet, daß vom Augenblick an, wo sich der Körper bewegt, die Feder F_1 eine Gegenspannung $\frac{1}{c}\int v_1\,dt$ äußert; es bleibt also nicht die ganze Zugkraft Z für die Beschleunigung verfügbar. In Fig. 5 ist die Konstruktion durchgeführt; die gewählte Zugkraft ist mit Z_1 bezeichnet. Wir erhalten so den Geschwindigkeitsanstieg im ersten Zeitelement und können nun hiermit die Gegenkraft der Feder F_1 zu $(f_1)_1$ ermitteln. Wir kontrollieren nun 1., ob der gewählte Anstieg der Geschwindigkeit $(v_1)_1$ stimmt und 2) ob die Annahme berechtigt war, daß der zweite Körper während des ersten

Digitized by Google

Zeitelementes als in Ruhe befindlich betrachtet werden kann. Die Ausführung der erstgenannten Kontrolle ist uns bekannt; es zeigt sich, daß der gewählte Anstieg der Geschwindigkeit $(v_1)_1$ mit genügender Genauigkeit stimmt. Die Ausführung der zweitgenannten Kontrolle ist ebenfalls sehr einfach. Auf den Körper 2 wirkt während des ersten Zeitintervalles eine Zugkraft durch die Feder F_1. Diese haben wir zu $(f_1)_1$ gefunden, allerdings unter der Annahme ,daß der zweite Körper in Ruhe ist. Ist das nicht der Fall, dann erreicht die Feder F_1 während des ersten Zeitelementes nicht die Spannung $(f_1)_1$, sondern weniger. Unsere Kontrolle, ob der zweite Körper unter der Wirkung der Zugkraft $(f_1)_1$ als in Ruhe befindlich betrachtet werden kann, ist also etwas zu scharf. Die Konstruktion der Geschwindigkeit $(v_2)_1$ während Δt_1 ist ebenfalls in Fig. 5 unterhalb des ersten Geschwindigkeitsdiagrammes ausgeführt. Wir sehen, daß der zweite Körper tatsächlich innerhalb dieser Zeit keine nennenswerte Geschwindigkeit erlangt hat, wir dürfen also die Spannung der Feder F_2 vernachlässigen.

Nunmehr kann man zur Ermittlung der Geschwindigkeiten $(v_1)_2$ und $(v_2)_2$ während des nächsten Zeitelementes schreiten. Wir schätzen zunächst den Weiterverlauf der beiden Geschwindigkeiten; es ist klar, daß wir hierbei keinen großen Fehler machen können; denn die Richtungen können nicht viel von denen während des ersten Zeitelementes abweichen. Mit den geschätzten Geschwindigkeiten bestimmen wir nun die Federspannungen und kontrollieren unter Beachtung der Gleichungen (Ib) und (IIb) ob der angenommene Verlauf der Geschwindigkeiten stimmt.

In dieser Weise führt man die Konstruktion fort. In Fig. 5 sind die sich hierbei ergebenden Kurven eingezeichnet.

Man sieht, daß die graphische Behandlung dieser Differentialgleichungen nicht schwieriger ist als die einfacher Gleichungen, sie nimmt nur etwas mehr Zeit in Anspruch, weil man eben beide Gleichungen gleichzeitig konstruieren und gegenseitig kontrollieren muß. Es dürfte vielleicht interessieren, daß die Konstruktion der Kurven von Beispiel I etwa 2 Stunden und von Beispiel II etwa 5 Stunden in Anspruch genommen hat.

6. Anwendungsgebiet. Aus diesen beiden Beispielen ist zu erkennen, daß diese Integrationsmethode im Prinzip wohl bei allen Problemen, die in der Technik auftauchen, Anwendung finden kann. Freilich darf man hierbei keine so große Genauigkeit erwarten, wie sie die analytische Lösung bietet.[1]) Deshalb wird sie mit Vorteil dann angewandt werden, wenn keine sehr große Genauigkeit verlangt wird; das ist z. B. der Fall, wenn die einzelnen Funktionen in Form von experimentell ermittelten Kurven gegeben sind, denen selbst nur eine beschränkte Genauigkeit zukommt. In diesen Fällen ist dann eine analytische Lösung meist überhaupt nicht mehr möglich oder zum mindesten sehr umständlich. Der Lernende aber kann anfangs mit Vorteil stets die graphische Methode der analytischen vorziehen, weil er so rascher zum Verständnis der physikalischen Vorgänge kommt.

[1]) Um die Genauigkeit zu prüfen, hat der Verfasser mehrfach von Studierenden solche Vorgänge graphisch integrieren lassen, die auch streng analytisch behandelt werden können; die Abweichungen von den analytisch ermittelten Resultaten waren dabei meist 2—3%, niemals jedoch größer als 5%.

Digitized by Google

Die Messung des elektromagnetischen (Pointingschen) Energieflusses.

Messung des lokalen Eisenverlustes.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Ziel. Im Kupfer und Eisen eines von Wechselstrom durchflossenen Epsteinapparates geht Energie „verloren". Wir messen sie, indem wir an den Klemmen die zugeführte Energie mit einem Leistungsmesser bestimmen. Dieser Weg ergibt den Gesamtverlust eines Stromzweiges, die Summe seiner Kupfer- und Eisenverluste.

Wir können aber auch die Eisenverluste allein messen. Es gelingt dies durch folgenden Kunstgriff: Man führt dem Leistungsmesser nicht wie vorhin die Klemmenspannung des Apparates zu, sondern die Klemmenspannung einer Hilfswicklung. Die Drähte der Haupt- und Hilfswicklung (Fig. 1) laufen in ganz geringem Abstande einander parallel (Streuung Null). Das magnetische Feld induziert in beiden dieselben elektrischen Kräfte[1]). Das Wattmeter zeigt daher bei dieser Schaltung den zeitlichen Mittelwert aus Magnetisierungsstrom i und der vom Eisen „induzierten EMK" e an. Dieser Mittelwert mit negativem Vorzeichen ist bekanntlich gleich dem gesuchten Eisenverlust.

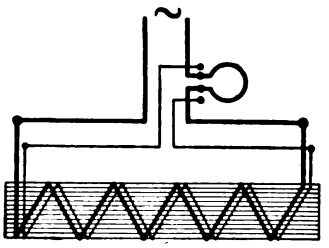


Fig. 1.

Woher wissen wir, daß der Eisenverlust, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem zeitlichen Mittelwert aus dem Strome i und der induzierten EMK e ist? Dieser Erkenntnis liegt folgende Vorstellung zu Grunde: Der Strom i kommt dadurch zustande, daß sich im Drahte positive Elektrizität in der einen, die gleiche Menge negativer Elektrizität in der anderen Richtung bewegt. Im Drahte befindet sich ebenfalls die induzierte EMK. Wir stellen sie uns als ein eingeschaltetes, unsichtbares, zeitlich veränderliches Elementchen vor mit der elektromotorischen Kraft e. Die Verschiebung der Elektrizität im Sinne oder gegen dieses Elementchen erfordert in der Sekunde eine gewisse Arbeit, genau so, wie dies bei Gleichstrom, bei Ladung und Entladung eines Akkumulators von der elektromotorischen Kraft e der Fall ist. Die momentane vom Akkumulator hergegebene Leistung ist $e \cdot i$. Die von ihm aufgenommene Leistung $w = -e\,i$. Wir übertragen diesen Ausdruck auf den Wechselstromfall. Nach ihm ergeben sich hier zeitlich veränderliche Beträge, die im allgemeinen zwischen positiven und negativen Werten schwanken. Wenn Zeiten in Betracht gezogen werden, die groß gegen die Dauer einer Periode sind, kommt der zeitliche Mittelwert in Betracht. Dieser Durchschnittswert ist es, den wir mit dem Wattmeter messen.

Bei genauerem Zusehen erheben sich Bedenken gegen die geschilderte Vorstellung. Wir sind überzeugt, daß die Elemente der Sitz der Leistung bei Laden und Entladen einer Akkumulatorenbatterie sind. Bei Leistungsher- oder abgabe lassen sich bei ihnen zugehörige chemische Änderungen nachweisen. Ist die Vorstellung, die wir eben der Messung

[1]) Bei eingehender Betrachtung findet man leicht, daß die Streuung zwischen Haupt- und Hilfswicklung nicht Null zu sein braucht, vorausgesetzt, daß sie durch magnetische Kraftlinien hervorgerufen wird, die nicht durch das Eisen hindurchgehen, sondern nur in Luft oder Kupfer verlaufen. Auch braucht das Übersetzungsverhältnis nicht genau gleich 1 zu sein, wenn man den Ausschlag des Wattmeters entsprechend der Windungszahl von Haupt- und Hilfswicklung mit einer Konstanten multiplizieren will.

Digitized by Google

des Eisenverlustes zu Grunde legten, mit all ihren Folgerungen richtig, dann sollte auch der Draht der Sitz der Eisenverluste sein. Wir wissen aber, daß dies nicht der Fall ist. Wenn wir die Eisenverluste berechnen, sind wir gewohnt, uns jedes Volumelement des Eisens als Sitz des Verlustes zu denken. Und mit Recht. Denn das Eisen erwärmt sich durch die Eisenverluste. Nicht etwa das Kupfer, dessen Erwärmung zeigt, daß in ihm nur die gewöhnlichen, aus Stromstärke und Widerstand berechenbaren, Stromwärmeverluste vorhanden sein können.

Woher kommt es, daß wir uns hier im Widerspruch mit der Erfahrung befinden? Unsere Vorstellung von der induzierten EMK ist nicht richtig[1]). Es wird in den Draht bei dem Induktionsvorgange kein Element hineingetragen. Bei dem Induktionsvorgange wird vielmehr ein elektrisches Feld außerhalb des Drahtes induziert. Der Strom im Drahte ordnet sich diesem Felde nach Vorschriften zu, die unabhängig vom Induktionsvorgange sind. Die induzierte EMK als Elementchen gedacht, hat daher keine physikalische Existenz. Als Ersatz für sie führt man am besten die Umlaufspannung im induzierten elektrischen Felde ein[1]). Die elektrische Umlaufspannung für den Hilfsstromkreis (Fig. 1.) und die in ihm induzierte EMK stimmen dem Zahlenwerte nach überein.

Nun rechnet man aber doch in vielen Fällen mit der induzierten EMK so, als ob sie ein im Drahte eingeschaltetes Element wäre. In einer Reihe von Fällen darf man dies auch tun. Man muß sich nur bewußt sein, daß die Elementauffassung der induzierten EMK eine Hilfsvorstellung mit beschränktem Anwendungsgebiet ist, deren Folgerungen jedoch gelegentlich mit der Erfahrung im Widerspruch stehen können. Was nun den Eisenverlust betrifft, so führt sie zwar zu einer richtigen Messvorschrift, sie läßt uns aber bei der Frage nach dem Sitz und besonders nach der Verteilung des Verlustes auf die einzelnen Eisenelemente offenbar im Stiche.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit 3 Fragen:

1. Kann man die übliche Vorschrift für Leistungs- und Verlustmessungen unter einer Vorstellung ableiten, bei der von der induzierten EMK abgesehen wird?

2. Wie hat man es sich vorzustellen, daß die an den Klemmen des Apparates gemessene Energie sich auf die einzelnen Volumelemente des Eisens verteilt?

3. Ist es möglich, nicht nur den gesamten Eisenverlust eines Stromzweiges, sondern auch den Eisenverlust irgend eines abgegrenzten Teiles eines magnetischen Kreises zu messen? Kann man z. B. den Eisenverlust in den Zähnen eines Ankers, oder in einem beliebig abgegrenzten Teile eines Eisenschenkels eines Epsteinapparates durch den Versuch bestimmen? Mit anderen Worten, kann man nicht nur den gesamten, sondern auch den lokalen Verlust messen?

Die beiden ersten Fragen sind bereits in der Literatur beantwortet worden. Die Grundlage bildet dabei der elektromagnetische Energiefluß. Er ist aber in Ingenieurkreisen wenig bekannt und es lohnt sich daher, auf ihn an Hand bestimmter Beispiele einzugehen[2]).

Die dritte Frage, für die sicherlich praktisches Interesse vorliegt, hat bisher, soweit ich sehe, niemand anzufassen vermocht.

Ich werde im folgenden eine Lösung für sie geben. Der von mir eingeschlagene Weg beruht auf einer Messung des elektromagnetischen Energieflusses. Freilich ist meine Meßmethode nicht so einfach, daß sie vom Praktiker ohne weiteres übernommen werden könnte. Sie bleibt eine Methode für ein wissenschaftliches Laboratorium. Ihr Wert

---

[1]) Vgl. Rogowski: Zur Definition der induzierten EMK. Archiv IV, S. 57.

[2]) Man siehe auch: Mie: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. S. 427. — Abraham-Föppl: Theorie der Elektrizität. Dritte Aufl. S. 370 und folgende. — F. Emde: Der Energiestrom in Dynamomaschinen Elektrotechnik und Maschinenbau 1909, S. 915.

Digitized by Google

steckt darin, daß sie zum ersten Male den elektromagnetischen Energierfluß und den lokalen Eisenverlust zu messen gestattet[1]).

a. Ein einfacher Fall. Wir schichten aus dünnen Blechringen einen Ring auf (Fig. 2 und 3). Die Breite stufen wir so ab, daß sich praktisch ein kreisförmiger Querschnitt ergibt. Den Durchmesser wählen wir sehr groß im Verhältnis zur Breite. Wir umwickeln den Ring gleichmäßig mit einer Magnetisierungswicklung, deren Widerstand gleich Null gesetzt werde. Wir magnetisieren mit Wechselstrom. Nach dem üblichen Ansatze nimmt der Ring in jedem Augenblicke die Leistung auf:

$$w = -ei \qquad 1)$$

Ich will nun zeigen: wenn der Wert 1) für die Leistungsaufnahme richtig ist, dann muß noch eine zweite Beziehung bestehen, die uns einen Einblick in die Versorgung des Eisens mit Energie gestatten wird.

Wir formen den Ausdruck 1) dadurch um, daß wir statt der Größen i und e neue Größen einführen, die an jedem Ort des elektromagnetischen Feldes und daher auch an jedem Volumelemente des Eisens festgestellt werden können. Es sind dies die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$.

Das Eisen und der von Wicklung eingeschlossene Raum werden von einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ durchsetzt. Die magnetischen Kraftlinien laufen der Oberfläche des Bleches parallel (in Fig. 3 im Grundriß sind die magnetischen Kraftlinien durch Punkte angedeutet). Das Feld ist, wenn, wie vorausgesetzt, der Ringdurchmesser groß gegen die Blechbreite ist, homogen. Zwischen dem Strome i und der Feldstärke H besteht die Beziehung:

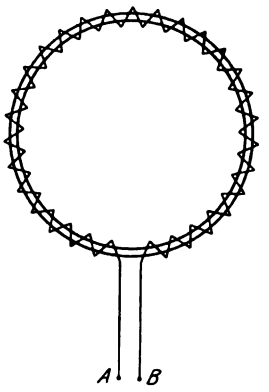


Fig. 2.

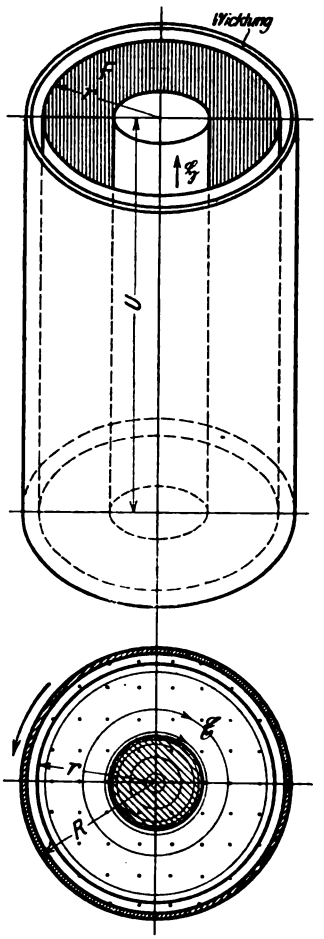


Fig. 3. Ring zerschnitten und gerade gereckt.

$$HU = 0{,}4\pi ni \qquad 2)$$

(U = Umfang des Ringes, n = Zahl der Windungen der Magnetisierungsspule). Wir ersetzen somit der Strom i durch den Ausdruck:

$$i = \frac{H}{0{,}4\pi N}, \qquad 3)$$

wo $N = \frac{n}{U}$ die Zahl der Windungen für 1 cm bedeutet.

Der von Wicklung umschlossene Raum ist nicht nur von einem magnetischen, sondern auch von einem induzierten elektrischen Felde $\mathfrak{E}$ erfüllt. Für den Fall, daß

[1]) Der elektromagnetische Energiefluß bildet die Grundlage der elektromagnetischen Lichttheorie. Alle Strahlungsvorgänge im leeren Raum lassen sich durch seine Eigenschaften erklären. Die Optik mißt ihn mit dem Bolometer. Unsere Arbeit wird daher zeigen, daß dieselbe Größe, die im Gebiete kurzer Wellen mit dem Bolometer gemessen wird, im Gebiete langer Wellen mit dem Wattmeter gemessen werden kann.

Digitized by Google

sich auf Eisen und Magnetisierungswicklung keine freien elektrischen Ladungen ausbilden, sind die elektrischen Kraftlinien Kreise, die in Ebenen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien verlaufen (Fig. 3 Grundriß). In der Mitte des kreisförmigen Eisenquerschnittes ist die elektrische Feldstärke gleich Null. Sie steigt proportional mit der Entfernung von dieser Mitte an. Auf der Eisenoberfläche erreicht sie ihren größten Wert. Von hier ab würde sie, wenn wir die induzierende Wirkung des magnetischen Luftfeldes vernachlässigen, umgekehrt proportional dem Abstande von der Mitte wieder abfallen. Sie fällt, da die induzierende Wirkung des magnetischen Luftfeldes klein gegen die des Eisens ist, etwas langsamer als umgekehrt proportional ab. Die Umlaufspannung[1]) $\varepsilon = \int \mathfrak{E}_s \, ds$ für einen kreisförmig geschlossenen Weg (eine einzige Windung) ist gleich $-\frac{d\Phi}{dt} 10^{-8}$ (Φ = Umschlungener Induktionsfluß). Umlaufspannung und sogenannte induzierte EMK einer Windung haben somit genau den gleichen Zahlenwert (vgl. S. 58, 280). An diesem Wert ändert sich nichts, wenn wir die Verzerrung des elektrischen Feldes durch die auf Eisen und Kupfer sich ansammelnden freien Elektrizitäten berücksichtigen. Das rührt daher, daß ihr verzerrendes Zusatzfeld ein Potentialfeld ist, bei dem die Umlaufspannung verschwindet. Der Betrag E der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist für alle Punkte einer und derselben kreisförmigen Kraftlinie gleich groß. Die elektrische Umlaufspannung hat daher auch den Wert

$$\varepsilon = 2\pi r E \qquad 4)$$

Wir müssen noch das Vorzeichen der Umlaufspannung festlegen. Die Stromrichtung in der Magnetisierungsrichtung sei positiv, wenn sie mit der Pfeilrichtung in Fig. 3 übereinstimmt. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ hat alsdann positive Richtung, wenn im Grundriß der Fig. 3 ihre Pfeile von der Rückseite nach der Vorderseite zeigen. Die induzierte EMK und die elektrische Kraft E müssen wir ebenfalls als positiv ansehen, wenn ihre Richtung mit der Richtung des Stromes übereinstimmt[2]). Tun wir dies, so bleibt es bei den positiven Vorzeichen in 4). Zwischen der induzierten EMK der Magnetisierungswicklung und der elektrischen Umlaufspannung ε besteht nun die Beziehung:

$$e = n \cdot \varepsilon = n \cdot 2\pi r E = N U 2\pi r E \qquad 5)$$

Wir ersetzen im Ausdrucke 1) e und i durch ihre Werte 2) und 5) und erhalten:

$$w = -\frac{1}{0{,}4\pi} \cdot E H \cdot 2\pi r U \text{ Watt} \qquad 6)$$

Nun ist der Wert $2\pi r U = F$ nichts anderes als der Inhalt einer den Ring einhüllenden Fläche F (in Fig. 3 schraffiert). Mit dem üblichen Ausdruck 1) ist somit verträglich der neue Ausdruck

$$w = -\frac{1}{0{,}4\pi} E \cdot H \cdot F \qquad 7)$$

Wenn wir den induzierenden Einfluß des Feldes im Luftraume zwischen Eisen und Wicklung berücksichtigen, ist nur dann die induzierte EMK $e = n\varepsilon$, wenn der Radius r gleich dem Radius R der Magnetisierungswicklung gewählt wird (Fig. 3), und daher die Fläche F sich von innen her der Magnetisierungswicklung anschmiegt. In diesem Falle gibt der Ausdruck 7) die Energie an, die zur Versorgung des ganzen von der Fläche F eingeschlossenen Raumes, der von Luft und Eisen erfüllt ist, notwendig ist.

Wir ziehen nun, nicht in Wirklichkeit, wohl aber in Gedanken, die Fläche F beliebig zusammen, etwa soweit, daß sie durch das Eisen hindurch geht und dieses in zwei Teile

[1]) Die Umlaufspannung wird hier und im folgenden in Volt, die elektrische Feldstärke E in Volt/cm gemessen.

[2]) In der Figur 3 weisen die Pfeile bei den elektrischen Kraftlinien nach der negativen Richtung.

Digitized by Google

teilt. Wir denken uns nun eine zweite Magnetisierungswicklung unmittelbar auf dieser zusammengezogenen Fläche F gewickelt. Ihr kommt eine von e verschiedene induzierte EMK e' zu. Aber auch jetzt wird $-e'i = -\frac{1}{0{,}4\pi} E H \cdot F$ sein, wenn wir nur e' und E auf die neue Lage der Fläche F beziehen. Das Produkt $-e'i$ ist nichts anderes, als die Energie, die zur Versorgung des Raumes innerhalb der zusammengezogenen Fläche F notwendig ist. Bei unserem einfachen Beispiel gibt somit der Ausdruck 7) die Energie an, die der von einer beliebig gelegenen Fläche F umhüllte Raum in der Sekunde aufnimmt. Der Ausdruck 7) hat daher allgemeine Gültigkeit, gleichgültig welche Lage wir an der Fläche F in unserem Beispiele vorschreiben.

Welche Anschauung ist mit dem Ausdrucke 7) verträglich? Wir vergleichen ihn mit der Formel

$$M \cdot = v \cdot F \qquad 8)$$

die für die Wassermenge M gilt, die dem Querschnitte F mit der Geschwindigkeit v entströmt. Beide Formeln haben denselben Aufbau. Wir können daher sagen, im elektromagnetischen Felde strömt die Energie. Beschränken wir uns nun auf das Zeitintervall, in dem der Strom i und der Induktionsfluß Φ ansteigen. Für dieses ist die induzierte EMK e die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die elektrische Umlaufspannung ε negativ. Ihre Richtung stimmt jetzt mit der in der Fig. 3 bei den elektrischen Kraftlinien eingetragenen Pfeilrichtung überein. Die Leistung nimmt in diesem Zeitabschnitt, man achte auf das negative Voltzeichen in 7), positive Werte an. In diesem Zeitabschnitt fließt dem Eisen in der Sekunde durch die Fläche F die Energie $\frac{1}{0{,}4\pi} E H$ zu. Die Strömungsgeschwindigkeit der Energie ist senkrecht zu der augenblicklichen Lage der Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gerichtet und zwar so, daß die Richtung von $\mathfrak{E}$, die Richtung von $\mathfrak{H}$ und die positive Richtung der Energieströmung in dieser Reihenfolge ein Rechtsystem bilden (Fig. 4). Wir betrachten jetzt das zweite Zeitintervall, in dem Strom und magnetischer Fluß abnehmen. Die induzierte EMK, die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die elektrische Umlaufspannung sind jetzt positiv. Die Pfeilspitze der elektrischen Kraft ist in der Figur 3 umzukehren. Dem Eisen entströmt die Energie $\frac{1}{0{,}4\pi} \cdot E H \cdot F$ in der Sekunde. Auch jetzt ist nach Größe und Vorzeichen die Stromgeschwindigkeit der Energie $v = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot E H$, wenn wir festsetzen, es soll wieder die augenblickliche Richtung von $\mathfrak{E}$, die Richtung von $\mathfrak{H}$ und die positive Richtung der Energieströmung in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Richtungsregel ist für die Größe der Stromgeschwindigkeit der Energie daher allgemein zu setzen:

$$v = \frac{1}{0{,}4\pi} E \cdot H.$$

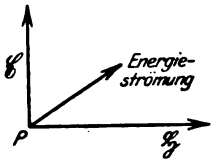


Fig. 4.

3. Verallgemeinerung. Unser Beispiel ist deswegen einfach, weil die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf der Oberfläche F konstant sind, weil sie senkrecht aufeinander stehen, und in die Fläche F hineinfallen. Wenn diese Voraussetzungen nicht zutreffen, gilt die folgende Verallgemeinerung:

An irgend einer Stelle P des Raumes seien die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gegeben (Fig. 4). Dann strömt daselbst die Energie mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{0{,}4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \qquad 9)$$

Grenzen wir daher bei P die kleine Fläche df ab, und setzen wir eine ihrer beiden Normal-

Digitized by Google

richtungen ν als positiv voraus, so strömt in der Sekunde durch die Fläche df in der Richtung ν die Energie

$$dw = \frac{1}{0{,}4\,\pi}\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]_\nu \, df. \qquad 10)$$

Man überzeugt sich leicht, daß man mit dieser Festsetzung für die Fläche F des Ringes (Fig. 3) wieder auf den Ausdruck 7) zurückkommt.

Wir wollen uns nun einen beliebigen Raum T durch eine Hülle F abgegrenzt denken. Auf jedes Element der Oberfläche wenden wir die Vorschrift 10) an, und es möge durch Summation auf solche Weise ein Wert W für die gesamte dem Raume T in einer Sekunde zuströmende Energie berechnet worden sein.

Wir können andererseits von den bekannten Ausdrücken für die magnetische Energie eines Raumelementes:

$$\begin{cases} \text{Magnetische Energie} = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,\mathfrak{H}^2\,d\tau \\ \text{Elektrische Energie} = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,d\tau \end{cases}$$

ausgehen und uns fragen, welche Änderung diese Energie in einer Sekunde erfährt, wenn sich die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ändern. Durch Summierung der für das einzelne Volument gegebenen Werte finde man für den ganzen abgegrenzten Raum T auf dieser Grundlage den Wert W'. Es läßt sich dann zeigen, daß W und W' mit einander übereinstimmen. Wir wollen auf diesen Beweis, der den Ausdrücken 9) und 10) eine allgemeine Gültigkeit sichert, nicht eingehen und verweisen auf Lehrbücher der mathematischen Physik[1]). Wir wollen hier nur noch zeigen, wie die übliche Leistungsmessung nach der Vorstellung von der Energieströmung aufzufassen ist.

4. Die übliche Leistungsmessung mit dem Wattmeter ist eine Messung des gesamten elektromagnetischen Energieflusses. Wir führen die Zuleitungen zu unserem Ring eine gewisse Strecke einander parallel. Das magnetische und elektrische Feld an den Klemmen A und B (Fig. 2) hat dann die für eine Doppelleitung gültige Verteilung (Fig. 5). Elektrische und magnetische Kraftlinien stehen wieder wie im vorigen Beispiele aufeinander senkrecht. Bei positivem Strome (der Strom bei A durchsetzt die Zeichenebene von vorne nach hinten) stimmen die eingetragenen Pfeilrichtungen mit der positiven Richtung der magnetischen und elektrischen Kraftlinien überein.

Die Energieströmung steht senkrecht zu den in der Papierebene befindlichen Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Sie erfolgt daher senkrecht zur Zeichenebene. Nach der durch das Vektorenprodukt 9) gegebenen Richtungsregel führt sie bei positivem Strome und positiver elektrischer Spannung dem Ringe Energie zu. Ihre Stärke wird ungefähr durch die Dichte der in der Figur eingetragenen Punkte gegeben.

Wie groß ist nun die gesamte in der Sekunde durch die Zeichenebene fließende Energie?

Wir schneiden durch zwei benachbarte (stark gezeichnete) elektrische Kraftlinien einen Flächenstreifen heraus, den wir durch aufeinanderfolgende magnetische Kraftlinien in rechteckähnliche Flächen weiter unterteilen. Dem Ausdruck 10) entsprechend fließt in der Sekunde durch einen Quadratzentimeter die Energie:

$$\frac{1}{0{,}4\,\pi}\cdot E\,H,$$

durch das Flächenelement df die Energie:

$$\frac{1}{0{,}4\,\pi}\cdot E\,H\cdot df = \frac{1}{0{,}4\,\pi}\cdot E\cdot ds\,H\,dl$$

[1]) Z. B. Abraham-Föppl, 3. Aufl. S. 253 u. 370.

Digitized by Google

und durch den herausgeschnittenen Flächenstreifen (Fig. 5) die Energie:

$$dw = \frac{1}{0{,}4\,\pi}\,[E_1\,ds_1\,H_1\,dl_1 + E_2\,ds_2\,H_2\,dl_2 + \ldots E_n\,ds_n\,H_n\,dl_n] \qquad 11)$$

Nun muß die magnetische Umlaufspannung für den Rand eines Flächenelementes (z. B. für den aus den Längen dl_1; ds_1; dl_2; ds'_1 gebildeten Umlauf) verschwinden, weil die umschlungene Stromstärke gleich Null ist. Da die magnetische Kraft senkrecht zu den Längen ds_1 und ds'_1 steht, erhält die Umlaufspannung nur auf den Wegen dl_1 und dl_2 Beiträge. Es muß somit die Beziehung bestehen:

$$H_1\,dl_1 = H_2\,dl_2 \ldots = H_n\,dl_n$$

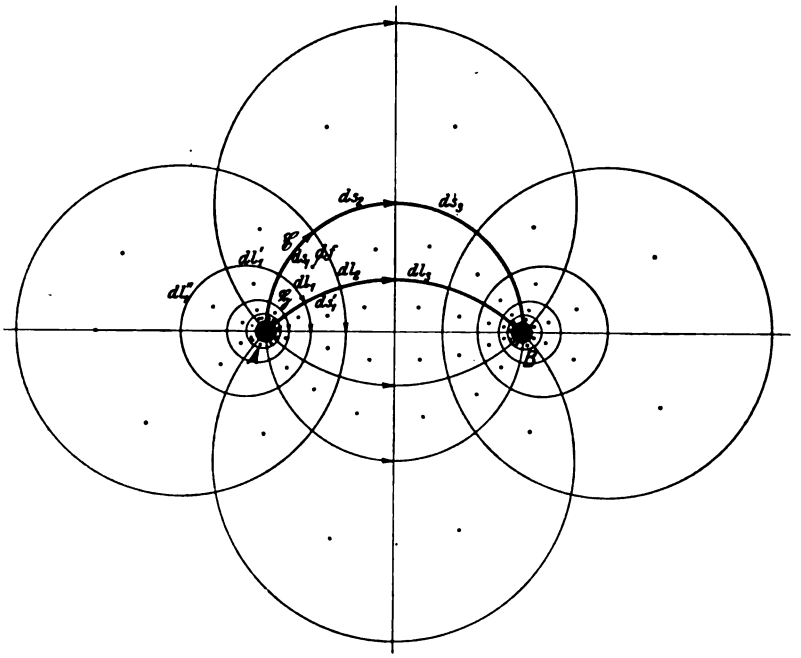


Fig. 5.

Verwerten wir sie im Ausdrucke 11), so erhalten wir für die durch den stark umrandeten Flächenstreifen in der Sekunde strömende Energie den Ausdruck:

$$dw = \frac{1}{0{,}4\,\pi}\cdot H\,dl\,[E_1\,ds_1 + E_2\,ds_2 + \ldots E_n\,ds_n]$$

$$= \frac{1}{0{,}4\,\pi}\,H\,dl\cdot e, \qquad 12)$$

wo $e = \int \mathfrak{E}_s\,ds$ die elektrische Spannung zwischen den beiden Klemmen A und B bedeutet. Diese Spannung ist für alle elektrischen Kraftlinien der Figur 5 die gleiche. Durch die ganze Zeichenebene strömt daher in der Sekunde die Energie:

$$w = \frac{e}{0{,}4\,\pi}\,\{H_1\,dl_1 + H_1^{1}\,dl_1^{1} + \ldots H_1^{(n)}\,dl_1^{(n)}\}$$

In den geschweiften Klammern steht nun nichts anderes als die magnetische Umlaufspannung $m = \int \mathfrak{H}\,dl$ einer magnetischen Kraftlinie. Nun ist

$$m = 0{,}4\,\pi\,i.$$

Setzen wir diesen Wert in 12) ein, so erhalten wir für die gesamte, in der Sekunde durch die

Digitized by Google

Zeichenebene strömende Energie den bekannten, allen Leistungsmessungen zugrunde liegenden Ausdruck:

$$w = e\,i \qquad 13)$$

e bedeutet hier abweichend von der Bezeichnungsweise im Ausdrucke 1) die Klemmenspannung und nicht die ihr entgegengesetzt gleiche induzierte EMK. Dafür fehlt auch in 13 das in 1) vorhandene Minuszeichen.

Vom Standpunkte der Energieströmung ist die übliche Wattmetermessung aufzufassen als die Messung des Energieflusses durch eine Ebene, die an den Klemmen (an der Meßstelle) Energiequelle und Energieverbraucher von einander trennt[1]).

Wir haben die Energieströmung an den Klemmen der Magnetisierungswicklung und im magnetisierten Ringe kennen gelernt. Das an den Klemmen vorhandene magnetische und elektrische Feld geht durch stetige Veränderungen in das im Inneren des Ringes vorhandene Feld über. Die Energieströmung an den Klemmen wird daher ebenfalls durch stetige Veränderungen in diejenige Energieströmung übergeführt, die in der Magnetisierungswicklung vorhanden ist und die wir im Abschnitt 2 betrachtet haben. Mit derselben Genauigkeit, mit der wir elektrisches und magnetisches Feld angeben können, können wir auch die Strömung der elektromagnetischen Energie verfolgen. Die Vorstellung von der Energieströmung vermag ein anschauliches und genaues Bild von der Versorgung der einzelnen Eisenteile mit Energie zu geben.

5. Messung eines Teiles des Energieflusses. Die Messung des lokalen Eisenverlustes bei gradliniger Magnetisierung. a) Theoretische Grundlage. In der Mitte der Schenkel eines Epsteinapparates besteht ein magnetisches Feld, das auf einer gewissen Länge A-B, Fig. 6 und 8 praktisch als gradlinig angesehen werden kann. Wir stellen uns die Aufgabe, den Eisenverlust des Schenkelstückes A....B zu messen.

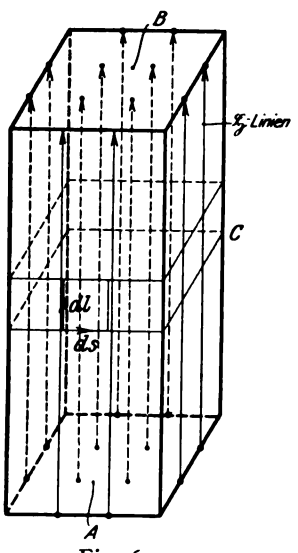


Fig. 6.

Das Schenkelstück werde von einer sich ihm eng anschmiegenden geschlossenen Fläche eingehüllt. Wir wissen, die von ihm verbrauchte Energie muß ihm durch diese Hülle zuströmen. Die Induktion $\mathfrak{B}$ und die Feldstärke $\mathfrak{H}$ stehen senkrecht zu den Endflächen. Nun erfolgt die Energieströmung in Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{H}$ (vgl. das Vektorprodukt im Ausdruck 9). Durch die Endflächen fließt daher dem Eisenstück keine Energie zu. Sie dringt zu ihm nur von seinen Seitenflächen zu.

Wir teilen die Seitenflächen in einzelne bandförmige Streifen und die Streifen wieder in Rechtecke (Fig. 6). Durch ein einzelnes Rechteck mit den Seitenlängen ds und dl fließt in der Sekunde die Energie

$$\frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot E \cdot H\,ds\,dl = \frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot E\,ds \cdot H\,dl$$

Durch den gezeichneten Streifen strömt dem Eisen in der Sekunde die Energie zu:

$$dw = -\frac{1}{0{,}4\,\pi} \cdot H\,dl \cdot \int E_s\,d_s$$

[1]) Unsere obige Betrachtung beschäftigt sich nur mit dem Energiestrom für das Drahtäußere. Sie sieht vom Energieflusse für die Drahtquerschnitte ab. Das ist erlaubt, wenn wir es mit sehr gutem Leitermaterial zu tun haben, was wir voraussetzten. Dann ist die elektrische Feldstärke im Draht Null. Ebenso der Energiestrom. Wenn das Leitermaterial aber einen endlichen Widerstand hat, kommen der elektrischen Feldstärke im Drahtinnern von Null verschiedene Werte zu. Die elektrische Feldstärke hat daselbst die Richtung des Drahtes. Der Energiestrom steht alsdann senkrecht zur Oberfläche des Drahtes. Es fließt Energie von der Oberfläche her dem Drahtinnern zu. Es wird keine Energie

Digitized by Google

Hierbei ist vorausgesetzt, daß wir es mit homogenem Eisen zu tun haben, bei dem für alle Rechtecke eines Streifens sich der Wert H dl gleich groß ergibt. Das Integral $\int E_s\,ds$ bedeutet nichts anderes als die Umlaufspannung ε der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und stimmt zahlenmäßig mit der vom Eisen in einer einzigen Windung induzierten EMK $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ überein. Wir schreiben daher für die Energie, die dem Eisen durch einen Elementarstreifen in der Sekunde zufließt:

$$dw = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot H \cdot dl \cdot \varepsilon$$

Insgesamt erhält das Schenkelstück Fig. 6 durch die Seitenflächen in der Sekunde die Energie:

$$w = \frac{1}{0{,}4\pi} \cdot \varepsilon \cdot m \qquad 14)$$

Unter $m = \int H_l\,dl$ ist hier die momentane magnetische Spannung zwischen den Endflächen längs dem Wege A C B verstanden.

Einem gradlinig magnetisierten Eisenstück fließt in der Sekunde eine Energie zu, deren Wert proportional dem Produkte aus elektrischer und magnetischer Spannung ist.

Das betrachtete Eisenstück unterliege einer rein sinusförmigen Magnetisierung. Dann schwingt auch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die elektrische Umlaufspannung ε sinusförmig auf und nieder (Fig. 7). Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und die magnetische Spannung m sind dann bekanntlich nicht sinusförmig (Fig. 7). Wenden wir nun für jeden Augenblick die Formel 14) an, so erhalten wir für die dem Eisenstück zuströmende Energie w Werte, die durch die stark gezeichnete Kurve Fig. 7 gegeben sind. Diese Kurve liegt z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der Nullinie. Es strömt somit z. T. Energie dem Eisen zu, z. T. strömt sie von ihm weg. Der Überschuß der hereinströmenden über die wegströmende Energie wird zur Deckung der Hysterese- und Jouleschen Verluste des Eisens gebraucht. Der hin und her pulsierende Teil deckt die sogenannte „elektromagnetische" Energie des Raumes oder quillt aus ihr. Die im Eisen in Sekunde verbleibende Energie wird somit bis auf den Faktor $\frac{1}{0{,}4\pi}$ durch den zeitlichen Mittelwert von elektrischer und magnetischer Umlaufspannung gegeben. Es gilt:

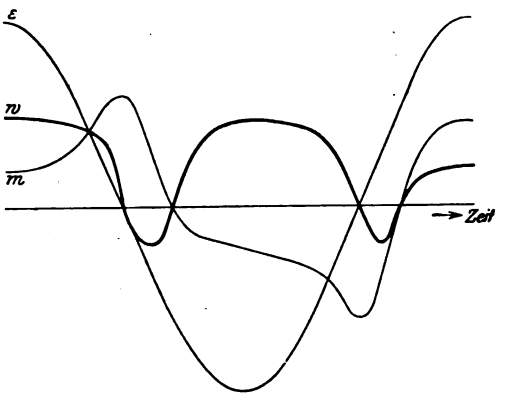


Fig. 7.

$$\bar{w} = \frac{1}{0{,}4\pi}(\overline{\varepsilon m}) \qquad 15)$$

Der Strich über den zeitlich veränderlichen Größen soll die Mittelwertbildung andeuten.

b) Die Meßmethode. Wir zielen darauf hin, bei einem Wattmeter durch die Spannungsspule einen Strom zu schicken, der der elektrischen Umlaufspannung ε, und

im Drahtinnern nach dem Ring befördert. Es erhalten die einzelnen Raumteile des Leiters grade die Energie, die sie für die Erzeugung der Jouleschen Wärme brauchen (siehe hierzu Mie und Abraham, Föppl a. a. O.).

Digitized by Google

durch seine Stromspulen einen Strom zu schicken, der der magnetischen Spannung m phasengleich und proportional ist. Gelingt uns dies, so muß das Wattmeter nach Formel 15) bis auf eine Konstante den Verlust des Eisenstückes A C B (Fig. 6 und 8) richtig anzeigen.

Wir umwickeln das Schenkelstück, dessen Verlust wir bestimmen wollen, mit n Windungen und führen die Enden zu der Spannungsspule eines Wattmeters (Fig. 8). Der Strom der Spannungsspule ist hierdurch bereits, wie beabsichtigt, proportional der elektrischen Umlaufspannung ε.

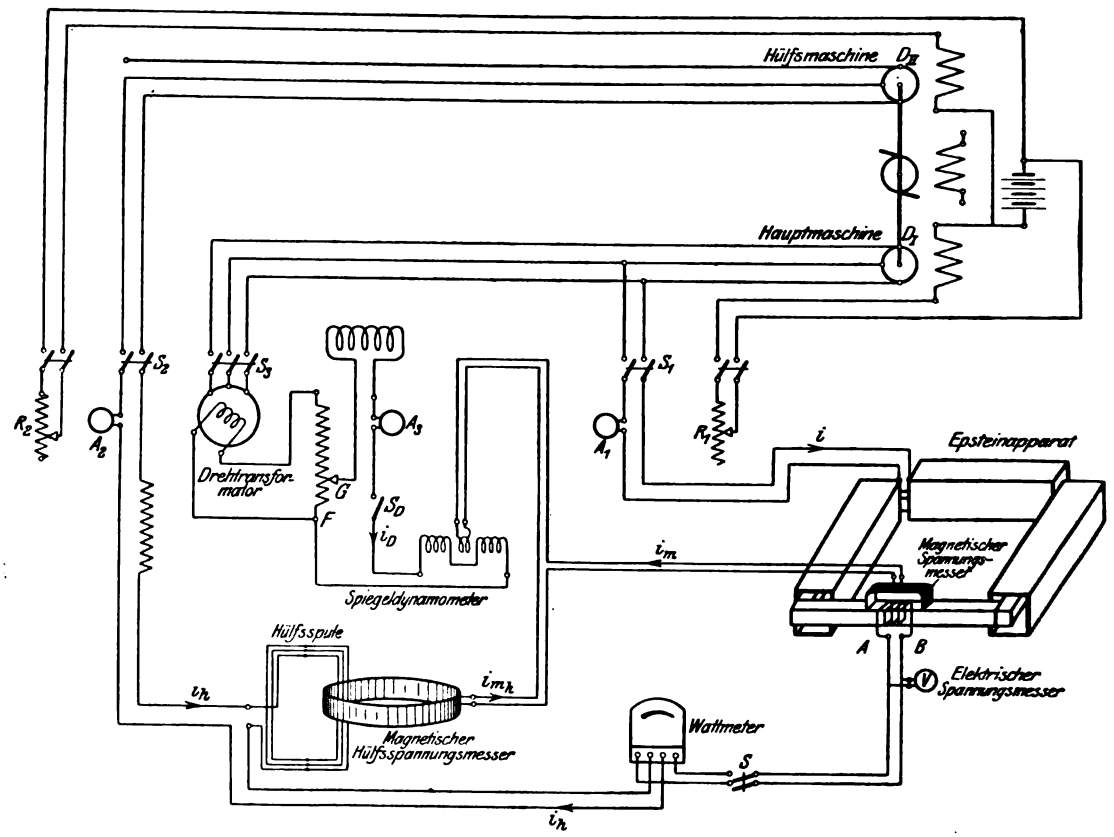


Fig. 8.

Wir pressen dem Schenkelstücke bei den Punkten A und B einen magnetischen Spannungsmesser an (Fig. 8). Würden wir seine Klemmen unmittelbar mit der Stromspule des Wattmeters verbinden, so würden wir nicht unser Ziel erreichen. Der Strom im Spannungsmesser ist zwar proportional der magnetischen Spannung m, aber so schwach, daß ein merklicher Ausschlag im Wattmeter nicht zu erwarten ist. Außerdem ist er um 90° gegen sie verschoben. Wir helfen uns durch einen Kunstgriff.

Wir beschicken einen Hilfsstromkreis, der eine Hilfsspule von z Windungen enthalten soll (Fig. 8), mit Wechselstrom, der durch die Stromspulen des Wattmeters geleitet wird. Die Frequenz des Hilfsstromes soll die gleiche sein, wie bei der Magnetisierung des Eisens. Man kann dies, wenn nur eine einzige Wechselstrommaschine zur Verfügung steht, durch einen Drehtransformator erreichen. Ich konnte den Hilfsstrom einer Hilfsmaschine entnehmen, die mit der Hauptmaschine gleiche Bauart hatte und mit ihr gekuppelt war (Fig. 8)[1]). Wir legen um die Hilfsspule einen zweiten magnetischen Spannungsmesser zu einem geschlossenen Umlaufe herum. Beide magnetischen Spannungsmesser schalten wir

[1]) Der benutzte Maschinensatz war ein Zählerprüfaggregat.

Digitized by Google

gegeneinander. Dann ist, wie beabsichtigt, der Hilfsstrom i_h und daher auch der Strom in den Stromspulen des Wattmeters mit der magnetischen Spannung m phasengleich und ihr proportional, wenn in beiden magnetischen Spannungsmessern Spannungen oder Ströme induziert werden, die sich gegenseitig aufheben. Die magnetische Spannung m ist gegeben. Der Hilfsstrom i_h muß daher in Amplitude und Phase beliebig veränderlich sein. Seine Amplitude ändern wir durch Einstellen des Widerstandes R_2 in der Erregerwicklung der Hilfsmaschine (Fig. 8). Die Hilfsmaschine hatte einen drehbar gelagerten Stator, der durch einen mit Fernsteuerung betriebenen kleinen Motor beliebig gedreht werden konnte. Durch Statorverdrehung konnte somit auch die Phase des Hilfsstromes nach Belieben eingestellt werden. Wir werden später noch ausführlich die Art und Weise des Einregelns des Hilfsstromes zu beschreiben haben. Zunächst sei angenommen, er entspräche der Forderung, daß in beiden Spannungsmessern gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Spannungen induziert werden. Dann muß die Beziehung bestehen:

$$0{,}4\,\pi \cdot z \cdot i_h \cdot c = m\,C \qquad 16)$$

(C Konstante des magnetischen Hauptspannungsmessers)
(c Konstante des magnetischen Hilfsspannungsmessers)
Es folgt:

$$m = 0{,}4\,\pi \cdot z\, i_h \cdot \frac{c}{C}$$

Das Wattmeter habe die Konstante K. Sein Ausschlag sei α. Man mißt dann im Wattmeter die Leistung:

$$K\,\alpha = \overline{e\, i_h},$$

wo

$$e = n\,\varepsilon$$

die in den n-Windungen des Schenkelstückes A B induzierte EMK ist. Wir schreiben:

$$K\,\alpha = n\,(\overline{\varepsilon\, i_h}) = \frac{n \cdot (\overline{\varepsilon\, m})}{0{,}4\,\pi\, z} \cdot \frac{C}{c}$$

$$K\,\alpha = \bar{w} \cdot \frac{C}{c} \cdot \frac{n}{z} \qquad 17)$$

Unter $\bar{w}$ (Ausdruck 15)) ist der gesuchte Eisenverlust des Schenkelstückes A C B zu verstehen. Dieser lokale Eisenverlust läßt sich somit nach der Formel

$$\bar{w} = K\,\alpha\, \frac{c}{C} \cdot \frac{z}{n} \qquad 18)$$

aus dem beobachteten Ausschlage α berechnen.

Wir müssen nun noch nachträglich die Einregulierung des Hilfsstromes i_h zeigen. In dem Stromkreise der gegeneinandergeschalteten magnetischen Spannungsmesser wird die Sekundärspule eines Siemensschen Spiegeldynamometers eingefügt. Seine Stromspule wird mit Strom beschickt, der aus einem Drehtransformator stammt, der primär an die auptmaschine angeschlossen wird, die auch den Magnetisierungsstrom für den Epsteinapparat liefert (Fig. 8). Wir magnetisieren das Epsteinbündel, unterbrechen den Hilfsstrom i_h und drehen den Rotor des Drehtransformators solange, bis daß das Spiegeldynamometer keinen Ausschlag macht. Der Strom i_D (Fig. 8) und der von der gegebenen magnetischen Spannung m im Hauptspannungsmesser induzierte Strom

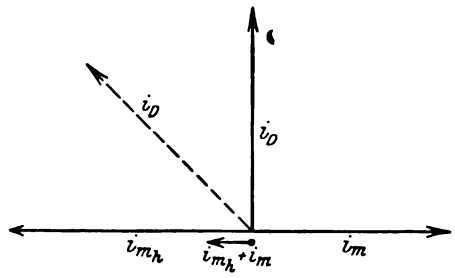


Fig. 9.

Digitized by Google

i_m (Fig. 8 und 9) stehen jetzt aufeinander senkrecht. In dieser Stellung bleibt der Rotor des Drehtransformators zunächst stehen.

Wir schalten nun den Hilfsstrom i_h ein. Im allgemeinen wird jetzt das Dynamometer wieder einen Ausschlag zeigen durch die Wirkung des Stromes i_D und des von der Hilfsspule im Hilfsspannungsmesser induzierten Stromes i_{m_h}. Wir drehen jetzt die Phase des Hilfsstromes durch Verdrehen des Stators der Hilfsmaschine solange, bis daß das Dynamometer wieder auf Null zeigt. Der Strom i_{m_h} und der Summenstrom $i_m + i_{m_h}$ (Fig. 9) der beiden magnetischen Spannungsmesser stehen jetzt ebenfalls senkrecht zum Strome i_D. Wir drehen nun den Rotor des Drehtransformators und verändern dadurch die Phase von i_D (gestrichelter Vektor Fig. 9). Das Dynamometer schlägt wieder aus. Die Größe des Ausschlages hängt davon ab, wieweit der Strom i_{m_h} vom Strome i_m abweicht. Wenn wir nun den Regulierwiederstand R_2 verändern, so verändern wir nicht nur den Hilfsstrom i_h, sondern auch den Komponentenstrom i_{m_h}, den Summenstrom $i_{m_h} + i_m$ und den Ausschlag des Dynamometers. Durch Veränderung von R_2 können wir es somit immer dahin bringen, daß der Ausschlag des Spiegeldynamometers auch in der gestrichelten Lage des Vektors i_D auf Null zurück geht. Und wenn dies erreicht ist, dann sind die in den magnetischen Spannungsmessern induzierten Ströme und Spannungen entgegengesetzt gleich und dann besteht die Beziehung 16), die die Voraussetzung unseres Ergebnisses 18) bildet.

Einfluß von Oberwellen. Ist die Magnetisierung des Eisenstückes rein sinusförmig, so ist seine magnetische Spannung m verzerrt. Für den Verlust kommt aber nur die Grundwelle der magnetischen Spannung in Betracht. Ihre Oberwellen sind „wattlos". Wir kommen alsdann nach unserer Meßmethode zu einem richtigen Wert am Wattmeter, wenn wir dem Hilfsstrom i_h reine Sinusform geben und mit Hilfe des Spiegeldynamometers nur die Grundwellen der Ströme in den magnetischen Spannungsmessern abgleichen. Dazu ist es notwendig, auch dem Strome i_D in der Stromspule des Spiegeldynamometers reine Sinusform zu geben. Wenn dagegen die Magnetisierung nicht sinusförmig ist, dann müßte zur Messung des gesamten Eisenverlustes der Hilfsstrom eine ganz bestimmte Mischung von Oberwellen haben. Es ist aussichtslos eine solche herzustellen. Unsere Methode erlaubt daher nur den Verlust der Grundwelle oder den Verlust einer beliebigen Oberwelle zu messen. Ein wesentlicher Nachteil liegt hierin nicht. Denn wenn man sich bei Eisenmessungen von der Vieldeutigkeit, die eine Mehrwelligkeit hereinbringt, frei machen will, muß man eine reine Sinusform entweder bei der Magnetisierung (elektrischen Spannung) oder beim Strome (magnetischen Spannung) erstreben. Für beide Fälle reicht unsere Methode aus.

6. **Versuche.** a) Apparate. Zu den Versuchen hatte die Firma Siemens und Halske in dankenswerter Weise einen Lonkhuyzenschen Eisenprüfapparat zur Verfügung gestellt. Eine der 4 Magnetisierungsspulen wurde von mir entfernt, sodaß nur 3 Magnetisierungsspulen die Magnetisierung der Blechbündel übernahmen (Fig. 8). Trotzdem ist auch für den unbewickelten und der Messung unterworfenen Schenkel in der Nähe der Mitte praktisch ein homogenes Feld vorhanden (Streuung klein). Herr Gumlich hatte mir freundlichst das Blechbündel zur Verfügung gestellt und mir seine Verlustziffern mitgeteilt:

$$V_{10} = 3{,}05; \quad V_{15} \text{ (angenähert)} = 7{,}35 \text{ Watt/kg.}$$

Über die Mitte des unbewickelten Schenkels wurde eine Sekundärspule von $n = 80$ Windungen gesteckt. Ihre Klemmen wurden mit einem Scheringschen Spannungsmesser[1]) und mit der Sekundärspule eines Siemensschen Präzisionswattmeters für 5 A und 30 V verbunden. Es war erforderlich, bei den niedrigen Spannungen, die zu erwarten waren, (s. die Tabelle S. 292) das Scheringsche Hitzdrahtinstrument zu benutzen, weil elektromagnetische und in noch höherem Grade elektrodynamische Instrumente einen so starken Strom verbraucht hätten, daß eine Rückwirkung auf die Magnetisierung des Schenkels zu fürchten war.

[1]) Schering, Ztschr. f. Instrk. 32. S. 69. 1912.

Digitized by Google

Der magnetische Hauptspannungsmesser war bereits früher zu den ersten Versuchen, die Herr Steinhaus und ich über die Messung der magnetischen Spannung angestellt haben[1]), benutzt worden. Das Spiegeldynamometer war ein Instrument der Firma Siemens und Halske (Preisliste 56 Nr. 16 787). Seine normale Primärstromstärke beträgt 0,3 A, seine normale Sekundärstromstärke 0,05 A. Die Ströme wurden durch Siemenssche Schalttafelinstrumente gemessen. Die Hilfsspule im Hilfsstromkreise hatte 3 Windungen ($z = 3$). Der magnetische Hilfsspannungsmesser war aus Draht vom Durchmesser von 0,5 mm hergestellt worden, der in zwei Lagen über einen Preßspanstreifen von 4 mm Dicke, 4 cm Breite und 80 cm Länge gewickelt war. Seine Konstante war 1,77 mal so groß als die des Hauptspannungsmessers.

Als Stromquelle diente ein Zählerprüfaggregat der Reichsanstalt: Zwei gekuppelte gleiche Drehstromgeneratoren, die von einem Gleichstrommotor angetrieben wurden (Fig. 7). Die Leistung betrug etwa je 5 kVA.

Als Drehtransformator wurde ein sonst als Phasenschieber gebrauchter Drehstrommotor mit Rotorwicklung benutzt. Seine Rotorwicklung war auf einen konstanten Widerstand (Spannungsteiler) geschaltet. Von der festen Klemme F und der beweglichen Klemme G wurde die Spannung für die Stromspulen des Spiegeldynamometers entnommen.

b) Gang eines Versuches. Durch Schließen des Schalters S_1 wurde die Magnetisierungswicklung des Epsteinschen Apparates an die Hauptmaschine gelegt. Der Erregerstrom wurde durch den Widerstand R_1 so eingestellt, daß das Voltmeter V des Scheringschen Apparates die Spannung anzeigte:

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f \cdot B \cdot q \cdot n \, 10^{-8} \text{ Volt} \qquad 19)$$

B = Maximalwert der Induktion, f = Frequenz (beobachtet an einem Frequenzmesser), q = Eisenquerschnitt; n = Windungszahl der Sekundärspule. Genau die gleiche Spannung wurde durch den Schalter S auf die Sekundärspule des Wattmeters geschaltet (Fig. 8).

Darauf wurde die Primärwicklung des Drehtransformators durch Schließen des Schalters S_3 an die Hauptmaschine gelegt. Vorher war die veränderliche Spannung des Spannungsteilers auf Null herunterreguliert. Sie wurde nun so weit gesteigert, daß durch die Primärspule des Spiegeldynamometers der normale Strom von 0,3 A floß, der bei A_3 abgelesen wurde. Etwa eintretende Veränderungen der Frequenz und Spannung wurden nachreguliert. Durch Öffnen des Schalters S_D wurde die Nullage des Spiegeldynamometers beobachtet. Wurde der Schalter geschlossen, so schlug das Dynamometer wegen des im magnetischen Hauptspannungsmesser induzierten Stromes i_m (Fig. 9) im allgemeinen aus. Durch Drehen des Rotors des Drehtransformators wurde es wieder in seine Nullage zurückgebracht.

Nun wurde der Schalter S_2 geschlossen und dadurch die Stromspule des Wattmeters und die Hilfsspule an die Hilfsmaschine gelegt. Deren Erregerstrom wurde soweit gesteigert, bis der Strommesser A_2 einen genügend starken Hilfsstrom (etwa zwischen 1 bis 5 A) anzeigte. Das Spiegeldynamometer schlägt jetzt im allgemeinen wieder aus, weil nicht nur im Haupt- sondern auch im Hilfsspannungsmesser ein Strom (der Strom i_{m_h} in Fig. 9) induziert wird. Durch Fernsteuerung wurde nun der Stator der Hilfsmaschine gedreht und dadurch die Phase des Hilfsstromes i_h und des Stromes i_{m_h} solange verändert, bis das Dynamometer wieder auf Null stand.

Wenn jetzt zur letzten Einstellung der Rotor des Drehtransformators gedreht wurde (gestrichelte Lage des Vektors i_D Fig. 9), so schlug im allgemeinen das Spiegeldynamometer wieder aus, weil die in den magnetischen Spannungsmessern induzierten (und bereits um 180° gegeneinander verschobenen) Ströme und Spannungen nummerisch nicht gleich zu sein brauchten. Nun wurde die Erregung der Hilfsmaschine durch den Widerstand R_2

[1]) Rogowski und Steinhaus: Archiv für Elektrot. Bd. I, S. 141.

Digitized by Google

soweit geändert und der Hilfsstrom dadurch so einreguliert, daß das Dynamometer wieder auf Null zurückging. Es blieb dann bei ganz beliebiger Lage des Rotors des Drehtransformators auf Null stehen. War dieses erreicht, so wurde der Ausschlag α des Wattmeters abgelesen und der Eisenverlust für die durch den Hauptspannungsmesser abgesteckte Eisenstrecke nach Formel 18) berechnet.

Zwei Vorsichtsmaßregeln müssen beobachtet werden. Erstens muß dafür gesorgt werden, daß der Strom in der Primärspule des Spiegeldynamometers möglichst sinusförmig ist. Zu dem Zwecke war eine starke Drosselspule mit offenem magnetischen Kreise der Stromspule des Dynamometers vorgeschaltet. Zweitens muß das Spiegldynamometer so eingestellt sein, daß es bei normalem Strom von 0,3 A in seiner Primärwicklung aber bei stromlosem Epsteinschen Apparat und stromloser Hilfsspule keinen Ausschlag zeigt. Es kann ausschlagen, wenn eine induktive Einwirkung seiner Primärspule auf die Sekundärspule vorhanden ist. In diesem Falle muß die Sekundärspule durch Drehen des Torsionskopfes solange verstellt werden, bis die gewünschte Unabhängigkeit erfüllt ist.

Bei Abgleichungen bei Wechselstrom hat man gewöhnlich Phasen- und Amplitudengleichheit gleichzeitig zu erfüllen. Im vorliegenden Falle braucht man sie nur nacheinander zu erfüllen. Das bei üblichen Wechselstromabgleichungen tastende Suchen nach richtiger Einstellung fällt bei unserer Methode weg.

c) Das Versuchsergebnis. Die Versuche ergaben nun folgende Werte:

Tabelle.

Frequenz	Spannung in Volt	Wattmeter: Ausschlag	Wattmeter: Konstante	Eisenversust in Watt	Schenkellänge, auf der der Verlust gemessen wurde	Hilfsstrom in A	Amperewindungen der Schenkellänge in A	Induktion B in C. G. S.-Einheiten
50	35,0	70,0	1	2,33	6,8 cm	5,2	22,7	14 800
	29,3	49,8	1	1,65	„	3,1	13,5	12 350
	24,2	69,5	0,5	1,16	„	2,15	9,4	10 210
	11,84	21,1	0,5	0,35	„	1,15	5,0	5 000

Eisenquerschnitt: 6,630 cm², spezifisches Gewicht (angenommen) 7,7; Verlustziffer $V_{10} = 3{,}05$ Watt/kg; Verlustziffer $V_{15} = 7{,}35$ Watt/kg (angenähert bekannt), sekundäre Windungszahl $n = 80$, Windungszahl der Hilfsspule $z = 3$.

Die gemessenen Eisenverluste sind in der Fig. 10 in Abhängigkeit von der Induktion aufgetragen worden. Daselbst sind durch Kreise und Fähnchen auch die Werte eingezeichnet worden, die sich aus den von Herrn Gumlich angegebenen Verlustziffern für den Eisenverlust der Schenkellänge von 6,8 cm ergeben. Eine geringe Abweichung der Beobachtungen des Herrn Gumlich würde noch nicht gegen unsere Meßmethode sprechen. Da die Magnetisierung des Epsteinschen Apparates nicht gleichförmig ist, kommt in den Zahlen des Herrn Gumlich eine gewisse Mittelbildung des Verlustes zum Ausdruck. Indessen dürften sich hierdurch nur Abweichungen von etwa einem Prozente, höchstens aber von einigen wenigen

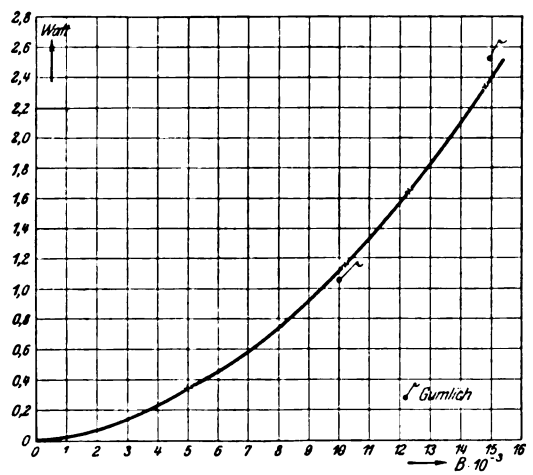


Fig. 10. Gemessene Werte des lokalen Eisenverlustes und des elektromagnetischen Energieflusses.

Digitized by Google

Prozenten erklären lassen. Die wirklich gefundenen Abweichungen sind zwar nicht groß, aber doch größer, als daß sie sich hierdurch erklären lassen. Der Hauptgrund der Abweichung ist durch die Rückwirkung des Magnetisierungsstromes auf die Maschine gegeben. Bei der Induktion B = 10 000 war die Spannungskurve an den Klemmen unserer Sekundärwicklung noch annähernd sinusförmig. Bei der Induktion von B = 15 000 war sie bereits stark durch eine dritte Harmonische verzerrt. Bei der Anwendung der Formel 19) setzen wir voraus, daß die gemessene Spannung von einer rein sinusförmigen Magnetisierung induziert werde. In Wirklichkeit wurde die von 2 sinusförmigen Induktionen induziert, von denen die eine die Grundfrequenz, die andere die dreifache Freqenz hatte. Bei verzerrter Spannungskurve ist somit die Grundwelle der Magnetisierung kleiner als wir berechnen und daher auch der von uns gemessene Verlust, der sich nur auf die Grundwelle bezieht, kleiner, als bei unverzerrter Spannungskurve. Steigende Mehrwelligkeit der Maschine würde somit erklären, daß bei höherer Induktion unsere Werte kleiner ausfallen, als die des Herrn Gumlich. Ich hätte die Versuche gerne mit einer größeren Maschine und besseren magnetischen Spannungsmessern wiederholt und sie durch oscillographische Aufnahmen ergänzt. Der Krieg zwang mich indessen zur Unterbrechung. Die Versuche sind daher nicht als die letzte Stufe der erzielbaren Genauigkeit zu bezeichnen. Immerhin geht aus ihnen soviel hervor, daß die neue Meßmethode auf einer gesunden Grundlage beruht, und daß es aussichtsvoll ist, sie weiter zu verfolgen.

7. **Schlußbemerkung.** Im vorhergehenden wurde gezeigt, wie man bei gradliniger Magnetisierung den lokalen elektromagnetischen Energiefluß und den lokalen Eisenverlust messen kann. Bei nicht geradliniger Magnetisierung ist die beschriebene Methode ebenfalls anwendbar. Man muß aber die Sekundärwindungen zur Messung der elektrischen Umlaufspannung in einer von der Streuung abhängigen Ungleichförmigkeit wickeln.

Der lokale Verlust wäre auch dann zu messen gewesen, wenn sich dicht auf dem Schenkelstücke A B (Fig. 6 und 8) eine Magnetisierungswicklung befunden hätte.

Ich teile diese Aussagen ohne Beweis mit und hoffe auf sie später wieder zurückzukommen.

Unterteilung und Wechselstromwiderstand.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. **Ziel. Allgemeine Übersicht über das Ergebnis der Arbeit.** Starke Ströme erfordern große Leiterquerschnitte. Große Leiterquerschnitte haben bei Wechselstrom starke Stromverdrängung und Widerstandserhöhung zur Folge. Diesem Übelstande sucht man durch Unterteilung und Verdrillung abzuhelfen. Aus diesem Grunde wird in der drahtlosen Telegraphie die Dolezaleksche Litze benutzt. Demselben Grunde verdanken die von Herrn Hillebrand Archiv III. S. 111 beschriebenen kunstvoll verschränkten Stäbe beim Bau elektrischer Maschinen ihre Entstehung und Anwendung. Bei der Dolezalekschen Litze werden sehr viele dünne Drähte so verflochten und verdrillt, daß jeder Draht gleich oft irgend eine Stelle des Querschnittes einnimmt. Bei dem Hillebrandschen Kunststab (Fig. 1) haben die Teilstäbe immer noch recht kräftige Abmessungen. Ihre Zahl ist im allgemeinen gering. Auf jede Nut kommt nur eine einzige Verdrillung der Teilstäbe untereinander. Damit die Verdrillung vollkommen sei, muß eine bestimmte Beziehung zwischen der Höhe eines Teilleiters, der Länge der Verschränkung, der Stablänge und der

Digitized by Google

Entfernung vom Nutengrunde bestehen (Archiv III, S. 128). Ist sie erfüllt oder hat die Dolezaleksche Litze praktisch vollkommene Verdrillung, dann entfällt auf jeden Teilstab oder jeden Teildraht der gleiche Bruchteil des Gesamtstromes.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Frage: Wie ändert sich der Wechselstromwiderstand, wenn der Leiterquerschnitt mehr und mehr unterteilt wird?

Wir denken uns eine gewisse Freqenz gegeben. Wir setzen einen gewissen massiven Leiter und seinen Wechselstromwiderstand r_w als bekannt voraus. Wir stellen sodann dasselbe Leitergebilde und denselben Leiterquerschnitt aus 2 gleichen Teildrähten her, die wir nach Art einer Litze verdrillen oder nach der Hillebrandschen Vorschrift zu einem verschränkten Stabe ausbilden. Unser physikalisches Gefühl wird uns sagen, daß sich im zweiten Falle der Wechselstromwiderstand kleiner als r_w ergibt und daß wir einen noch kleineren Widerstand erhalten, wenn wir statt zwei drei Teilleiter nehmen usf.

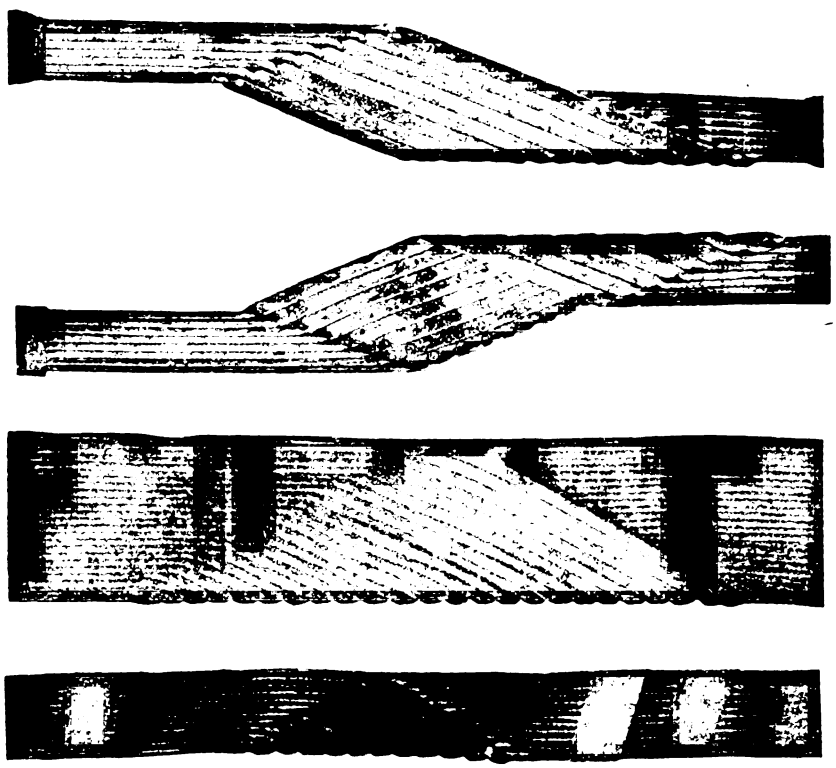


Fig. 1. Hillebrandscher Kunststab.

In einer Reihe von Fällen treffen wir hiermit auch das Richtige, und zwar dann, wenn bei dem Ausgangsquerschnitte (bei massivem Drahte) die magnetische Rückwirkung der Wirbelströme noch keine ausschlaggebende Rolle spielt. Wenn aber Ausgangsquerschnitt und Frequenz so groß sind, daß die magnetische Rückwirkung der Wirbelströme bedeutend ist, dann folgt der Widerstand einer anderen verwickelteren Abhängigkeit. Er nimmt nämlich anfangs nicht mehr mit wachsender Unterteilung ab, sondern er steigt im Gegenteil anfangs an. Er erreicht bei einer gewissen Unterteilung einen höchsten Wert. Erst wenn diese Unterteilung überschritten wird, fällt er ab und sinkt mit immer feinerer Unterteilung nach und nach auf seinen Gleichstromwert herunter.

Den geschilderten Einfluß der Unterteilung kann man aus der Figur 2 ablesen. Sie gilt streng für einen Hillebrandschen Kunststab. Sie gilt dem Charakter nach auch für eine Spule aus Dolezaleklitze.

Digitized by Google

Die unterste Kurve (Nutentiefe 2 cm) entspricht dem Falle, daß die magnetische Rückwirkung der Wirbelströme beim Ausgangsquerschnitt (hier ein massiver Nutenstab aus Kupfer von 2 cm Höhe bei der Frequenz 50) klein ist. Mit wachsender Unterteilung fällt in Übereinstimmung mit unserer obigen Aussage die Widerstandskurve sofort ab. Die oberen Kurven entsprechen dem Falle starker magnetischer Rückwirkung. Wir sehen hier mit wachsender Unterteilung anfangs den seltsamen Anstieg[1]) des Widerstandes. Der Anstieg ist um so steiler, je größer die magnetische Rückwirkung des Ausgangsquerschnittes ist. Erst bei merklicher Unterteilung fängt der Widerstand an zu sinken, um mit wachsender Unterteilung überall dem Gleichstromwerte zuzustreben.

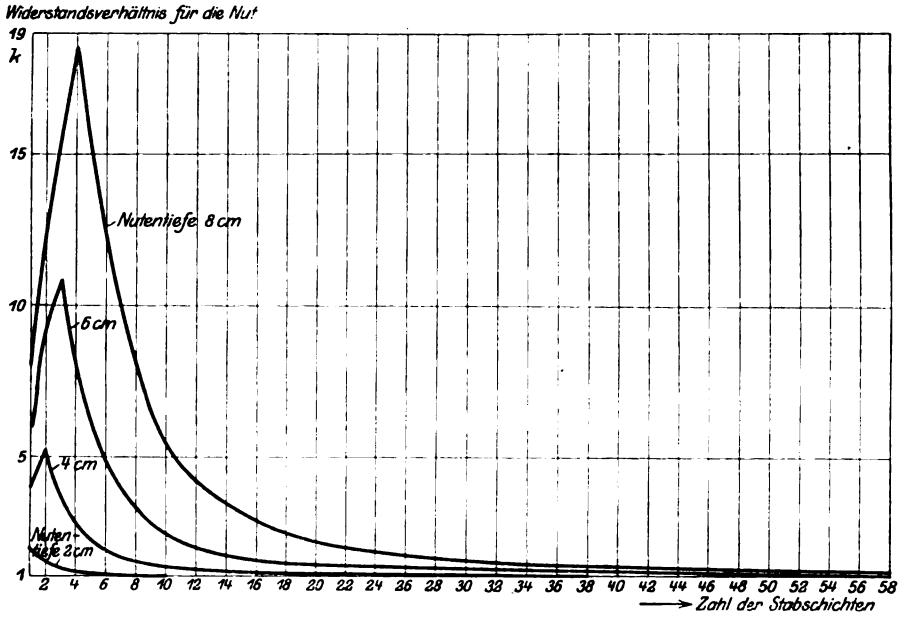


Fig. 2. Wechselstromwiderstand und Unterteilung.

Wir haben somit zu unterscheiden zwischen einer ungünstigsten Unterteilung, bei der der Wechselstromwiderstand ein Maximum erreicht, und einer wirkungslosen Unterteilung, bei der der unterteilte und nicht unterteilte Leiter denselben Wechselstromwiderstand haben. Soll ein unterteilter Leiter einen kleineren Wechselstromwiderstand haben als ein massiver Leiter gleichen Querschnitts, so muß bei ihm die wirkungslose Unterteilung überschritten werden.

Wie weit soll dies geschehen? Soweit, daß man sich unterhalb des Widerstandsminimums befindet. Im II. Bd. des Archivs S. 106 und im III. Bande, S. 271 habe ich nachgewiesen, daß bei gegebener Frequenz und gegebener Unterteilung, der Wechselstromwiderstand wieder zunimmt, wenn man eine „kritische" Drahtstärke überschreitet, daß er bei der „kritischen" Drahtstärke ein Minimum hat. Man muß daher, wenn man sich den Vorwurf von Metall- und Energievergeudung ersparen will, den vorgegebenen Gesamtquerschnitt soweit unterteilen, daß die Drahtstärke gleich oder kleiner als die kritische wird. Diejenige Unterteilung, die zum Widerstandsminimum gehört, will ich die „kritische" nennen. Wie ich bereits früher nachgewiesen habe, hat man beim Widerstandsminimum und daher auch bei der kritischen Unterteilung höchstens 33% zusätzliche Kupferverluste[2]) (a. a. O.).

[1]) Die physikalische Erklärung dieses Anstiegs deckt sich mit meiner Erklärung, Archiv III, S. 265, für die von R. Lindemann nachgewiesene kritische Frequenz.

[2]) Bei Spulen aus Litze gilt dies nur bei rechteckigem Querschnitt der Teildrähte. Bei runden Drähten gehören zum Widerstandsminimum 50% zusätzliche Kupferverluste (s. Ausdruck 24a).

Digitized by Google

Wir fassen unser Ergebnis für die praktische Anwendung kurz folgendermaßen zusammen:

Ist die Drahtstärke (Stabhöhe) des Anfangsquerschnittes klein (schwache magnetische Rückwirkung der Wirbelströme), so drückt man den Widerstand mit jeder beliebigen Unterteilung herab. Ist dagegen die Drahtstärke (Stabhöhe) des Anfangsquerschnitts groß (starke magnetische Rückwirkung der Wirbelströme) und soll der Wechselstromwiderstand mit der Unterteilung kleiner werden, so muß man eine gewisse Unterteilung, die wirkungslose Unterteilung, überschreiten. Bleibt man unter ihr, so erhält man keine Verkleinerung, sondern eine Vergrößerung des Wechselstromwiderstandes. Es ist zweckmäßig, soweit zu unterteilen, daß die „kritische" Unterteilung erreicht, wenn nicht gar überschritten wird.

Die Figur 2 ist meiner Arbeit über das Widerstandsminimum entnommen (Archiv II, S. 101). Sie soll dort dem Leser zeigen, wie sich das Widerstandsverhältnis ändert, wenn man die Kupferhöhe einer Nut konstant hält und die Schichtzahl ändert. Man liest aus ihr ab, daß hohen Schichtzahlen kleine Werte des Widerstandsverhältnisses entsprechen. Herr R. Richter hat später (Archiv IV, S. 16) darauf aufmerksam gemacht, daß es vorteilhaft ist, Nutenwicklungen mit hoher Schichtzahl auszuführen, in der Annahme, dies gehe aus der Fig. 2 nicht genügend hervor.

Unsere Aussage über die Wirkung der Unterteilung steht im Einklang mit der von R. Lindemann[1]) gefundenen kritischen Frequenz einer Litze. Herr Lindemann fand durch den Versuch, daß eine Spule aus Litze von einer gewissen Frequenz an einen höheren Widerstand hat als eine Spule aus Massivdraht vom gleichen Querschnitt[2]). Das Lindemannsche Resultat kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden: Es gibt Frequenzen, bei denen eine Spule aus Litze (bei unterteiltem Querschnitt) einen größeren Widerstand hat als dieselbe Spule aus Massivdraht vom gleichen Querschnitt. Diese Aussage ist in unserem obigen Resultate (vgl. den Anstieg der Kurven der Figur 2) enthalten.

Den großen Zügen nach haben wir uns über den Einfluß der Unterteilung ins Klare gesetzt. Wir wollen nun noch die kritische, wirkungslose und ungünstigste Unterteilung berechnen.

a. Kritische, wirkungslose und ungünstige Unterteilung beim Hillebrandschen Kunststabe und bei verwandten Stäben. a) Die kritische Schichtzahl. Die gesamte Kupferhöhe des Stabes sei H. Dem massiven Stabe kommt ein Widerstandsverhältnis zu[3]):

$$k = \varphi(\xi_0) = \xi_0 \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\xi_0 + \sin 2\xi_0}{\mathfrak{Cof}\, 2\xi_0 - \cos 2\xi_0}. \qquad 1)$$

$$\xi_0 = \alpha H. \qquad 2)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{n}{50}} \cdot \sqrt{\frac{L}{50}} \Big| \frac{b}{a} \qquad 3)$$

n = Frequenz, L = Leitfähigkeit (die Leitfähigkeit handwarmen Kupfers gleich 50 gesetzt) b = Kupferbreite, a = Nutenbreite. Wird der Stab nun in m Teilstäbe von der Höhe $\frac{H}{m}$ unterteilt, und ist die Verdrillung vollkommen, so führt jeder Teilstab den gleichen Teilstrom. Sein neues Widerstandsverhältnis ist dann gleich dem Widerstandsverhältnis einer Nut von m Schichten mit der Stabhöhe $\frac{H}{m}$. Für dieses gilt der Ausdruck:

[1]) Verhandlungen der Phys. Gesellschaft 1909 S. 682.

[2]) Meine Formel für den Widerstand von Spulen aus Litze hat diese Aussage Lindemanns bestätigt und die „kritische" Frequenz zu berechnen gestattet. Archiv III, S. 271.

[3]) Die Formel 1—10 sind meiner Arbeit über das Widerstandsminimum, Archiv II, S. 101, entnommen.

Digitized by Google

$$k = \varphi\left(\frac{\xi_0}{m}\right) + \frac{m^2 - 1}{3} \cdot \psi\left(\frac{\xi_0}{m}\right) \qquad 4)$$

$$\psi(\xi) = 2\,\xi\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi}. \qquad 5)$$

Solange die reduzierte Stabhöhe ξ klein ist ($\xi < 0{,}75$) (kleine magnetische Rückwirkung der Wirbelströme) gelten die Näherungsformeln:

$$\varphi(\xi) = 1 + 0{,}09\,\xi^4 \qquad 6)$$

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}. \qquad 7)$$

Bei großen Werten ξ (große magnetische Rückwirkungen der Wirbelströme) ($\xi > 2$) kann man in Annäherung schreiben:

$$\varphi(\xi) = \xi$$

$$\psi(\xi) = 2\,\xi. \qquad 9)$$

Die Ausdrücke 1—9 bilden die Grundlage aller weiterer Rechnungen. Denkt man sich die Frequenz und die Schichtzahl konstant, die Höhe H aber veränderlich, so ist der Wechselstromwiderstand lediglich eine Funktion der Höhe der Teilstäbe $h = \frac{H}{m}$. Wie ich früher (Archiv II, S. 108) gezeigt habe, nimmt er mit wachsender Höhe H zuerst ab, erreicht dann ein Minimum und steigt nach Überschreiten desselben (unter Umstände-n recht stark) wieder an. Das Widerstandsminimum wird erreicht, wenn die Forderung erfüllt ist:

$$H = \frac{1{,}3_1}{\alpha}\sqrt{m} \qquad 10)$$

Umgekehrt soll ein Stab soweit unterteilt werden, daß das Widerstandsminimum grade erreicht wird, so daß man also nicht den Vorwurf machen kann, er enthalte „schädliches" Metall, dann muß die kritische Schichtzahl M_k die Forderung erfüllen:

$$M_k = 0{,}58\,H^2\alpha^2 \qquad 11)$$

Zahlenbeispiel: Ein Kupferstab von der Höhe $H = 8$ cm soll bei der Frequenz 50 und bei voller Kupferausfüllung der Nut ($\alpha = 1$) geblättert werden. Wie groß ist die kritische Schichtzahl M_k? Nach Formel 11) liegt sie bei

$$M_k = 0{,}58 \cdot 64 \sim 37.$$

Betrüge die Kupferbreite die Hälfte der Nutenbreite

$$\left(\frac{b}{a} = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

so würde sich

$$M_k = 0{,}58 \cdot 64\,\frac{1}{2} \sim 19$$

ergeben haben.

b) Die wirkungslose Schichtzahl M_w. Der Gleichstromwiderstand der Nut ist bei massivem und geblättertem Stabe derselbe. Damit der unterteilte und massive Stab auch denselben Wechselstromwiderstand habe, muß das Widerstandsverhältnis des massiven und des unterteilten Leiters den gleichen Wert haben. Dies trifft zu, wenn die Schichtzahl $m = M_w$ die durch folgende Gleichung ausgedrückte Forderung erfüllt (vgl. Ausdruck 4):

$$\varphi(\xi_0) = \varphi\left(\frac{\xi_0}{M_w}\right) + \frac{M_w^2 - 1}{3} \cdot \psi\left(\frac{\xi_0}{M_w}\right) \qquad 12)$$

Digitized by Google

Wenn die reduzierte Höhe ξ_0 des massiven Stabes unterhalb 2 liegt, also so klein ist, daß die Näherungsformeln 6) und 7) für kleines Argument für alle Funktionen anwendbar sind, dann genügen, wie man sich selbst leicht überzeugt, keine reellen positiven Werte M_w von der Gleichung 12) (vgl. auch Fig. 2 unterste Kurve). Das ist erst dann der Fall, wenn ξ_0 größer als 2 ist und daher für die linke Seite der Gleichung 12 von der für großes Argument gültigen Näherungsformel 8) Gebrauch gemacht werden kann. Aus der Figur 2 entnehmen wir, daß die Werte der wirkungslosen Schichtzahl M_w, für die bei geblättertem und massivem Stabe der Wechselstrom gleich groß ist, so hoch liegen, daß $\frac{\xi_0}{M_w}$ in das Gebiet kleiner Argumente ξ fällt. Wir werden daher in der rechten Seite der Gleichung 12 die Funktionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ durch ihre für kleines Argument gültigen Näherungen ersetzen. Wir halten mit den vorgeschlagenen Vereinfachungen:

$$\xi_0 = 1 + \frac{\xi_0^4}{M_w^4}\left\{\frac{M_w^2}{9} - 0{,}02\right\}. \qquad 13)$$

Wenn die reduzierte Stabhöhe und daher auch das Widerstandsverhältnis ξ_0, wie vorausgesetzt, groß gegen 1 sind, können wir 1 auf der rechten Seite streichen. Wir vernachlässigen weiter noch 0,02 gegen M_w^2 und erhalten:

$$\xi_0 = \frac{1}{9}\frac{\xi_0^4}{M_w^2} \qquad 14)$$

Für wirkungslose Schichtzahl gilt somit der Ausdruck:

$$M_w = \frac{1}{3}\cdot\xi_0\sqrt{\xi_0} = \frac{1}{3}\alpha H\sqrt{\alpha H} \qquad 15)$$

Zahlenbeispiel: Es soll ein Kupferstab von einer Höhe H = 10 cm geblättert und verschränkt werden. Die Frequenz sei 50. Die Kupferbreite b sei gleich der Hälfte der Nutenbreite a. Bei wie vielen Teilstäben hat der Kunststab den gleichen Wechselstromwiderstand wie der massive Stab? Es ist

$$\alpha = 1\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{1}{2}};\ H = 10;$$

somit die reduzierte Stabhöhe ξ_0 des Anfangsquerschnittes

$$\xi_0 = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}06.$$

Sie ist größer als 2. Infolgedessen gibt es eine wirkungslose Schichtzahl. Sie liegt bei[1])

$$M_w = \frac{7{,}06}{3}\cdot\sqrt{7{,}06} = \sim 7$$

Also erst, wenn wir den Stab in mehr als 7 Teilstäbe zerlegen und nach der Hillebrandschen Vorschrift verdrillen, nimmt der Wechselstromwiderstand ab. Wir stellen noch fest, daß nach Überschreitung der wirkungslosen Schichtzahl der Überschuß des Widerstandsverhältnisses über 1 praktisch umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Schichtzahl abnimmt (siehe rechte Seite von Gleichung 13 und 14). Die zusätzlichen Jouleschen Verluste würden somit bei 14 Teilstäben auf den 4., bei 21 Teilstäben auf den 9. Teil ihres Anfangswertes (bei massivem Stabe) zurückgehen.

c) Die ungünstigste Schichtzahl M_u. Der Wechselstromwiderstand wird allgemein durch den auf der rechten Seite der Gleichung 4 oder 12 stehenden Ausdruck dargestellt.

[1]) Bei dem Werte $\xi_0 = 8$ ($H = 8$; $\alpha = 1$) kommt man zu der wirkungslosen Schichtzahl $M_w = 8$. Dies ist in Übereinstimmung mit der Figur 2.

Digitized by Google

In dem Gebiete des Widerstandsanstieges (Fig. 2) ist m so klein, daß $\frac{\xi_0}{m}$ als große Zahl behandelt werden kann. Mit den Näherungsformeln 8) und 9) erhält man:

$$k = \frac{\xi_0}{m} + \frac{m^2 - 1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\xi_0}{m}$$

oder angenähert: $$k = \frac{2}{3} \cdot \xi_0 m. \qquad 16)$$

In dem Gebiete abfallenden Widerstandes gilt ebenfalls der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung 4, nur mit dem Unterschiede, daß hier große Werte der Schichtzahl m und daher kleine Werte der Größe $\frac{\xi_0}{m}$ in Betracht kommen. Für dieses Gebiet schreiben wir nach Anwendung der Formeln 6) und 7)

$$k = 1 + \frac{\xi_0^4}{m^4}\left\{\frac{m^2}{9} - 0{,}02\right\}$$

oder angenähert $$k = \frac{1}{9}\frac{\xi_0^4}{m^2} \qquad 17)$$

Der Ausdruck 16) gibt einen mit m ansteigenden, der Ausdruck 17) einen mit m absteigenden Wert von k (Fig. 2). Beide Gebiete schneiden sich im Punkte des höchsten Widerstandes. Für diesen muß die Schichtzahl $m = M_u$ somit die Forderung erfüllen:

$$\frac{2}{3} \cdot \xi_0 M_u = \frac{1}{9} \cdot \frac{\xi_0^4}{M_u^2}$$

Es folgt: $$M_u = \frac{\xi_0}{\sqrt[3]{6}} = 0{,}55 \alpha H. \qquad 18)$$

Bei Kupfer und voller Nutenausfüllung ist bei der Frequenz 50 die Hilfsgröße $\alpha = 1$. Beträgt die Stabhöhe 8 cm, so liegt das Maximum des Weschelstromwiederstandes nach Formel 18 bei der Schichtzahl $H_w = 0{,}55 \cdot 8 \sim 4$. Dies Resultat ist in Übereinstimmung mit Figur 2.

3. Die kritische, wirkungslose und ungünstigste Unterteilung bei Litzenspulen. a. Die kritische Drahtzahl. Für das Widerstandsverhältnis einer Litzenspule hat man zu schreiben[1]):

$$k = \varphi(\xi) + \frac{Z - 1}{3} \cdot \psi(\xi) \qquad 19)$$

$$\xi = 0{,}89 \alpha' d \qquad 20)$$

$$\alpha' = \frac{1}{50}\sqrt{n L \sqrt{Z} \cdot \frac{0{,}89\, d}{g}} \qquad 21)$$

Z = Drahtzahl der Litze, d = Durchmesser eines Teildrahtes, g = Ganghöhe, n = Frequenz; L = Leitfähigkeit des Leitmaterials (für handwarmes Kupfer ist $L = 50$), $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ sind dieselben Funktionen wie im Abschnitt 2.

Denken wir uns zunächst die Drahtzahl Z, die Frequenz n und die Ganghöhe g gegeben, so sind bei vorgegebenem Material der Wechselstromwiderstand und die Größe ξ lediglich Funktionen des Drahtdurchmessers d. Der Gleichstromwiderstand für 1 cm ist

$$r_g = \frac{1}{d^2 \frac{\pi}{4} \cdot Z L.}$$

[1]) Archiv III, S. 269.

Digitized by Google

Der Wechselstromwiderstand r_w hat daher den Wert

$$r_w = \frac{1}{\frac{\pi}{4} L \cdot Z} \cdot \frac{1}{d^2} \left\{ \varphi(\xi) + \frac{Z-1}{3} \cdot \psi(\xi) \right\}$$

Die Zusammenstellung von Formel 20) und 21 ergibt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\xi^2}{\beta^2}} \qquad 22)$$

wo

$$\beta = \frac{0{,}89}{50} \cdot \sqrt{n L \frac{\sqrt{Z}}{g} \cdot 0{,}89} \qquad 23)$$

$$\beta = 0{,}0168 \cdot \sqrt{\frac{n L}{g}} \cdot \sqrt[4]{Z} \cdot \qquad 23a)$$

Für kleine Werte der Veränderlichen ξ kann man daher für den Wechselstromwiderstand schreiben:

$$r_w = \frac{\beta^{\frac{4}{3}}}{\frac{\pi}{4} L Z} \cdot \left\{ \xi^{-\frac{4}{3}} + \frac{Z}{9} \xi^{\frac{8}{3}} \right\}$$

Der Wechselstromwiderstand hat ein Minimum, wenn $\frac{\partial r_w}{\partial \xi}$ verschwindet, also wenn

$$-\frac{4}{3} \xi^{-\frac{7}{3}} + \frac{Z}{9} \cdot \frac{8}{3} \xi^{\frac{5}{3}} = 0$$

ist. Für den kritischen Wert der Größe $\xi = \xi_k$ ergibt sich somit

$$\xi_k = \frac{1{,}46}{\sqrt[4]{Z}} \qquad 24)$$

Hierzu gehört das kritische Widerstandsverhältnis:

$$k_k = 1 + \frac{Z}{9} \cdot \xi_k^4 = 1{,}50, \qquad 24a)$$

der „kritische" Drahtdurchmesser:

$$d_k = \sqrt[3]{\frac{\xi_k^2}{\beta^2}} = \frac{1{,}28}{\sqrt[3]{\beta^2 \sqrt{Z}}}, \qquad 25)$$

und der „kritische" Querschnitt

$$Q_k = d_k^2 \frac{\pi}{4} Z = 303 \sqrt[3]{\frac{Z \cdot g^2}{n^2 L^2}} \cdot \qquad 26)$$

Rechnet man statt des Querschnitts Q_k mit dem Durchmesser D_k des gleichwertigen Massivsdrahtes $\left(D_k^2 \frac{\pi}{4} = Q_k \right)$ so hat man zu schreiben:

$$D_k = 19{,}6 \sqrt[6]{\frac{Z \cdot g^2}{n^2 L^2}} \qquad 27)$$

Umgekehrt, soll ein gegebener Querschnitt Q soweit unterteilt werden, daß die Litze gerade im Widerstandsminimum arbeitet, dann muß die kritische Drahtzahl $Z = Z_k$ die Forderung erfüllen:

Digitized by Google

$$Z_k = 3{,}63 \cdot 10^{-8} \cdot Q^3 \cdot \frac{n^2 L^2}{g^2} \qquad 28)$$

oder

$$Z_k = 1{,}77 \cdot 10^{-8} \cdot D^6 \frac{n^2 L^2}{g^2} \qquad 29)$$

zahlenbeispiel: Es werde eine Kupferlitze vom Gesamtquerschnitt $Q = 0{,}0092$ cm² ($D = 0{,}108$ cm) und der Ganghöhe $g = 0{,}188$ cm bei der Frequenz $n = 8{,}11 \cdot 10^5$ mit Wechselstrom beschickt. Die Angaben entsprechen einer von Alex. Meißner untersuchten Litze (Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 1909 S. 73, Spule III). Die „kritische" Draht-Zahl dieser Litze liegt bei

$$Z_k = 1{,}77 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{0{,}108^6 \cdot 8{,}11^2 \cdot 10^{10} \cdot 60^2}{0{,}188^2} = 1880.$$

Bei Meißner betrug die Drahtzahl 81. Die Litze arbeitete daher bei der vorgegebenen Frequenz weit oberhalb des Minimums. Das geht auch aus ihrem Widerstandsverhältnis hervor, das bei Meißner 12 beträgt und daher weit höher liegt als der Wert von 1,50, der im Minimum erreicht wird[1]).

b.) Dei wirkungslose Drahtzahl. Wir betrachten den Durchmesser D und daher auch den Querschnitt $Q = D^2 \frac{\pi}{4}$ des massiven Drahtes als vorgegeben und fest, die Drahtzahl Z als veränderlich. Deshalb setzen wir:

$$d^2 \cdot Z = D^2 \qquad 30)$$

$$\xi = \frac{\gamma}{\sqrt{Z}}$$

wo

$$\gamma = \frac{0{,}89\,D}{50}\sqrt{n\,L \cdot \frac{0{,}89\,D}{g}} = D \cdot \sqrt{\frac{n\,L\,D}{g}} \cdot 0{,}0168, \qquad 31)$$

Für das Widerstandsverhältnis kommen bei der nicht unterteilten Spule ($Z = 1$) große Werte des Arguments und die Näherungsformel 8) in Betracht. Man kann für sie schreiben:

$$k = \xi_0 = \gamma \qquad 32)$$

Bei unterteiltem Querschnitt machen wir von der allgemein gültigen Formel 19) und den für kleines Argument gültigen Näherungsformeln 6) und 7) Gebrauch, wodurch wir erhalten:

$$k = 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^4}{Z}$$

oder bei Vernachlässigung der ersten

$$k = \frac{1}{9}\frac{\gamma^4}{Z} \qquad 32\,a)$$

Wenn die Werte 32) und 32a) des Widerstandsverhältnisses gleich sein sollen, was wir für die wirkungslose Drahtzahl $Z = Z_w$ verlangen müssen, so muß sein:

$$Z_w = \frac{1}{9}\gamma^3.$$

$$Z_w = 5{,}28 \cdot 10^{-7} \cdot D^4 \cdot \frac{n\,L}{g}\sqrt{\frac{n\,L\,D}{g}} \qquad 33)$$

[1]) Dies soll kein Vorwurf gegen die Meißnersche Litze sein. Herr Meißner hatte diese Litze in einem größeren Frequenzbereiche benutzt und wollte sich durch den Versuch Einblick in die Abhängigkeit des Wechselstromwiderstandes von Drahtdicke und Schichtzahl verschaffen. Ich greife die höchste Frequenz heraus, um zu zeigen, daß bei den üblichen Litzen unter ungünstigen Fällen unsere Behandlungen über kritische wirkungslose und ungünstige Drahtzahl wohl beachtet werden müssen.

Digitized by Google

c) **Die ungünstigste Drahtzahl.** Wie im Abschnitt 2c müssen wir zur Berechnung der ungünstigsten Drahtzahl den allgemein gültigen Ausdruck 4 bzw. 19 für das Widerstandsverhältnis einmal für große, das andere für kleine Werte des Arguments anschreiben. Dies ergibt die beiden Ausdrücke:

$$k = \frac{\gamma}{\sqrt{Z}} + \frac{Z-1}{3} \cdot \frac{2\gamma}{\sqrt{Z}}$$

$$k \sim = \frac{2}{3} \cdot \gamma \sqrt{Z} \qquad 34)$$

und

$$k = 1 + 0{,}09 \cdot \frac{\gamma^4}{Z^2} + \frac{Z-1}{9} \cdot \frac{\gamma^4}{Z^2}$$

$$k \sim = \frac{\gamma^4}{9 \cdot Z} \cdot \qquad 35)$$

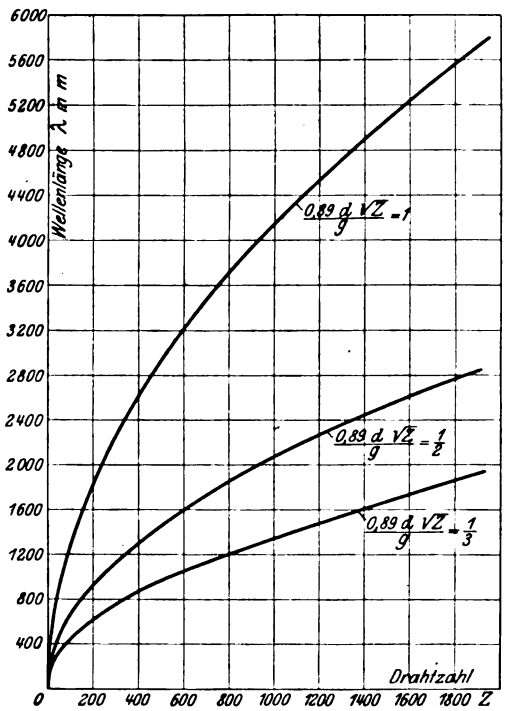


Fig. 3. Wirkungslose Grenzwellenlänge einer Litzenspule in Abhängigkeit von der Drahtzahl. Drahtdurchmesser d = 0,12 mm.

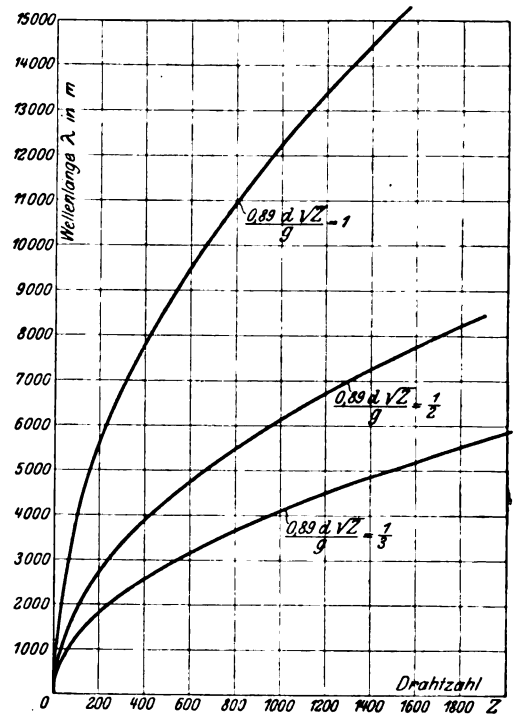


Fig. 4. Wirkungslose Grenzwellenlänge einer Litzenspule in Abhängigkeit von der Drahtzahl. Drahtdurchmesser d = 0,07 mm.

Der Ausdruck 34 gibt einen mit der Drahtzahl z ansteigenden, der Ausdruck 35 einen mit z sinkenden Wert (vgl. Fig. 2). Beide Ausdrücke nehmen denselben Wert beim größten Widerstande an. Dies führt zu folgender Forderung für die ungünstigste Drahtzahl $z = z_u$:

$$\frac{2}{3} \cdot \gamma \sqrt{Z_u} = \frac{\gamma^4}{9 \cdot Z_u}$$

Aus dieser ergibt sich:

$$Z_u = \frac{\gamma^2}{3{,}3} \qquad 36)$$

$$Z_u = D^3 \cdot \frac{n\,L}{g} \cdot 0{,}86 \cdot 10^{-4}.$$

Digitized by Google

Zahlenbeispiel: Für vorhin (Abschnitt 3a und b) durchgerechnete Litze ist die wirkungslose Drahtzahl:

$$Z_u = 5{,}28 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}108^4 \cdot \frac{8{,}11 \cdot 10^5 \cdot 60}{0{,}188} \cdot \sqrt{\frac{8{,}11 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 0{,}108}{0{,}188}} = 98.$$

Bei 98 Teildrähten ist also der Widerstand der Spule aus Litze gleich dem Widerstand der Spule aus Massivdraht von gleichem Querschnitt. Bei Meißner hatte die Litze 81 Teildrähte; sie blieb also unterhalb der wirkungslosen Unterteilung. Die Meißnersche Spule hätte daher aus Massivdraht gewickelt einen kleineren Widerstand gehabt. Dies wird durch eine Nachrechnung bestätigt. Der Massivdrahtspule kommt ein Widerstandsverhältnis von 9,6 zu, der Litzenspule bei der Frequenz $8{,}11 \cdot 10^5$ das Widerstandsverhältnis 12. die Frequenz von $8{,}11 \cdot 10^5$ muß somit jenseits der Lindemanschen kritischen Frequenz n_k liegen. Auch dies ist der Fall. Für die kritische Frequenz ergibt sich nach der von mir (Archiv III, S. 270) aufgestellten Formel

$$n_k = \frac{15\,300 \cdot \sqrt{2}}{d^3 \cdot L \cdot Z \cdot}$$

der Wert von $n_k = 7{,}0 \cdot 10^5$.

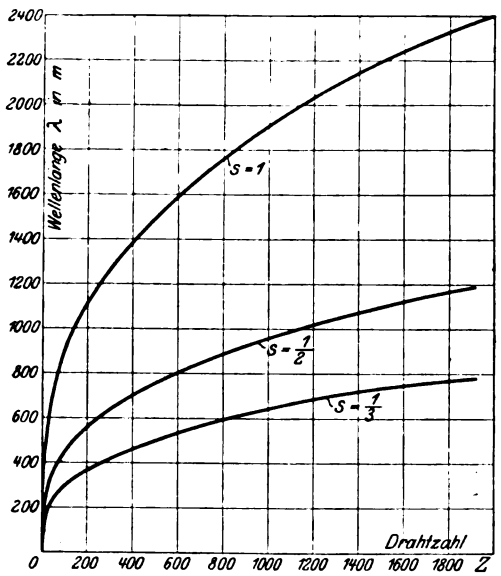


Fig. 5. Kritische Grenzwellenlänge einer Litzenspule in Abhängigkeit von der Drahtzahl. Drahtdurchmesser d = 0,12 mm.

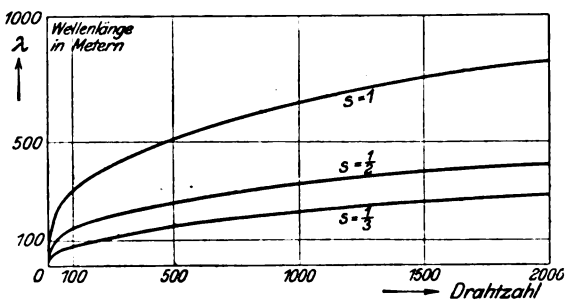


Fig. 6. Kritische Grenzwellenlänge einer Litzenspule in Abhängigkeit von der Drahtzahl. Drahtdurchmesser d = 0,07 mm.

Die ungünstigste Unterteilung, bei der die Litzenspule ihren größten Widerstand hat, liegt bei der Drahtzahl

$$Z_u = \frac{0{,}108^3 \cdot 8{,}11 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 0{,}86 \cdot 10^{-4}}{0{,}188} = 28.$$

4. Litze oder massiver Draht? Im Abschnitt 3 sind bei Aufstellung der Formeln für kritische, wirkungslose und ungünstige Schichtzahl der Gesamtkupferquerschnitt $Q = D^2\pi$, die Frequenz n, die Leitfähigkeit L und die Ganghöhe g als bekannt vorausgesetzt worden. Wir wollen in diesem Abschnitt annehmen, wir stellen den Gesamtquerschnitt durch Verdrillen einer gegebenen Zahl Z von Einzeldrähten her, deren Durchmesser d gegeben ist. Wir fragen, bei welcher Frequenz oder besser bei welcher Wellenlänge λ (in Metern) die kritische oder wirkungslose Schichtzahl erreicht wird. Wir erhalten so zwei Grenzwellenlängen, die ich die „kritische" und die „wirkungslose" Grenzwellenlänge nennen will (λ_K und λ_W).

Man leitet leicht ab; daß die für die kritische Grenzwellenlänge der Ausdruck gilt:

$$\lambda_K = 4{,}47 \cdot 10^4 d^2 L \sqrt{Z}\, s. \qquad 37)$$

$$s = \frac{0{,}89\, d \sqrt{Z}}{g} \qquad 38)$$

Digitized by Google

Für die wirkungslose Grenzwellenlänge hat man zu schreiben:

$$\lambda_W = 2{,}2 \cdot 10^4 \cdot d^2 L \sqrt[3]{W \cdot s} \qquad 39)$$

Nach diesen Formeln habe ich in den Bildern 3, 4, 5 und 6 die Grenzwellenlängen für eine Litze aus Einzeldrähten vom Durchmesser von 0,07 und 0,12 mm aufgetragen. Die Grenzwellenlängen ergeben sich als stark abhängig von der Größe s (Ausdruck 38). Dieses Verhältnis gibt an, welcher Bruchteil der Ganghöhe mit Leitermaterial ausgefüllt ist. Für s kommen daher etwa die Werte von 1 bis $^1/_3$ in Betracht.

Ist eine Wellenlänge kleiner als die kritische Grenzwellenlänge, so arbeitet die Litzenspule jenseits des Widerstandsminimums; ist sie sogar kleiner als die wirkungslose Grenzwellenlänge, so nutzt die Verdrillung nichts, sondern schadet nur. Statt der Litze ist dann der massive Draht besser.

Bei einer Spule aus Litze vom Drahtdurchmesser von 0,012 mm und von 200 Einzeldrähten kann das letztere schon, wie ein Blick auf das Bild 4 lehrt, bei einer Wellenlänge von 1 km eintreten. Bei einer Spule aus Litze von 0,07 mm Durchmesser und 200 Einzeldrähten tritt dies erst ein (Bild 6), wenn die Wellenlänge kleiner als etwa 400 m ist.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 10. Heft. 1916.

Elektromagnetische Wellen in Spulen mit Windungskapazität.

Von

Manne Siegbahn.

Einleitung. In einer Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt (E. u. M. 1915, Heft 8 und 9) hat K. W. Wagner durch Berücksichtigung der Kapazität zwischen den Windungen einer Spule einige ebenso theoretisch interessante wie praktisch bedeutsame Resultate gewonnen. Im folgenden wird zuerst eine sehr allgemein verwendbare Methode (nach O. Heaviside) zur Behandlung derartiger Probleme entwickelt, und dann, nach einer kurzen Herleitung der Wagner schen Resultate der entsprechende Vorgang bei einer offenen (nicht geerdeten) Spule behandelt. Im letzten Falle wird die betreffende Reihe unter passend gewählten numerischen Werten der Konstanten berechnet und der Vorgang des elektromagnetischen Ausgleichs graphisch dargestellt.

1. **Einige Hilfssätze.** Bezeichnet p den Operator $\frac{\partial}{\partial t}$, so gilt:

$$\frac{p}{p-a} \cdot 1 = e^{at} \qquad 1)$$

Der Satz kann einfach durch Reihenentwicklung bewiesen werden:

$$\begin{aligned}\frac{p}{p-a} 1 &= 1 + \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots . \\ &= e^{at},\end{aligned}$$

weil

$$\frac{1}{p} = \int dt = t$$

und allgemein

$$\frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!} \qquad 2)$$

Bei elektrischen Problemen findet man allgemein eine Relation zwischen der Spannung v und Stromstärke i nach Art des einfachen Ohmschen Gesetzes

$$v = Z \cdot i \qquad 3)$$

nur ist hier Z eine Funktion von p. Es sei

$$Z = \frac{g(p)}{f(p)}. \qquad 4)$$

Wir setzen v als bekannt voraus; dann ist die symbolische Lösung:

$$i = \frac{f(p)}{g(p)} \cdot v, \qquad 5)$$

die zu verwerten ist. Hierzu kann das Expansionstheorem von Heaviside (Electromagnetic Theory Vol. II, p. 127) benutzt werden. Es möge hier ein kurzer Beweis dieses überaus wichtigen Satzes angeführt werden, ohne auf Originalität Anspruch zu machen (Heaviside selbst gibt keine Begründung des Theorems. Ein von H. W. Malcolm in The

Digitized by Google

Theory of the submarine Cable Electrician 1913 gegebenen Beweis zeigt am besten, daß ein solcher wohl am Platz ist).

Wir nehmen an, die Funktion g (p) sei für gewisse (einige oder unendlich viele) Werte $p_1 p_2 \ldots p_n \ldots$ gleich Null. Dann gilt für $\frac{f(p)}{g(p)}$ [1]) die Reihe:

$$\frac{f(p)}{g(p)} = A_0 + A_1 \frac{p}{p - p_1} + A_2 \frac{p}{p - p_2} \qquad 6)$$

Die Koeffizienten dieser Reihe bestimmen sich leicht folgendermaßen: zu $p = o$ erhält man:

$$A_0 = \frac{f(o)}{g(o)} \qquad 7)$$

Zur Bestimmung von A_n multiplizieren wir 6) beiderseits mit $(p - p_n)$ und setzen nachher $p = p_n$. Dann bekommen wir

$$\lim_{p=p_n} \frac{(p - p_n) f(p)}{g(p)} = A_n p_n \qquad 8)$$

und daher mit Hilfe der Regeln für die Behandlung unbestimmter Ausdrücke:

$$A_n = \frac{f(p_n)}{p_n g'(p_n)} \qquad 9)$$

Durch Einsetzen der so bestimmten Reihe für $\frac{f(p)}{g(p)}$ in Gl. 5 erhalten wir, wenn v von $t = o$ bis $t = \infty$ den konstanten Wert E_0 hat, unter Benutzung von 1):

$$m = A_0 E_0 + A_1 E_0 e^{p_1 t} + A_2 E_0 e^{p_2 t} \qquad 9)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$i = A_0 E_0 + E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(p_n)}{p_n g'(p_n)} e^{p_n t} \qquad 10)$$

In dieser Form ist der Satz von Heaviside (a. a. O. S. 127) angegeben. Ist im allgemeinen Falle v eine beliebige (bekannte) Funktion von t, so finden wir leicht:

$$i = A_0 v(t) + A_1 v(t) + \ldots +$$

$$+ A_1 p_1 e^{p_1 t} \int_0^t e^{-p_1 t} v(t)\, dt + A_2 p_2 e^{p_2 t} \int_0^t e^{-p_2 t} v(t)\, dt + \ldots . \qquad 10')$$

Zu dem in Gl. 10 gegebenen Satze fügen wir noch zwei wichtige Folgesätze hinzu: Nach Gl. 9 ist der Zustand bei $t = o$

$$i = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad 11)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ läßt sich aber nach Gl. 6 dadurch bestimmen, daß wir beiderseits $p = \infty$ setzen und es ist daher für $t = o$

$$i_0 = \frac{f(\infty)}{g(\infty)} E_0 \qquad 12)$$

Der stationäre Endzustand bestimmt sich in entsprechender Weise.
Für $t = \infty$ ist

$$i_\infty = \frac{f(o)}{g(o)} E_0 = A_0 E_0 \qquad 13)$$

[1]) Sind f (p) und g (p) rationale ganze Funktionen, so ist bei den fraglichen Probleme f (p) höchstens von denselben Grade wie g (p).

Digitized by Google

a. Leitungen mit gleichmäßig verteilten Widerständen. Für eine jede Anordnung aus Ohmschem Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität läßt sich eine Relation zwischen Spannung und Stromstärke nach Gl. 3 aufstellen:

$$v = Z \cdot i \qquad 3)$$

wo Z eine gewisse Funktion von p ist, die wir den Widerstandsoperator (oder kurz den „Widerstand") der betreffenden Anordnung nennen. Die einfachen Widerstandsoperatoren bei Ohmschem Widerstande, bei Selbstinduktion und bei Kapazität sind R, Lp, $\frac{1}{Cp}$. Aus diesen ergibt sich jetzt der Operator einer beliebigen Zusammensetzung durch folgende Sätze:

1. Bei Reihenschaltung verschiedener Widerstände Z_1, Z_2, Z_3, ist der Gesamtwiderstand Z:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n \qquad 14)$$

2. Bei Parallelschaltung gilt dagegen die Beziehung

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n} \qquad 15)$$

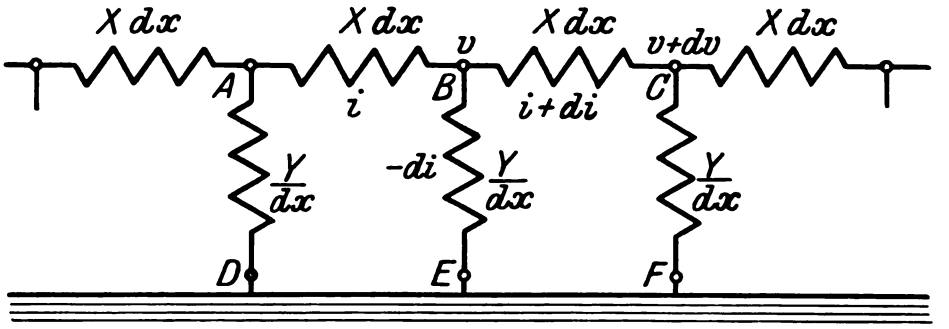


Fig. 1.

Nach diesen Bemerkungen schreiten wir zur Aufstellung der Grundgleichungen bei Leitungen mit verteiltem Widerstand. Zu dem Zwecke denken wir uns den Leiter aus unendlich vielen Widerständen nach Fig. 1 zusammengesetzt. Bedeutet dann X den Widerstandsoperator für die Längsrichtung pro Längeneinheit und Y den Widerstandsoperator für die Querrichtung (oder die Erdleitung) pro Längeneinheit, so sind die entsprechenden Größen der Strecke dx bzw. X dx, $\frac{Y}{dx}$. Nach Fig. 1 gilt dann für die Strecke B E:

$$v = -Y\frac{di}{dx} \qquad 16)$$

und für die Strecke B C

$$v - (v + dv) = X\,dx\,(i + di) \qquad 17)$$

oder, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$i = -\frac{1}{X}\frac{dv}{dx} \qquad 18)$$

Die Gleichungen 16 und 18 sind von sehr allgemeiner Art. Wir können aus ihnen z. B. durch Elimination von i die folgende Gleichung bekommen

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{X}{Y} \cdot v \qquad 19)$$

Digitized by Google

und eine ebensolche Gleichung für $i \cdot \frac{X}{Y}$. Bezeichnen wir mit γ^2:

$$\gamma^2 = \frac{X}{Y} \tag{20}$$

so erhalten wir die Lösung von 19 in der Form:

$$v = e^{+\gamma x} B_1 + e^{-\gamma x} B_2 \tag{21}$$

wo B_1 und B_2 Funktionen von t sind. Diese bestimmen sich aus den Grenzbedingungen. Sind z. B. Spannung und Stromstärke bei $x = 0$ bekannt (v_0 und i_0), so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= B_1 + B_2 \\ i_0 &= -\frac{\gamma}{X} B_1 + \frac{\gamma}{X} B_2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2}[v_0 - Z\, i_0] \\ B_2 &= \frac{1}{2}[v_0 + Z\, i_0] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wo

$$Z = \frac{X}{\gamma} = \sqrt{XY} \text{ ist.} \tag{24}$$

Durch Einsetzen dieser Werte von B_1 B_2 in 17) erhalten wir nach einigen kleinen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= -Z \sinh \gamma x \cdot i_0 + \cosh \gamma x \cdot v_0 \\ i &= \cosh \gamma x \cdot i_0 - \frac{1}{Z} \sinh \gamma x \cdot v_0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

An den Endpunkten der Leitung seien jetzt gewisse Anordnungen vorhanden (Fig. 2). Am Anfang sei ein Spannungserzeuger E_0, der über einen Widerstandsoperator $K_0(p)$ im Moment $t = 0$ in Verbindung mit der Leitung gesetzt werde. Am Ende ist die Leitung über eine beliebige Widerstandsanordnung $K_l(p)$ erdverbunden. Dann gelten die Gleichungen:

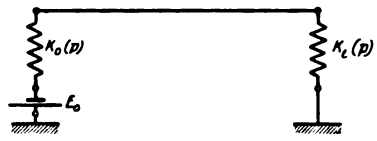


Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= E_0 - K_0 i_0 \\ v_l &= K_l i_l \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Da wir im allgemeinen nicht v_0 und i_0 kennen, sondern E_0 nebst den Widerstandsoperatoren K_0 und K_l, wollen wir i_0 und v_0 gegen die drei letzten Größen ersetzen. Wir bekommen dadurch statt Gl. 22 das folgende System:

$$\left.\begin{aligned} v &= Z \frac{Z \sinh \gamma (l - x) + K_2 \cosh \gamma (l - x)}{N} E_0 \\ i &= \frac{Z \cosh \gamma (l - x) + K_l \sinh \gamma (l - x)}{N} E_0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$N = [Z^2 + K_0 K_l] \sinh \gamma l + Z[K_0 + K_l] \cosh \gamma l \tag{28}$$

Für Spannung und Stromstärke am Ende der Leitung erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} v_l &= \frac{Z K_l}{N} E_0 \\ i_l &= \frac{Z}{N} E_0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Digitized by Google

In unseren definitiven Lösungen Gl. 27—29 haben wir nur noch die Größe Z und γ in einigen wichtigeren speziellen Fällen zu bestimmen. Da nach Gl. 20 und 24 gilt:

$$\gamma = \sqrt{\frac{X}{Y}} \qquad 20')$$

$$Z = \sqrt{XY}$$

so kommt diese auf die Bestimmung der Längs- (X) und Quer- (Y) widerstände der betrachteten Leitung heraus.

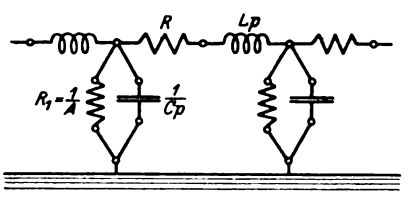


Fig. 3.

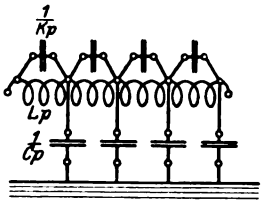


Fig. 4.

Bei gewöhnlichen Kabeln und Freileitungen haben wir (Fig. 3) in der Längsrichtung Ohmschen Widerstand R und Selbstinduktion L p, in Querrichtung Ableitung A und Kapazität C p gegen Erde zu berücksichtigen. Dies gibt sofort nach (14, 15)

$$\left.\begin{aligned} X &= R + Lp \\ \frac{1}{Y} &= A + Cp \end{aligned}\right\} \qquad 30)$$

und daher

$$\gamma = \sqrt{(R + Lp)(A + Cp)} \qquad 31)$$

$$Z = \sqrt{\frac{R + Lp}{A + Cp}} \qquad 32)$$

Bei Spulen mit Windungskapazität erhalten wir nach dem Schema (Fig. 4)

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{Lp} + Kp = \frac{1 + KLp^2}{Lp} \qquad 33)$$

$$Y = \frac{1}{Cp} \qquad 34)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{LCp^2}{1 + KLp^2}} \qquad 35)$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + KLp^2}} \qquad 36)$$

4. Die Aufladung einer am Ende erdverbundenen Spule. Dieser in der erwähnten Arbeit von K. W. Wagner behandelte Fall kann jetzt leicht erledigt werden. Wir haben in unser Gleichungssystem 24 nur zu setzen $K_0 = 0$ (wenn die Spule, wie K. W. Wagner annimmt, durch eine Spannungsquelle E_0 ohne Widerstand geladen wird), $K_1 = 0$ und erhalten dann:

$$v = \frac{\sin h\,\gamma(l - x)}{\sin h\,\gamma l} E_0 \qquad 37)$$

Der Zustand bei $t = 0$ ergibt sich sofort nach 12 zu

$$v_{t=0} = \frac{\sin h \sqrt{\frac{C}{K}}(l - x)}{\sin h \sqrt{\frac{C}{K}} \cdot l} E_0 \qquad 38)$$

Digitized by Google

Die vollständige Lösung gibt Gl. 9, wo A_n und p_n zu bestimmen sind. Wir bekommen

$$A_0 = \frac{l - x}{l} \tag{39}$$

und wenn wir schreiben:

$$v = \frac{\sin s\,(l - x)}{\sin s\,l}\,E_0 \tag{40}$$

wo $\gamma = i\,s$ ist, so erhalten wir die p_n-Werte als Wurzeln der Gleichung

$$\sin s\,l = 0 \tag{41}$$

d. h.

$$s\,l = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm \ldots\ \pm n\pi,\ \pm \ldots \tag{42}$$

und daher

$$A_n = \frac{\sin s_n\,(l - x)}{p_n \frac{\partial s}{\partial p}\,l \cos s_n\,l} \tag{43}$$

oder nach einigen einfachen Rechnungen:

$$A_n = -\frac{\sin n\pi \frac{x}{l}}{n\pi\left[1 + \frac{K}{Cl^2}(n\pi)^2\right]} \tag{44}$$

Ferner ist:

$$A_{-n} = A_n \tag{45}$$

und

$$p_n = \frac{i \cdot n\pi}{\sqrt{1 + \frac{K}{C\,l^2}(n\pi)^2}}\,\frac{C}{l} \tag{45}$$

$$p_{-n} = -p_n \tag{47}$$

wo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{48}$$

Durch Zusammenziehen der zwei Glieder

$$E_0\,A_n\,e^{p_n t} \text{ und } E_0\,A_{-n}\,e^{p_{-n} t}$$

erhalten wir demnach ein allgemeines Glied

$$2\,E_0\,A_n \frac{e^{p_n t} + e^{-p_n t}}{2}$$

$$= -2\,E_0 \frac{\sin n\pi \frac{x}{l}}{n\pi\left[1 + \frac{K}{C\,l^2}(n\pi)^2\right]} \cos \frac{n\pi}{\sqrt{1 + \frac{K}{C\,l^2}(n\pi)^2}} \cdot \frac{c\,t}{l} \tag{49}$$

Die vollständige Reihe (9) wird daher

$$v = E_0 \frac{l - x}{l} - 2\,E_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\pi \frac{x}{l}}{n\pi\left[1 + \frac{K}{C\,l^2}(n\pi)^2\right]} \cos \frac{n\pi}{\sqrt{1 + \frac{K}{C\,l^2}(n\pi)^2}} \cdot \frac{c\,t}{l} \tag{50}$$

die mit dem von Wagner auf anderem Wege erhaltenen übereinstimmt. Eine numerische Berechnung des elektromagnetischen Ausgleichsvorganges findet man in der angegebenen Arbeit.

Digitized by Google

5. Die Aufladung einer am Ende offenen Spule. In diesem Falle ist $K_0 = 0$ und $K_l = \infty$ zu setzen und das Gleichungssystem 27 gibt dann:

$$v = \frac{\cos h\,\gamma\,(l - x)}{\cos h\,\gamma\,l} \cdot E_0 \qquad 51)$$

Der Zustand bei $t = 0$ ist nach 12:

$$v_0 = \frac{\cos h \sqrt{\frac{C}{K}}\,(l - x)}{\cos h \sqrt{\frac{C}{K}}\,l} E_0 \qquad 52)$$

Zur Bestimmung der vollständigen Lösung setzen wir nach 10)

$$\gamma = i\,s \qquad 53)$$

$$v = \frac{\cos s\,(l - x)}{\cos s\,l} E_0 \qquad 54)$$

Die Koeffizienten A_n sind

$$A_n = -\frac{\cos s_n\,(l - x)}{p_n l \frac{\partial s}{\partial p} \sin s_n\,l} \qquad 55)$$

wo die Werte von s_n als Wurzeln der Gleichung

$$\cos s\,l = 0 \qquad 58)$$

erhalten werden. Dies gibt:

$$s_k\,l = \pm \frac{\pi}{2}; \pm 3\frac{\pi}{2}; \pm 5\frac{\pi}{2} \ldots k\frac{\pi}{2} \qquad 57)$$

(k sei eine ungerade Zahl),

Durch Einsetzen dieser Werte bekommen wir nach einigen Umformungen:

$$A_k = -\frac{\sin s_k\,x}{k\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{K}{C\,l^2}\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2\right]} \qquad 57)$$

$$A_{-k} = A_k \qquad 59)$$

$$p_k = \frac{k\frac{\pi}{2}\,i}{\sqrt{1 + \frac{K}{C\,l^2}\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2}} \cdot \frac{c}{l} \qquad 60)$$

$$p_{-k} = -p_k \qquad 61)$$

Die vollständige Reihe wird daher:

$$v = E_0 - 2E_0 \sum_{k = 1, 3, 5 \ldots \infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}}{k\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{K}{C\,l^2}\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2\right]} \cos b_k \frac{c\,t}{l} \qquad 62)$$

wo

$$b_k = \frac{k\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \frac{K}{C\,l^2}\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2}} \qquad 63)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \qquad 64)$$

Digitized by Google

Um ein Bild des durch Gl. 61 dargestellten Ausgleichvorgangs zu erhalten, wollen wir eine numerische Durchrechnung mit passend gewählten Konstanten K_1 C_1 ausführen und zwar setzen wir mit K. W. Wagner $\frac{K}{C l^2} = 10^{-2}$, was der Größenordnung nach den wirklichen Verhältnissen entsprechen dürfte.

Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus Gl. 63 und zwar sind die ersten 10 (wenn wir die „Grenzfrequenz" für $k = \infty$ gleich 1 setzen) in folgender Tabelle zusammengestellt. Die dritte Spalte enthält die von Wagner für eine geerdete Spule berechneten Eigenfrequenzen.

Tabelle 1.

N	ν_N (offene Spule)	ν_N (geerdete Spule)
1	0,1552	0,2994
2	0,4263	0,5316
3	0,6176	0,7040
4	0,7398	0,7816
5	0,8164	0,8435
6	0,8655	0,8827
7	0,8981	0,9104
8	0,9205	0,9286
9	0,9365	0,9424
10	0,9483	0,9519

Die numerische Berechnung von Gl. 68 ist für 10 Punkte der Spule $\left(\frac{x}{l} = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3 \ldots\ldots 1{,}0\right)$ bei den Zeiten $\frac{c\,t}{l} = 0{,}0;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6 \ldots 1{,}4$ ausgeführt worden. Jeder Spannungswert ist dabei aus zehn Gliedern der Reihe berechnet worden, die eine für unsere Zwecke hinreichende Genauigkeit geben. Die betreffenden Werte von $\frac{v}{E_0}$ sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

$\frac{c\,t}{l} =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$\frac{x}{l} = 0{,}0$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	0,37	0,68	1,12	1,09	0,91	0,98	1,07	1,01
0,2	0,14	0,38	0,89	1,18	1,06	0,89	1,00	1,14
0,3	0,05	0,20	0,61	1,05	1,19	1,02	0,91	1,09
0,4	0,02	0,09	0,37	0,81	1,16	1,17	1,01	1,04
0,5	0,01	0,05	0,22	0,56	0,99	1,24	1,19	1,13
0,6	0,00	0,02	0,11	0,37	0,77	1,17	1,36	1,38
0,7	0,00	0,01	0,06	0,22	0,56	1,03	1,43	1,66
0,8	0,00	0,00	0,03	0,14	0,40	0,86	1,43	1,90
0,9	0,00	0,00	0,02	0,09	0,31	0,75	1,40	2,04
1,0	0,00	0,00	0,01	0,08	0,27	0,70	1,39	2,09

Zur besseren Übersicht sind die Werte in zwei Figuren dargestellt. In der ersten (Fig. 5) bebedeutet eine Kurve, die längs der Spule herrschende Spannungsverteilung in einem gewissen Zeitmoment. Die zweite (Fig. 6) dagegen zeigt den Spannungswert in einem bestimmten Punkte als Funktion der Zeit.

Vergleich der Resultate mit einigen experimentellen Daten. In einer Arbeit von J. A. Fleming (Phil. Mag. 1904 S. 427) liegt eine Bestimmung der Frequenzen der 6 ersten Eigenschwingungen einer offenen Spule vor. Eine solche Reihe ist in der zweiten Spalte der Tabelle eingetragen, nebst dem daraus berechneten quadratischen Verhältnis einer Oberschwingung zur Grundschwingung. Aus den nachfolgenden Spalten sind dann die nach unserer Formel 69) berechneten Werte dieser Größe zu ersehen und zwar für $\sqrt{\frac{C l^2}{K}}$

Digitized by Google

$= 8, 10, 12, 14, \infty$. Das letzte bedeutet einfach die Vernachlässigung der Windungskapazität, wodurch eine harmonische Obertonreihe entsteht. Ein Vergleich der berechneten mit den beobachteten Werten zeigt jetzt, daß mit $\sqrt{\frac{C l^2}{K}} = 14$ eine sehr gute

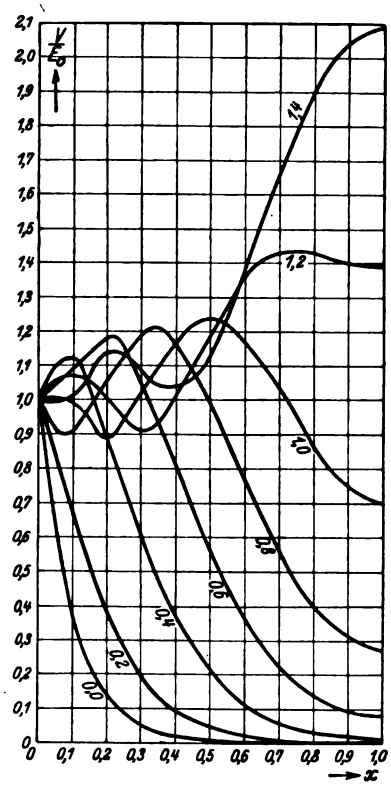


Fig. 5. Jede Kurve stellt die Spannungsverteilung längs der Spule in einem gewissen Zeitmomente dar.

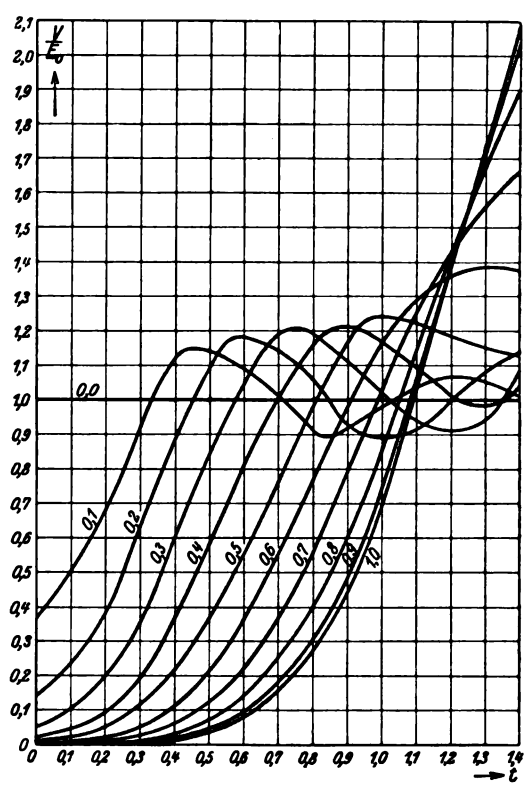


Fig. 6. Eine Kurve stellt die Änderung der Spannung mit der Zeit in einem bestimmten Punkte dar.

Übereinstimmung erhalten wird. Eine Ausnahme bildet die letzte Oberschwingung, was wohl wegen der Schwierigkeit einer genauen experimentellen Bestimmung nicht zu verwundern ist.

Tabelle 3.

k	Beobachtet		Berechnet				
	$\nu_k \cdot 10^{-6}$	$\left(\frac{\nu_k}{\nu_1}\right)^2$	$\sqrt{\frac{C l^2}{K}} = 8$	$= 10$	12	14	groß
1	0,295	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3	0,834	7,99	6,94	7,55	7,93	8,19	9,00
5	1,306	19,60	13,2	15,9	17,8	19,3	25,0
7	1,610	29,8	17,6	22,7	27,1	30,7	49,0
9	1,87	40,2	20,4	27,7	34,5	40,6	81,0
11	2,23	57,1	22,2	31,1	40,1	48,6	121,0

Digitized by Google

Ueber die Erregung eines massiven magnetischen Kreises durch Wechselstrom.

Von

Dr.-Ing. **Ludwig Dreyfus**, Berlin-Niederschönhausen

Inhaltsübersicht.

Einleitung
I. Die Wechselstrompermeabilität.
II. Die Differentialgleichungen für lineare Feld- und Wirbelströmung.
III. Die Feldverteilung in der Mittelzone.
IV. Die Feldverteilung in den Randzonen.
V. Der resultierende Induktionsfluß.
VI. Verteilung und Verluste der Wirbelströmung.
Zusammenfassung.

Einleitung. Wenn man auf Grund der Thomsonschen Theorie[1]) die Verteilung eines Wechselflusses zu berechnen versucht, so stößt man sofort auf eine große Schwierigkeit: Die ganze Theorie basiert auf der Annahme einer konstanten Permeabilität und man findet unter dieser Voraussetzung, daß sich die Kraftlinien in der unmittelbaren Nachbarschaft der seitlichen Begrenzungsflächen zusammendrängen, während die mehr nach innen gelegenen Gebiete praktisch als feldfrei anzusehen sind. Bei einer so ungleichmäßigen Feldverteilung durchläuft aber die magnetische Leitfähigkeit die ganze Skala ihrer Werte. Am Rande fällt sie gemäß der hohen Dichte der aufgestauten Induktionsströmung nur sehr klein aus, um von da bis zur feldfreien Zone rapid anzusteigen. Das schafft Verhältnisse, denen die Thomsonsche Theorie nicht mehr gerecht werden kann. Denn die für den Eisenweg verbrauchte magnetomotorische Kraft richtet sich ausschließlich nach der Randinduktion, die Abnahme der Induktion nach dem Blechinneren hingegen nach der Veränderlichkeit der Permeabilität, und wenn man bei großen „reduzierten Blechstärken" oder gar bei massiven Polen auch nur ein halbwegs richtiges Bild über die Induktionsverteilung erhalten will, so muß man dieser Inkonstanz der Permeabilität irgendwie Rechnung tragen.

Die Frage ist nur: Ist dieses Problem ein aktuelles Problem des Elektromaschinenbaues, an dessen Lösung wir interessiert sind? Arbeiten elektrische Maschinen unter Bedingungen, in denen sich die feldfreie Zone im Innern eines massiven Eisenquerschnittes auch wirklich ausbilden kann? Diese Frage ist zu bejahen. Es existiert in der Wechselstromtechnik eine gebräuchliche Schaltung, die geradezu auf die Eigentümlichkeiten der Leitung eines Wechselflusses durch einen massiven magnetischen Kreis gegründet ist: das ist das asynchrone Anlassen synchroner Maschinen. Wer in die quantitative Theorie dieses verwickelten Vorganges auch nur einigermaßen eindringen will, der muß mit Sicherheit abschätzen können, welchen Wechselfluß er mit einer bestimmten magnetomotorischen Kraft durch den Eisenweg zu treiben vermag, und welche Verluste dabei zu decken sind. Ein Bedürfnis nach einer exakteren Theorie liegt also zweifellos vor.

1. Die Wechselstrompermeabilität. Eine Theorie, welche der Veränderlichkeit der Permeabilität Rechnung tragen will, ist genötigt, diese Permeabilität als Funktion der Feldstärke oder der Induktion analytisch zu formulieren. Alle derartigen Rechnungen haben von vornherein etwas Unnatürliches, Gekünsteltes. Darüber läßt sich nicht hinwegkommen, und unser Streben muß es sein, den Ansatz für die magnetische Leitfähigkeit wenigstens so einfach zu halten, daß dadurch keine übermäßigen mathematischen Schwie-

[1]) J. J. Thomson, The Electrician, London 1892, XXVIII. S. 599ff. — L. Dreyfus, Archiv für Elektrotechnik 1915. Bd. 4, S. 99ff.

Digitized by Google

rigkeiten entstehen, welche die Differentialgleichungen entweder unlösbar oder, wenn das nicht, die Endformen der Theorie unnötig kompliziert machen.

Von diesem Gesichtspunkt aus ist es zu billigen, wenn man nur die örtliche, nicht aber auch die zeitliche Variation der Permeabilität berücksichtigt. Wir werden daher rechnen, als ob an jeder Stelle des magnetischen Kreises eine sinusförmig pulsierende M. M. K. auch eine sinusförmige Induktionsschwankung zur Folge hätte, oder vielleicht besser gesagt: Wir berücksichtigen nur die erste Harmonische der Induktionsschwankung, von welcher wir recht gut wissen, daß sie nicht genau sinusförmig ausfallen kann. Außerdem vernachlässigen wir die Eisenhysterese. Wir schreiben also den magnetisierenden Amperewindungen pro cm. Länge

$$\frac{aw}{cm} = \frac{\tilde{AW}}{cm} \sin \omega t \,^{1})$$

eine gleichphasige Induktionsschwankung zu:

$$B = \tilde{B} \sin \omega t$$

und verknüpfen die Maximalwerte der M. M. K. und der Induktion durch die bekannte elektromagnetische Grundgleichung:

$$\tilde{B} = 0{,}4\,\pi \frac{\tilde{AW}}{cm} \tilde{\mu} = \tilde{H}\,\tilde{\mu}$$

Die hierdurch eingeführte Konstante der magnetischen Leitfähigkeit bezeichnet man als die „Wechselstrom-Permeabilität" des Eisens. Eine kleine Betrachtung möge zeigen, wie diese in der Praxis selten scharf definierte Größe mit der allgemein bekannten, beständig kontrollierten Gleichstrom-Permeabilität $\bar{\mu}$ zusammenhängt.

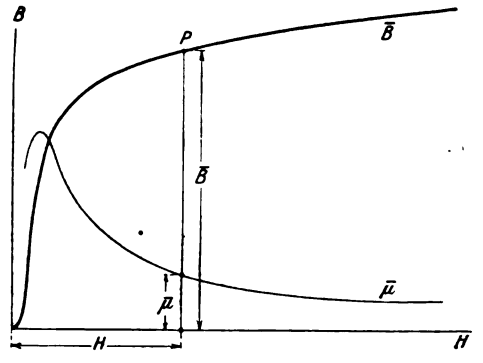


Fig. 1. Magnetische Charakteristik für Gleichstromerregung.

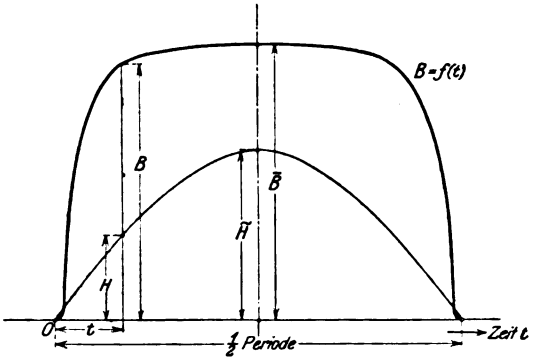


Fig. 2. Kurvenform der Induktionsschwankung bei sinusförmigem Erregerstrom.

Den charakteristischen Verlauf einer mit Gleichstrom aufgenommenen Magnetisierungskurve zeigt Figur 1. Für irgendeinen Punkt P. soll die Gleichstrom-Permeablilität

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{B}}{H}$$

mit der Wechselstrom-Permeabilität

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{B}}{H}$$

verglichen werden. Das kommt darauf hinaus, die Welle der zeitlichen Induktionsschwan-

[1]) Zeichenerklärung: Mit: aw, B, ρ ... bezeichne ich Augenblickswerte, mit $\tilde{AW}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\rho}$ ... zeitliche Maximalwerte sinusförmig pulsierender Größen. Soll eine Wechselstromgröße als Zeitvektor gedeutet werden, so wird über dem Zeichen ein Punkt beigefügt, z. B.: $\dot{\tilde{AW}}$, $\dot{\tilde{B}}$, $\dot{\tilde{\rho}}$ ...

Digitized by Google

kung $B = f(t)$ (Figur 2) harmonisch zu analysieren, und die Amplitude der Grundwelle $\tilde{B}$ gegen den Scheitelwert $\bar{B}$ der Induktionswelle zu messen. Denn es ist:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\bar{\mu}} = \frac{\tilde{B}}{\bar{B}}$$

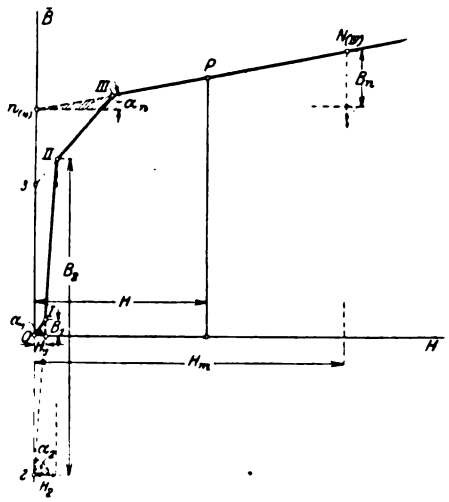


Fig. 3. Ersatz der magnetischen Charakteristik durch einen gebrochenen Linienzug.

Man sieht sofort, die Wechselstrom-Permeabilität ist höher als die Gleichstrom-Permeabilität, und das war auch von vornherein garnicht anders zu erwarten. Denn $\tilde{\mu}$ stellt einen gewissen Durchschnittswert aus allen bis zum Punkte P durchlaufenen Werten der Gleichstrom-Permeabilität vor, und da auf dem weitaus längsten Teil dieses Weges die Gleichstrom-Permeabilität abnimmt, so muß bei einigermaßen erheblichen Feldstärken der Durchschnittswert $\tilde{\mu}$ höher liegen als der Endwert $\bar{\mu}$. Es fragt sich nur um wieviel.

Um hierauf die Antwort zu finden, ersetzen wir die magnetische Charakteristik durch einen mehrfach, zum Beispiel n-fach gebrochenen Linienzug O-I-II....N (Fig. 3). Die Tangente des Neigungswinkels der einzelnen Strecken hat die Dimension einer magnetischen Leitfähigkeit.

Wir schreiben daher

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{B_1}{H_1} = \mu_1, \qquad \operatorname{tg} a_2 = \frac{B_2}{H_2} = \mu_2, \qquad \operatorname{tg} a_n = \frac{B_n}{H} = \mu_n$$

Den Knickstellen der Magnetisierungskurve entsprechen ebensoviele Abschnitte in der Halbwelle der Feldstärke, und der spezifischen Induktion (Fig. 4). Die Übertragung der Feldstärken H_1 H_2 usw. aus Figur 4a bestimmt die Zeitwinkel ψ_1, ψ_2 usw. der Knickstellen. Zugeordnete Abschnitte in beiden Zeitwellen sind einander ähnlich, denn die Ordinate y_B

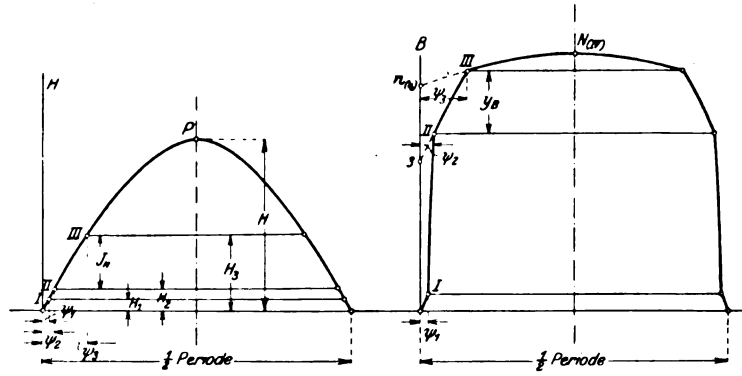


Fig. 4a. Fig. 4b.

Darstellung der Induktionswelle durch einen gebrochenen Kurvenzug.

im Diagramm der Induktionswelle folgt aus der entsprechenden Ordinate y_H im Diagramm der Feldwelle durch Multiplikation mit der zugeordneten scheinbaren Permeabilität μ_1 oder μ_2 usw.

Um die erste Harmonische der Induktionswelle zu bestimmen, berechnen wir die

Digitized by Google

Beiträge der n Unterabschnitte getrennt. Ein beliebiger Abschnitt zwischen den Winkeln ψ_{m-1} und ψ_m liefert den Anteil

$$(\Delta\tilde{B})_m = \mu_m H_m \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\psi_m}{\sin\psi_m} + \cos\psi_m\right) - \mu_m H_{m-1} \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\psi_{m-1}}{\sin\psi_{m-1}} + \cos\psi_{m-1}\right)$$
$$= \mu_m [H_m \alpha_m - H_{m-1} \alpha_{m-1}]$$

Hält man dabei die Nebenbedingung ein:

$$\frac{H_m}{H} \leq 0{,}9$$

was immer leicht möglich ist, so ist mit einem Fehler von höchstens 1%:

$$\alpha_m = \frac{4}{\pi}\left(1 - 3\left(\frac{H_m}{4H}\right)^2\right) \qquad 1)$$

Durch Addition der sämtlichen n Teilbeträge ergibt sich sodann die Grundwelle der Induktion und aus dieser die gesuchte Permeabilität zu:

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_1^n (\Delta\tilde{B})_m}{H} = \mu_n + \sum_{n-1}^{1}\left[\alpha_m \frac{H_m}{H}(\mu_{m-1} - \mu_m)\right] \qquad 2)$$

Man sieht die Berechnung der Wechselstrom-Permeabilität ist auf dem angegebenen Wege garnicht besonders mühsam; denn für gewöhnlich kommt man schon mit einem 4- oder 5-fach gebrochenen Linienzuge aus.

Es ist nun interessant, daß sich auch die Gleichstrom-Permeabilität durch einen ganz ähnlichen Ausdruck wiedergeben läßt, den man bei einiger Übung aus Figur 3 direkt ablesen kann. Und zwar ist:

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{B}}{H} = \mu_n + \sum_{n-1}^{1}\left[\frac{H_m}{H}(\mu_{m-1} - \mu_m)\right] \qquad 3)$$

Man braucht also in Gleichung 2 nur die Koeffizienten α_m, die in Wirklichkeit $\left(\text{für } \frac{H_m}{H} \leq 0{,}9\right)$ zwischen $\frac{4}{\pi} = 1{,}27$ und 1,08 schwanken, sämtlich gleich 1 zu setzen, so beschreibt derselbe Ansatz die Gleichstrom-Permeabilität.

Diese Analogie vermittelt uns eine wichtige Erkenntnis: Sie beweist uns, daß die Wechselstrom-Permeabilität höchstens 27% von der Gleichstrom-Permeabilität abweichen kann und zwar sowohl nach oben als nach unten. Geringer wird die Wechselstrompermeabilität allerdings nur bei sehr kleinen Feldstärken ausfallen, bei denen $\bar{\mu}$ mit Zunahme der Induktion steigt, oder auch noch in der Gegend des Maximums der Gleichstrompermeabilität. Bei hohen Induktionen hingegen übertrifft die Wechselstrompermeabilität sehr bald den Gleichstromwert.

Es empfiehlt sich aus den Gleichungen 2 und 3 stets das Verhältnis $\frac{\tilde{\mu}}{\bar{\mu}}$ zu berechnen; denn hierfür erhält man viel genauere Werte als für die magnetischen Leitfähigkeiten selbst Die Wechselstrom-Charakteristik folgt dann leicht, indem man die Gleichstrominduktion gemäß der Formel

$$\tilde{B} = \bar{B} \cdot \frac{\tilde{\mu}}{\bar{\mu}}$$

reduziert.

Für die beiden wichtigsten Baustoffe des massiven magnetischen Kreises, Stahlguß und Gußeisen, habe ich die Resultate der Rechnung in Fig. 5 und 6 dargestellt. Dabei ergab

Digitized by Google

sich die Wechselstrompermeabilität bei $\tilde{H} = 400$ 22,5% bzw. 18% größer als die entsprechende Gleichstrompermeabilität.

Nachdem wir die Kurve der Wechselstrompermeabilität zu berechnen gelernt haben, gilt es, sie mit der Induktion oder mit der Feldstärke durch eine Näherungsgleichung zu verknüpfen, die sich auch der Differentialgleichung des Problems organisch einfügt. Ich habe zu diesem Zwecke mehrere Versuche gemacht. Erfolg hatte ich nur mit der folgenden Annahme:

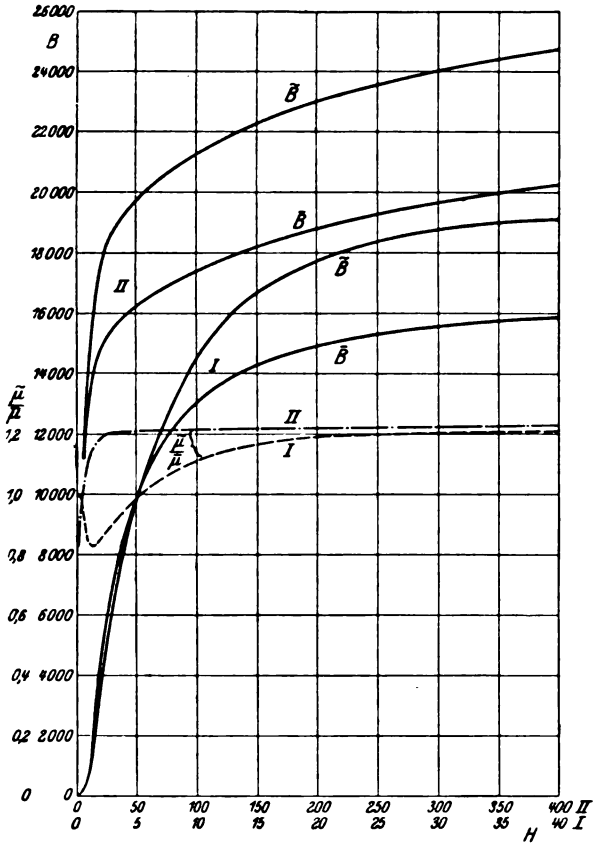


Fig. 5. Gleich- und Wechselstromcharakteristik für Stahlguß mittlerer Festigkeit.

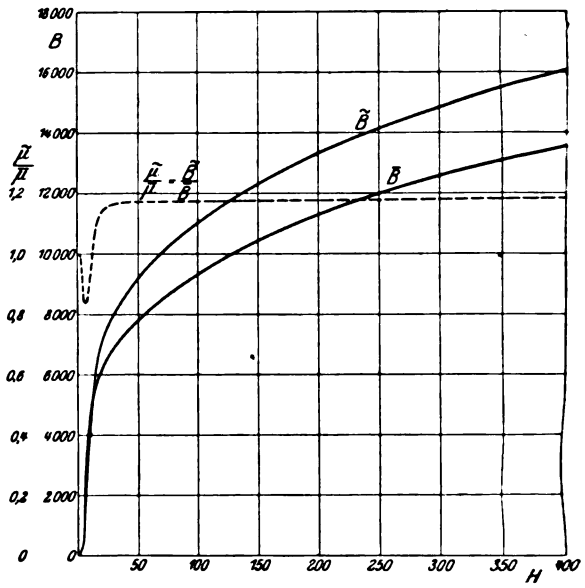


Fig. 6. Gleich- und Wechselstromcharakteristik für Grauguß (Gußeisen).

Ich teilte die Sättigungskurve in zwei Abschnitte von ungleicher Ausdehnung und Bedeutung (Fig. 7). Der kleinere und unwichtigere Abschnitt zwischen dem Koordinatenursprung und einer gewissen Feldstärke $\tilde{H}_0$ umfaßt das Gebiet der kleinen Induktionen bis etwas über das Maximum der Permeabilitätskurve hinaus. Wir werden später sehen, daß die Veränderlichkeit der Permeabilität in diesem Gebiete das Endresultat fast garnicht zu beeinflussen vermag. Es erschien mir daher als das Gegebene, mit einem konstanten Mittelwert $\tilde{\mu}_0$ der Permeabilität zu rechnen, in dessen Wahl man garnicht ängstlich zu sein braucht. Auf diese Weise werden die Resultate der Thomsonschen Theorie wenigstens für einen unbedeutenden Abschnitt der Kraftlinienströmung nutzbar gemacht.

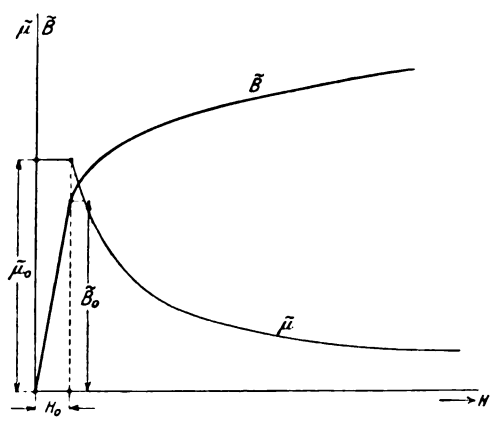


Fig. 7. Einteilung der magnetischen Charakteristik in zwei Gebiete.

Digitized by Google

Der wichtigere Abschnitt umfaßt das Gebiet, in dem die Permeabilität mit der Zunahme der Feldstärke von hohen Anfangswerten bis zu sehr kleinen Endwerten abnimmt. Mit dem Ansatz:

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \sqrt[m]{\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{H}}\right)^2} \qquad 4)$$

oder, was dasselbe ist

$$\tilde{\mu} = \mu_0 \sqrt[m-2]{\left(\frac{\tilde{B}_0}{\tilde{B}}\right)^2} \qquad 4a)$$

oder auch

$$\frac{\tilde{B}}{\tilde{B}_0} = \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{H}_0}\right)^{\frac{m-2}{m}} \qquad 4b)$$

erreicht man wohl stets eine brauchbare Annäherung. Wie weit die Übereinstimmung für die oben benützten Charakteristiken geht, zeigen die strichlierten Kurven der Figuren 8 und 9. Sie weichen bei niedrigen Induktionen nicht viel, bei hohen Induktionen überhaupt nicht von den vorgegebenen Magnetisierungskurven ab. Die Interpolationsgerade reicht vom Koordinatenanfangspunkt bis:

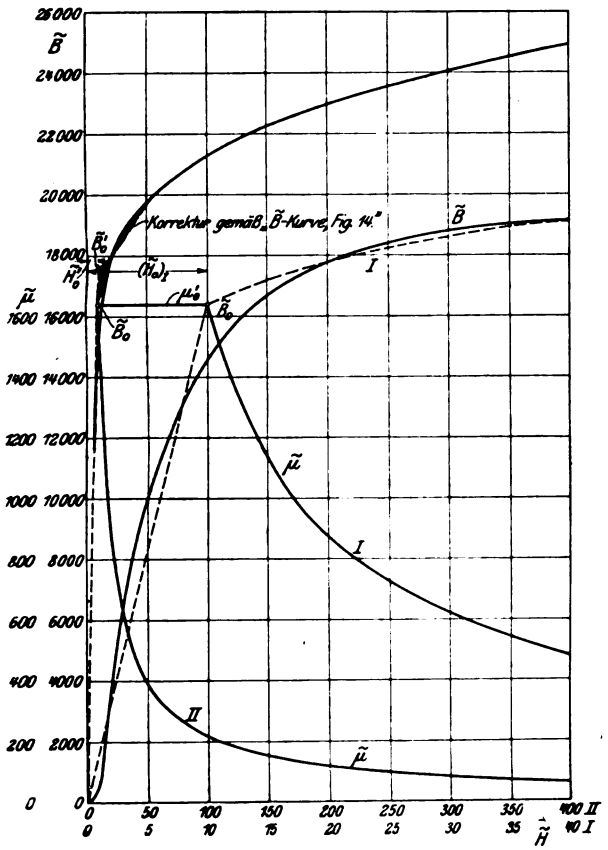


Fig. 8. Zur analytischen Formulierung der Wechselstromcharakteristik des Stahlguß.

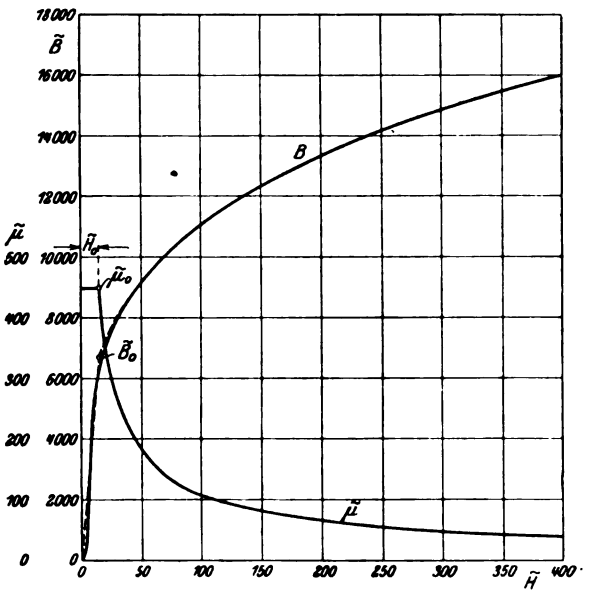


Fig. 9. Zur analytischen Formulierung der Wechselstromcharakteristik des Grauguß.

Stahlguß: $\tilde{H}_0 = 10$ $\tilde{B}_0 = 16\,400$ $\tilde{\mu}_0 = 1640$

Grauguß: $\tilde{H}_0 = 15$ $\tilde{B}_0 = 6\,700$ $\tilde{\mu}_0 = 447$

Hinter dieser Knickstelle setzt die gekrümmte Ersatzkurve mit einem Exponenten

Stahlguß: $m = 2{,}25$

Grauguß: $m = 2{,}72$

Digitized by Google

ein. Man sieht, der Koeffizient m spielt nur innerhalb ganz geringer Grenzen, sagen wir etwa zwischen 2,1 und 2,9. Auf jeden Fall ist stets

$$m \geq 2$$

denn für diesen Grenzwert würde die Induktion oberhalb der Knickstelle unabhängig von den auftretenden Feldstärken konstant bleiben.

II. Die Differentialgleichungen für lineare Feld- und Wirbelströmung. Fast alle technischen Probleme der Wechselfeldverteilung lassen sich auf einen Idealfall zurückführen, welcher sich der mathematischen Behandlung besonders einfach fügt: das ist der Fall eines rechteckigen Eisenbleches (Figur 10a), dessen seitliche Abmessungen die Blechstärke h um ein Vielfaches übertreffen. Wird ein solches Blech parallel zu den Längskanten von dem Wechselfluß durchsetzt, so bildet sich eine Wirbelströmung von der spezifischen Dichte ρ $\frac{\text{Amp.}}{\text{qcm}}$ aus, die auf die größte Länge ihres Weges parallel zu den Seitenebenen verläuft und erst hart an den schmalen Querseiten ihrer Richtung ändert (Fig. 10 b). Wenn man also von diesen schmalen Randzonen absieht und sich etwa auf die Blechbreite L' beschränkt, so kann man auch die Wirbelströmung genau wie die Induktionsströmung als eindimensional betrachten, und das ist für die Auflösung der Differentialgleichung ein unschätzbarer Vorteil.

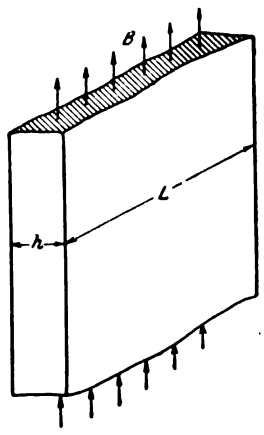


Fig. 10a.

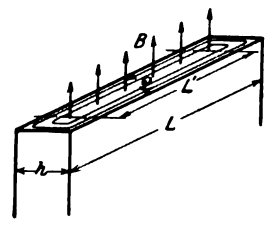


Fig. 10b.

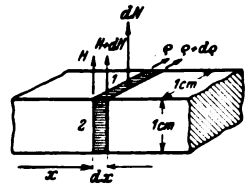


Fig. 10c.

Fig. 10a bis c. Blechabschnitt.

Die Differentialgleichung selbst ist sehr einfach abzuleiten. Wendet man das Induktionsgesetz

$$e = -\frac{dN}{dt} 10^{-8} = -\Sigma (i r)$$

auf das kleine schraffierte Rechteck 1 der Figur 10 c an, so ergibt sich

$$-\frac{\partial}{\partial t} (B\, dx)\, 10^{-8} = -\frac{1}{\lambda \cdot 10^{4}} (\rho - (\rho + d\rho))$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\lambda \cdot 10^{-4} \frac{\partial B}{\partial t} \qquad 5)$$

dabei bezeichnet λ die elektrische Leitfähigkeit des Eisens pro m Länge und qmm Querschnitt, für die wir nach Pichelmayer folgende Werte annehmen können

Stahlguß	4,7
Gußeisen	1,0
Schmiedeeisen	9,0

Andererseits liefert der Satz vom Linienintregal der magnetischen Feldstärke

$$\int H\, ds = 0{,}4\, \pi \int \rho\, df$$

angewandt auf das kleine schraffierte Rechteck 2 der Figur 10c

$$H - (H + d\,H) = 0{,}4\, \pi \cdot \rho \cdot dx$$

Digitized by Google

oder

$$\rho = -\frac{1}{0{,}4\,\pi}\,\frac{\partial H}{\partial x} \qquad 6)$$

Differentiiert man diese Gleichung und setzt den erhaltenen Wert von $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ in Gleichung 5 ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0{,}4\,\pi\,\lambda\,10^{-4}\,\frac{\partial B}{\partial t} \qquad 7)$$

oder, wenn man die Wechselstrompermeabilität $\tilde{\mu}$ einführt und durch die aus der Thomsonschen Theorie bekannten Hilfsgröße

$$\alpha_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\nu}{100}\cdot\frac{\mu_0}{1000}\cdot\lambda} \qquad 8)$$

die Wertigkeit der Periodenzahl ν, der Permeabilität und der der elektrischen Leitfähigkeit zum Ausdruck bringt:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{2\,\alpha_0^2}{\omega}\cdot\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\,\frac{\partial H}{\partial t} \qquad 9)$$

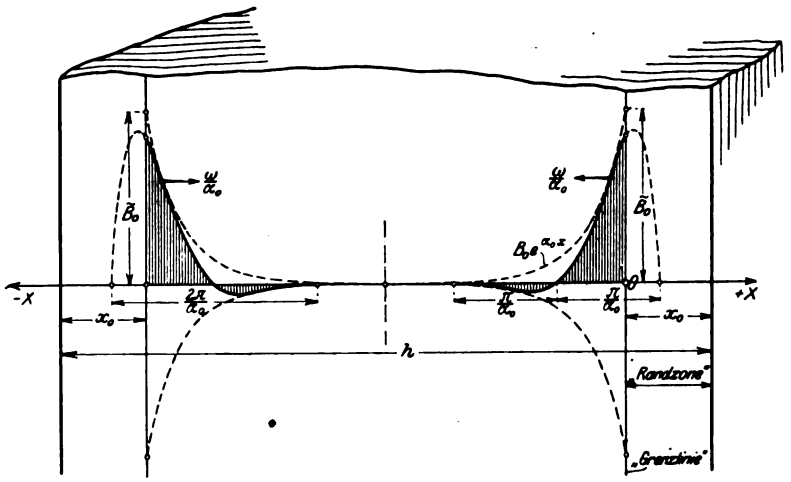


Fig. 11. Darstellung der Induktionsverteilung in der Mittelzone durch zwei magnetische Wellen.

Diese Schlußgleichung ist die Differentialgleichung unseres Problems. Durch die eigentümliche analytische Fassung, die wir der Wechselstrompermeabilität $\tilde{\mu}$ gegeben haben, zerfällt der Blechquerschnitt in zwei Gebiete: Die mittlere Zone, in welcher

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$$

angenommen wird und die beiden Randzonen, in denen die Feldstärke einen gewissen Wert $\tilde{H}_0$ übersteigt, und die Wechselstrompermeabilität nach dem Gesetz

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \sqrt[m]{\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{H}}\right)^2} \qquad 4)$$

abnimmt. Die obige Differentialgleichung ist also für beide Gebiete besonders zu lösen und die Konstanten der Lösung aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Wo beide Zonen zusammenstoßen, ist uns zunächst noch unbekannt. Ich will die Ordinatenachse in diese „Grenzlinie" auf der rechten Querschnittshälfte verlegen und ihren unbekannten Abstand x_0 vom Blechrande als die „Breite der Randzone" bezeichnen (Fig. 11).

Digitized by Google

III. Die Feldverteilung in der Mittelzone. Über die Feldverteilung in der Mittelzone erteilt die Thomsonsche Theorie befriedigenden Aufschluß. Sie sagt uns, daß bei konstanter Eisenpermeabilität die Induktion von jeder der beiden Seitenebenen $x = 0$ und $x = 2x_0 - h$ gleich einer sinusförmigen magnetischen Welle mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegen die Blechmitte vorstößt, während gleichzeitig die Amplitude der Schwingung nach einem Exponentialgesetz erlischt (Fig. 11). Der Dämpfungsexponent stimmt mit der durch Gleichung 8 beschriebenen Hilfsgröße α_0 überein. Er ist also sehr groß und berechnet sich beispielsweise für Stahlguß mit $\tilde{\mu}_0 = 1640$, $\lambda = 4{,}7$ bei $\nu = 50$ Perioden zu:

$$\alpha_0 = 12{,}5$$

das heißt: schon in einer Entfernung von drei mm von der Grenzlinie beträgt die Induktionsschwankung nur noch

$$100 \cdot e^{-\alpha_0 \cdot 0{,}3} = 2^1/_2\,\%$$

des Wertes, mit dem sie längst der „Grenzlinie" pulsiert. Die Induktionsschwankung macht sich sonach überhaupt nur in unmittelbarer Nähe dieser Grenzlinie geltend, im Übrigen ist die Mittelzone vollkommen als feldfrei anzusehen und die Vorgänge längs der beiden Grenzlinien beeinflussen sich praktisch in keiner Weise, solange der der Wurzel aus der Periodenzahl proportionale Dämpfungsfaktor

$$\alpha_0 > \frac{2\pi}{h - 2x_0} \qquad 10)$$

ausfällt. Für die volle Länge der einfallenden magnetischen Welle liefert die Thomsonsche Theorie den Wert

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Eisen

$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{\alpha_0}$$

Mit den oben angenommenen Zahlenwerten folgt

$$\lambda = 0{,}5 \text{ cm}$$

Da wir aber von der ganzen Strömung nur die etwa 3 mm breite Schicht längs der Grenzlinie berücksichtigen mußten, so heißt das, daß die Induktionsströmung nur etwa eine halbe Wellenlänge in das Eisen vordringt.

Für uns ist die wichtigste Frage: Welchen Fluß pro cm Länge repräsentiert eine solche einfallende Feldwelle? Die Antwort ist leicht zu finden: Pulsiert die Induktion auf der Grenzlinie $x = 0$ nach dem Zeitgesetz

$$B_0 = \tilde{B}_0 \sin \omega t, \qquad 11)$$

so folgt gemäß den oben diskutierten Gesetzmäßigkeiten für die einfallende Welle der Ansatz

$$B = \tilde{B}_0 e^{\alpha_0 x} \sin(\omega t + \alpha_0 x) \qquad 12)$$

Was wir suchen ist die gesamte Induktionsströmung

$$\frac{N_0}{cm} = \int_0^{-\infty} B\,dx$$

und hierfür erhält man sofort

$$\frac{N}{cm} = \frac{\tilde{B}_0}{\sqrt{2}\,\alpha_0} \cdot \sin(\omega t - 45^0) \qquad 13)$$

Digitized by Google

oder in Vektorform

$$\frac{\dot{\tilde{N}}_0}{cm} = \frac{\dot{\tilde{B}}_0}{2\alpha_0}(1+j) \qquad 13a)^1)$$

Diese Gleichung enthält zwei wichtige Aussagen:

Erstens: ist der resultierende Kraftfluß hinter der Randinduktion $\tilde{B}_0$ um 45 elektrische Grade verspätet.

Zweitens: besitzt er nur eine solche Größe, als flöße die Induktionsströmung mit der Intensität $\tilde{B}_0$ auf einem schmalen Streifen von $\frac{1}{\alpha_0\sqrt{2}}$ cm.

Man sieht wie außerordentlich gering bei einigermaßen beträchtlichen Wechselzahlen die Ausnützung eines mehrere cm starken Eisenquerschnittes in der Mittelzone ausfällt. Aber man muß sich hüten dieses Resultat auf den ganzen Blechquerschnitt auszudehnen. Wenn man es bisher tat, hat man die Leitfähigkeit eines Eisenquerschnittes für einen Wechselfluß weit unterschätzt. Die folgenden Betrachtungen werden das beweisen.

IV. Die Feldverteilung in den Randzonen. Die Differentialgleichung der Randzone lautet:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{2a_0^2}{\omega}\cdot\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}\cdot\frac{\partial H}{\partial t} \qquad 9)$$

Wir versuchen, die Form der Lösung der Thomson'schen Gleichung 12 anzupassen und setzen probeweise:

$$H = C\,e^{F(x)}\sin(\omega t + \psi + G(x)) \qquad 14)$$

Die Differentialquotienten dieser Funktion sind:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= C\,e^{F(x)}\cdot\omega\cos(\omega t+\psi+G(x))\\ \frac{\partial H}{\partial x} &= C\,e^{F(x)}\left[\frac{dF}{dx}\sin(\omega t+\psi+G)+\frac{dG}{dx}\cos(\omega t+\psi+G)\right]\end{aligned}\right| \qquad 15)$$

und

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = C\,e^{F(x)}\left[\left(\frac{d^2F}{dx^2}+\left(\frac{dF}{dx}\right)^2-\left(\frac{dG}{dx}\right)^2\right)\sin(\omega t+\psi+G)+\left(2\frac{dF}{dx}\frac{dG}{dx}+\frac{d^2G}{dx^2}\right)\cos(\omega t+\psi+G)\right]$$

Soll daher der Ansatz 14 der Differentialgleichung des Problems entsprechen, so müssen die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\left(\frac{dF}{dx}\right)^2-\left(\frac{dG}{dx}\right)^2 = 0 \qquad 16)$$

und

$$2\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dG}{dx}+\frac{d^2G}{dx^2} = 2\alpha_0^2\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} \qquad 17)$$

nebeneinander zurecht bestehen.

Man kann dieses Gleichungssystem erheblich vereinfachen, indem man zwischen den Funktionen 16 und 17 noch irgendeine Nebenbedingung festlegt, die aber natürlich, wenn

[1]) In dieser Schreibweise bedeutet $j\tilde{B}_0$ einen Vektor gleicher Größe wie $\dot{\tilde{B}}_0$, der jedoch hinter $\dot{\tilde{B}}_0$ um 90 el. Grade verspätet ist. Man kann dem Symbol „j" die Bedeutung „$\sqrt{-1}$" beilegen und die Rechenregeln für komplexe Zahlen anwenden.

Digitized by Google

man sich von ihr Erfolg versprechen will, von vornherein einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht entbehren darf. Nun wird man sich noch erinnern, daß in der Thomson'schen Theorie die beiden Funktionen übereinstimmten. Denn es war:

$$F(x) = G(x) = \alpha_0 x$$

In der Tat, setzt man diese Werte in Gleichung 16 ein, so wird dieselbe ohne weiteres befriedigt, während die Erfüllung der zweiten Gleichung 17 an die Bedingung

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$$

geknüpft ist; Diese Konstanz der Permeabilität ist aber gerade die Voraussetzung der Thomson'schen Theorie, sodaß auch die zweite Forderung widerspruchsfrei erfüllt wird.

Die Induktionsströmung in den Randzonen ist komplizierter, und so müssen wir auch mit einer etwas komplizierteren Nebenbedingung rechnen. Was liegt näher, als es mit dem Ansatz

$$G(x) = c\,F(x) \qquad 18)$$

zu versuchen. Dann folgt aus 16:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + (1 - c^2)\frac{dF}{dx} = 0$$

Diese Differentialgleichung läßt sich leicht integrieren und ergibt:

$$F(x) = \ln\left[A\,(x + e_0)^{\frac{1}{1-c^2}}\right] \qquad 19)$$

bzw.

$$G(x) = \ln\left[A\,(x + e_0)^{\frac{c}{1-c^2}}\right] \qquad 19a)$$

Mit diesem Resultat treten wir in den Ansatz 14 der Feldschwingung ein. Für die Amplitude ohne Berücksichtigung ihrer Phase schreiben wir:

$$\tilde{H} = C\,e^{F(x)} = A_0\,(x + e_0)^{\frac{1}{1-c^2}} \qquad 20)$$

oder, da die Amplitude an der Grenzlinie $x = 0$ den Wert $\tilde{H}_0$ aufweisen soll:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0\left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^{\frac{1}{1-c^2}} \qquad 20a)$$

Verbindet man diesen Ansatz noch mit der gleichfalls ermittelten Zeitfunktion, so erhält man die vollständige Lösung:

$$H = \tilde{H}_0\left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^{\frac{1}{1-c^2}} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{c}{1 - c^2}\ln\frac{x + e_0}{e_0}\right) \qquad 21)$$

Das wäre ja nun ein ziemlich einfaches Gesetz. Es fragt sich nur: liefert die angenommene Nebenbedingung denn auch ein brauchbares Gesetz für die Veränderlichkeit der Wechselstrompermeabilität? Denn natürlich haben wir über diese Größe mittels der Hilfsgleichung 18 bereits verfügt. Andererseits sind die Konstanten e_0 und c noch in unserer Hand gegebeu. Wir müssen also die gewonnene Lösung in Gleichung 17 einführen und hieraus das Verhältnis $\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0}$ berechnen. Auf diese Weise stellt sich heraus:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \frac{c}{2\alpha_0^2}\left[\frac{d^2F}{dx^2} + 2\left(\frac{dF}{dx}\right)^2\right] = \frac{c\,(1 + c^2)}{2\alpha_0^2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2$$

oder:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \frac{c}{2}\cdot\frac{1 + c^2}{1 - c^2}\cdot\frac{1}{\alpha_0^2\,(x + e_0)^2} \qquad 22)$$

Digitized by Google

Man kann diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, wenn man bedenkt, daß in der Grenzlinie $x = 0$ das Verhältnis $\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = 1$ erhalten werden soll. Dadurch wird zunächst die Integrationskonstante e_0 auf den Proportionalitätsfaktor c zurückgeführt:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}} \cdot \frac{\sqrt{c(1+c^2)}}{1-c^2} \qquad 23)$$

und auf Grund dieser Beziehung erhält man für das Verhältnis der Wechselstrompermeabilitäten:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \left(\frac{e_0}{x+e_0}\right)^2 \qquad 24)$$

Seinerzeit hatten wir das gleiche Verhältnis abhängig von der Feldstärke durch den Ansatz

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \sqrt[m]{\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{H}}\right)^2} \qquad 4)$$

zum Ausdruck gebracht. Als Funktion des Ortes würde daraus nach Gleichung 20a folgen:

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \left(\frac{e_0}{x+e_0}\right)^{\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{1-c^2}} \qquad 24a)$$

Der Prüfstein für die Zulässigkeit der gewählten Nebenbedingung 18 ist also, ob sich die Gleichungen 24 und 24a zu Übereinstimmung bringen lassen. Man sieht sofort, daß dies ohne weiteres gelingt, wenn man nur die Bedingung

$$\frac{2}{m} \cdot \frac{1}{1-c^2} = 2$$

das heißt

$$c^2 = 1 - \frac{1}{m} \qquad 25)$$

beobachtet. Das ist immer möglich, und so hat es den Anschein, als hätten wir mit der gewählten Nebenbedingung genau das Rechte getroffen.

Aber ganz so einfach liegen die Verhältnisse nun doch nicht. Haben wir doch bisher noch garnicht die Frage ventiliert, ob denn ein Ansatz von der Form der Gleichung 21 die Grenzbedingungen des Problems überhaupt zu realisieren gestattet. Wir haben allen Grund dies zu bezweifeln. Denn wir haben sozusagen nichts mehr in der Hand, keine noch unbestimmte Konstante, durch die wir uns einer weiteren Grenzbedingung als der einen anpassen könnten, der zufolge für $x = 0$ die Amplitude und Phase der Feldstärke mit derjenigen in der angrenzenden Mittelzone übereinstimmen muß. Besteht aber noch eine weitere Grenzbedingung, so machen wir — wenigstens vom Standpunkt des Mathematikers aus — Fiasko.

Und eine zweite Grenzbedingung besteht in der Tat. Nicht nur die Feldstärke, auch die Wirbelströmung, oder — was nach Gleichung 6 dasselbe ist — der Differentialquotient der Feldstärke $\frac{\partial H}{\partial x}$ muß an der Grenzschicht für beide Zonen übereinstimmen. Diese zweite Bedingung erfüllt der Ansatz 21 zwar Näherungsweise, aber doch nicht genau genug, und so ergibt sich die Frage: Wie umsegeln wir diese Klippe, ohne unseren bisherigen zweifellos günstigen Kurs vollständig aufzugeben?

Da wird man sich denn folgendes vor Augen halten müssen: Wenn schon die eine Funktion nach Gleichung 21 den Grenzbedingungen nicht zu genügen vermag, so kommt man vielleicht zum Ziele, wenn man ihr eine zweite, ähnlich gebaute Funktion zugesellt. Da dieser Funktion lediglich die Aufgabe zufällt, einen kleinen Unterschied im Differential-

Digitized by Google

quotienten der Feldstärke an der Grenzlinie auszugleichen, so wird sie wahrscheinlich nur eine unerhebliche Korrektur des durch Gleichung 21 beschriebenen Grundgesetzes bedingen. Trifft dies aber zu, so vermag diese Korrektur die Verteilung der Wechselstrompermeabilität kaum zu beeinflussen. Mit anderen Worten: Wir begehen aller Voraussicht nach keinen erheblichen Fehler, wenn wir das örtliche Gesetz der Permeabilitätsverteilung

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \left(\frac{e_0}{x + e_0}\right)^2 \qquad 24)$$

mit dem Werte

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{c\,(1 + c^2)}}{1 - c^2} = \frac{1}{\alpha_0}\sqrt{(m - 0{,}5)\sqrt{m\,(m - 1)}} \qquad 23a)$$

auch für die erweiterte Theorie übernehmen.

Diese Annahme bahnt den Weg zur Lösung unseres Problems. Denn sie beseitigt eine Menge mathematischer Schwierigkeiten, die groß, wenn nicht unüberwindlich genannt werden müssen, und die doch mit der physikalischen Seite unseres Problems wenig oder nichts zu schaffen haben. Sie ist der Schlüssel zu allen noch ungelösten Fragen und — was ihr ganz besonderen Wert verleiht — sie ist ein recht einfach zu handhabender Schlüssel. Davon können wir uns sofort überzeugen, indem wir sie zur

Bestimmung der Randzonenbreite

ausbeuten, über die wir uns bisher noch keine Rechenschaft gegeben haben.

Für jedes praktische Beispiel wird uns die Randinduktion $\tilde{B}_a$ und damit auch die Permeabilität der Randfasern $\tilde{\mu}_a$ bekannt sein. Für $x = x_0$ sind daher in Gleichung 24 sämtliche Größen mit Ausnahme der Abszisse selbst bekannt, und daraus berechnet sich diese zu:

$$x_0 = e_0\left(\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_a}} - 1\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha_a} - \frac{1}{\alpha_0}\right) \qquad 26)$$

In dieser Gleichung bedeutet

$$\alpha_a = 2\pi\sqrt{\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{\mu}_a}{1000}\lambda} = \alpha_0\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_0}}$$

den Dämpfungsexponenten der Thomson'schen Theorie, berechnet für die Permeabilität der Randfasern, α_0 denselben Koeffizienten unter Zugrundelegung der Permeabilität der Mittelzone. Der Differenz ihrer reziproken Werte ist die Breite der Randzone proportional, ein überaus einfaches und einleuchtendes Gesetz.

Diese Differenz ist selbstverständlich eine sehr veränderliche Größe, wachsend mit der Sättigung der Randfasern und umgekehrt proportional der Periodenzahl der Magnetisierung. Hingegen hängt der Proportionalitätsfaktor

$$\varepsilon = \sqrt{(m - 0{,}5)\sqrt{m\,(m - 1)}} \qquad 28)$$

ausschließlich von dem Koeffizienten m der Sättigungskurve ab und schwankt wie dieser in sehr mäßigen Grenzen, sagen wir zwischen $\varepsilon = 1{,}6$ und 2,4. Legen wir für Stahlguß und Gußeisen die schon früher benützten magnetischen Charakteristiken nach Figur 8 u. 9 zu Grunde und wenden längs der Randfasern eine Feldstärke

$$\tilde{H}_a = 300 \quad \text{mit} \quad \nu = 50$$

Perioden auf, so erhält man

für Stahlguß ($m = 2{,}25$)	$\tilde{B}_0 = 16\,400$	$\tilde{B}_a = 24\,000$	$\tilde{\mu}_0 = 1640$	$\tilde{\mu}_a = 80$
	$\varepsilon = 1{,}715$		$\alpha_0 = 12{,}5$	$\alpha_a = 2{,}76$

Digitized by Google

und daraus folgt

$$x_0 = 0{,}48 \text{ cm}$$

für Grauguß (m = 2,72) $\tilde{B}_0 = 6700$ $\tilde{B}_a = 14\,800$ $\tilde{\mu}_0 = 447$ $\tilde{\mu}_a = 49{,}4$
$\varepsilon = 2{,}19$ $\alpha_0 = 2{,}97$ $\alpha_a = 0{,}99$

und daraus folgt

$$x_0 = 1{,}48 \text{ cm}$$

Was diese Zahlenwerte bedeuten, wird vielleicht am besten dadurch klar, daß wir der tatsächlichen Abnahme der Induktion zwischen Randfasern und Grenzlinien diejenigen Werte gegenüberstellen, die wir nach der Thomsonschen Theorie zu erwarten hätten. Dort müßten wir wohl oder übel mit einem konstanten Mittelwert der Permeabilität operieren, der zwischen $\tilde{\mu}_0$ und $\tilde{\mu}_a$ zu wählen wäre. Um jedoch den folgenden Vergleich unter den denkbar günstigten Bedingungen für die Thomsonsche Theorie zu ziehen, wollen wir den für die Permeabilität der Randfasern berechneten Exponenten α_a einführen. Daraus würde folgen

$$\text{für Stahlguß:} \quad \tilde{B}_0 = \tilde{B}_a e^{-\alpha_a x_0} = 0{,}27\, \tilde{B}_a = 6500 \text{ anstatt } 16400$$

und analog

$$\text{für Gußeisen:} \quad \tilde{B}_0 = \tilde{B}_a e^{-1{,}46} = 0{,}23\, \tilde{B}_a = 3400 \text{ anstatt } 6700$$

Ich glaube diese Gegenüberstellung genügt, um uns erkennen zu lassen, daß die Thomsonsche Theorie unter keinen, wie immer gewählten Annahmen eine befriedigende Annäherung an die wirklichen Verhältnisse gewährleistet, sowie hohe Randsättigungen und größere Eisenbreiten in Frage kommen.

Nehmen wir nach dieser Abschweifung den Faden unserer früheren Betrachtungen wieder auf, die auf eine

Umformung des ursprünglichen Ansatzes 21 für die Verteilung der Feldstärke

hinzielten.

Dadurch, daß wir Gleichung 24 für die Wechselstrompermeabilität nicht mehr als Ergebnis, sondern als Grundlage unserer Theorie einführten, haben wir, wenn auch ganz unmerklich, den Boden der ursprünglichen Theorie bereits verlassen. Denn wenn man genauer zusieht, so ist in Gleichung 23a der Koeffizient m nicht mehr eindeutig bestimmt. Gewiß entnimmt man stets einen Wert für m — ich will ihn vorübergehend mit m_1 bezeichnen — von vornherein der Analyse der Permeabilitätskurve. Aber es gibt immer noch einen zweiten Wert

$$m_2 = 1 - m_1$$

welcher, in Gleichung 23a eingeführt, denselben Zahlenwert e_0 ergibt, und diesen zweiten Koeffizienten schließen wir jetzt nicht mehr aus. Im Gegenteil, wir benützen ihn zur Bildung einer zweiten Funktion, deren wir zur Befriedigung der Grenzbedingungen bedürfen, und durch die wir die etwas zu enge Fassung des Ansatzes 21 verallgemeinern. Mit anderen Worten, wir schreiben nunmehr

$$H = \tilde{H}_{10}\left(\frac{x+e_0}{e_0}\right)^m \sin\left(\omega t + \psi_1 + \sqrt{m(m-1)}\ln\frac{x+e_0}{e_0}\right) + \\ + \tilde{H}_{20}\left(\frac{x+e_0}{e_0}\right)^{1-m} \sin\left(\omega t + \psi_2 - \sqrt{m(m-1)}\ln\frac{x+e_0}{e_0}\right) \quad 29)$$

Dieser Ansatz zusammen mit den Gleichungen 23a, 24 u. 26 stellt die vollkommene Lösung unseres Problems dar, vorausgesetzt, daß die zweite Funktion wirklich von so unterge-

Digitized by Google

ordneter Bedeutung ist, daß sie die Permeabilitätskurve $\tilde{\mu} = f(x)$ nicht merklich zu ändern vermag. Den Beweis hierfür werden wir später erbringen. Ihn jetzt schon zu führen, erschiene mir etwas verfrüht. Zuerst müssen wir doch wissen: Was haben wir denn in der Hand, falls uns dieser Beweis wirklich glückt? Wir haben die gesamte Feldverteilung soeben in zwei Wellenzüge zerlegt: Wie sehen diese aus, mit welcher Geschwindigkeit, welcher Wellenlänge wandern sie, und wie verändert sich ihre Amplitude auf der Wanderung? Das sind die Fragen, über die wir uns zuerst Klarheit verschaffen müssen.

Beginnen wir mit dem voraussichtlichen Hauptanteil der Feldverteilung, charakterisiert durch den ersten Summanden

$$H_1 = H_{10}\left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^m \sin\left(\omega t + \psi_1 + \sqrt{m\,(m-1)}\,\ln\frac{x + e_0}{e_0}\right) \qquad 30)$$

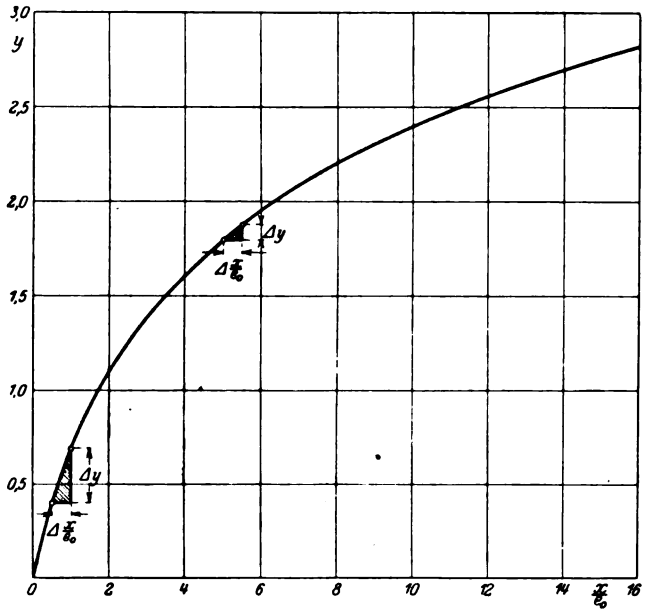


Fig. 12. Charakter der Funktion $y = \ln\frac{x + e_0}{e_0}$.

Diese Welle ist sehr einfach zu diskutieren, sobald man sie nicht auf die Abszisse x, sondern auf eine andere Abszisse

$$y = \ln\frac{x + e_0}{e_0} \qquad 31)$$

bezieht, eine Koordinaten-Transformation, deren Folgen Fig. 12 illustriert. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$; mit wachsendem x wächst y erst schnell, dann immer langsamer, um für $x = x_0$ den Endwert

$$y_0 = \ln\frac{x + e_0}{e_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_a} \qquad 32)$$

zu erreichen. Der veränderte Abszissenmaßstab bewirkt, daß in dem ungetreuen, aber desto einfacheren Abbild gleichen Strecken Δx in der Nähe des Nullpunkts ungleich größere Strecken Δy zugeordnet sind als in der Nähe des Blechrandes. Die Feldstärke erscheint daher längs der Randfasern zusammengequetscht, in der Nähe der Grenzlinie hingegen auseinander gezerrt, und dadurch entsteht eine neue Feldverteilungskurve, die das einfache Gesetz

$$H_1 = \tilde{H}_{10}\, e^{m y} \sin\left(\omega t + \psi_1 + \sqrt{m\,(m-1)}\, y\right) \qquad 33)$$

befolgt. Man sieht auf den ersten Blick, daß diese Gleichung dem Thomsonschen Ansatz der Induktionsverteilung sehr nahe kommt Der einzige Unterschied ist, daß dort an Stelle der beiden Koeffizienten m und $\sqrt{m\,(m-1)}$ ein einziger Koeffizient α auftritt. Im übrigen handelt es sich hier wie dort um eine sinusförmige Feldwelle, welche vom Rande aus mit einer konstanten Geschwindigkeit und Wellenlänge in das Eisen eindringt, während ihre Amplitude nach einem Exponentialgesetz erlischt. In unserem Falle besitzt der Dämpfungsexponent m stets ziemlich erhebliche Werte; denn wie wir schon früher erfahren haben, schwankt m ungefähr zwischen 2,1 und 2,9. Die volle Wellenlänge beträgt in y-Maßstab

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{\sqrt{m\,(m-1)}} = 4{,}1 \text{ bis } 2{,}7. \qquad 34)$$

Digitized by Google

Ich habe für Stahlguß unter denselben Annahmen wie im letzten Zahlenbeispiel (siehe Seite 326) die eindringende Welle in vier verschiedenen Lagen während einer halben Periode aufgezeichnet (Figur 13a). Als besonders bemerkenswert möchte ich hervorheben, wie

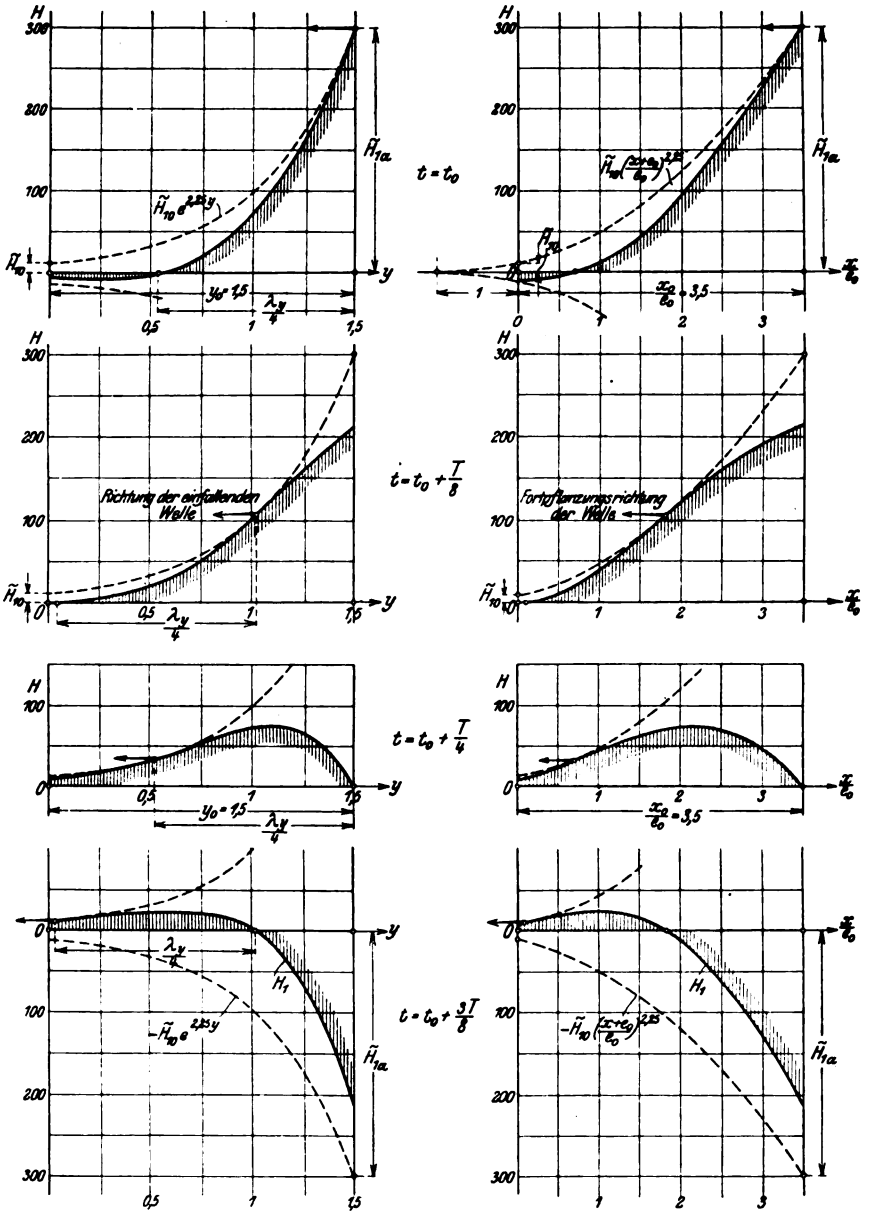


Fig. 13a. Verzerrtes Koordinatensystem. Fig. 13b. Unverzerrtes Koordinatensystem.

Fig. 13a und b. Änderung des Hauptanteils H_1 der Feldstärke während $^1/_2$ Periode.

stark die Welle bereits abgeklungen ist, wenn sie nach Durchquerung der Randzone die Grenzlinie x = 0 erreicht. Im vorliegenden Falle beträgt sie dort nur noch

$$100 \cdot \frac{H_{10}}{H_{1a}} = 100 \cdot \frac{10}{300} = 3{,}3\,\%$$

ihres ursprünglichen Wertes.

Digitized by Google

Der Fortpflanzungsrichtung der Welle von rechts nach links entspricht eine nach dem Blechinneren wachsende Phasenverspätung der Feldschwingung. Bezeichnet $\dot{\tilde{H}}_{1a}$ den Vektor der Feldstärke in der Randfaser, so ist an irgendeiner Stelle x der Randzone:

$$\dot{\tilde{H}}_1 = \dot{\tilde{H}}_{1a} e^{-\sqrt{\frac{m}{m-1}}\varphi'} (\cos\varphi' + j \sin\varphi') \qquad 35)$$

wobei

$$\varphi' = \sqrt{m\,(m-1)}\,(y_0 - y) = \sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{x_0 + e_0}{x + e_0} \qquad 36)$$

zu setzen ist. Das ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale, die wie in Figur 14 dargestellt, die Amplitude und Phase der Feldschwingung verknüpft. Beim Übertritt in die Mittelzone ist die Feldstärke gegen die Schwingung der Randfaser um

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_a} \qquad 36a)$$

verspätet. Das macht für unser Beispiel

$$\varphi_0 = 2{,}52 \text{ bzw. } 145^0$$

In der Grenzlinie pulsiert die Feldstärke also beinahe in Phasenopposition zur Schwingung der Seitenebene.

Haben wir bisher die Analogie zwischen der Thomsonschen Theorie und unserem Problem besonders betont, so müssen wir nun auf die Unterschiede eingehen, die der in Wirklichkeit grundverschiedene Abszissenmaßstab mit sich bringt. Ich habe schon gesagt, daß durch die Abszissentransformation das ganze Bild wie in einem Zerrspiegel erscheint, der die Längen in der äußeren Randzone im Verhältnis zu den Strecken in der Nähe des Koordinatenursprungs stark verkleinert. In Wirklichkeit ist also der prozentuale Abfall der Feldstärke zunächst den Randfasern längs nicht so steil wie in dem Zerrbild und die Wellenlänge, auf gleiche Breite der Randzone bezogen, weit größer als dort. Wenn man in die Nähe der Grenzlinie kommt, so kehren sich die Verhältnisse gerade um. Mit dem Abszissenmaßstab erscheint auch die Wellenlänge verkürzt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit verkleinert. So stellt sich in Wirklichkeit das Bild der eindringenden Feldwelle nicht wie in Figur 13a, sondern wie in Figur 13b dar. Ich glaube die Anschaulichkeit der graphischen Darstellung enthebt mich einer weiteren Beschreibung.

Genau in derselben Weise, wie wir soeben den Hauptanteil H_1 der Feldströmung diskutiert haben, läßt sich auch das Korrekturglied

$$H_2 = \tilde{H}_{20}\left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^{1-m} \sin\left(\omega t + \psi_2 - \sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{x + e_0}{e_0}\right) \qquad 37)$$

behandeln. Dieselbe Substitution wie oben (Gleichung 31) bringt den Ansatz auf die Form:

$$H_2 = \tilde{H}_{20} e^{(1-m)y} \sin\left(\omega t + \psi_2 - \sqrt{m\,(m-1)}\, y\right) \qquad 38)$$

bzw.

$$\dot{\tilde{H}}_2 = \dot{\tilde{H}}_{20} e^{-\sqrt{\frac{m-1}{m}}\varphi''} (\cos\varphi'' + j \sin\varphi'') \qquad 39)$$

wobei

$$\varphi'' = \sqrt{m\,(m-1)}\, y = \sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{x + e_0}{e_0} \qquad 40a)$$

Der Zerrspiegel zeigt uns also ebenfalls eine Thomsonsche Feldwelle; nur wandert sie diesmal gegen die Seitenebenen des Blechkörpers hin und verliert in dieser Richtung an Höhe. In der Wellenlänge stimmen Hauptwelle und Nebenwelle überein. Hingegen ist die Hauptwelle etwa doppelt so stark gedämpft als die Nebenwelle. Ich habe diese Verhältnisse nur durch das Spiraldiagramm der Figur 15 illustriert. Der Übergang vom y- zum x-System bedarf keiner Erläuterung mehr.

Digitized by Google

Wer nur die mitgeteilten Feldverteilungskurven betrachtet hat, dem könnte es leicht scheinen, als bestände zwischen der Thomsonschen Theorie und unseren Ableitungen gar kein so großer Unterschied. Dieser Eindruck verschwindet aber sofort, sowie man sich die Kurven der Induktionsverteilung im Randgebiet aufzeichnet. Der Abfall der H-Kurve am Blechrand ergab sich noch etwas steiler, als er sich nach der Thomsonschen Theorie für eine konstante Permeabilität $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_a$ berechnen würde. Hingegen ist der Abfall der B-Kurve nach dem Blechinneren unter Umständen sogar geringer, als ihn die Thomsonsche Theorie selbst für $\tilde{\mu} = 1$ liefern würde. Während nämlich die $\tilde{H}_1$-Kurve immerhin noch mit etwas mehr als der zweiten Potenz des Argumentes $x + e_0$ gegen den Rand hin zunahm, erfolgt das Anwachsen der Induktion nach einer ziemlich hohen Wurzel desselben Arguments.

Natürlich bleibt trotzdem die formelle Analogie mit der Thomsonschen Theorie erhalten, und ich will auch die entsprechenden Gleichungen noch einmal anführen, weil es für den zeichnerischen Entwurf immer am bequemsten ist, entweder von dem verzerrten Abbild oder von dem Spiraldiagramm auszugehen. In dem gegebenen Koordinaten lautet die Gleichung der Hauptwelle

$$B_1 = \tilde{B}_{10} \left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^{m-2} \sin\left(\omega t + \psi_1 + \sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{x + e_0}{e_0}\right) \qquad 30\,a)$$

oder als Vektorgleichung

$$\dot{\tilde{B}}_1 = \dot{\tilde{B}}_{1a}\, e^{-\frac{m-2}{\sqrt{m\,(m-1)}}\varphi'} (\cos\varphi' + j \sin\varphi') \qquad 35\,a)$$

wobei

$$\tilde{B}_{10} = \tilde{H}_{10}\,\tilde{\mu}_0 \text{ und } \tilde{B}_{1a} = \tilde{H}_{1a}\,\tilde{\mu}_a$$

zu setzen ist. In dem transformierten System ergiebt sich

$$B_1 = \tilde{B}_{10}\, e^{(m-2)y} \sin\left(\omega t + \psi_1 + \sqrt{m\,(m-1)}\, y\right) \qquad 33\,a)$$

Geändert hat sich also gegenüber der Feldgleichung nur der Dämpfungsexponent der zum Beispiel für Stahlguß ($m = 2{,}25$) jetzt nur noch ein Neuntel von dem Dämpfungsfaktor der Feldstärke beträgt.

Daß sich die Leitkurve $\tilde{B}_1$ der Induktionsschwankung zwischen dem Koordinatenursprung und dem Blechrande nur verhältnismäßig wenig ändern würde, lag auch von vornherein auf der Hand. Wir brauchten uns nur zu überlegen, welche Werte wir seinerzeit für die Induktion der Grenzschicht erhalten haben. Es war

$$\text{für Stahlguß: } \tilde{B}_0 = 16\,400$$
$$\text{für Gußeisen: } \tilde{B}_0 = 6\,700$$

Auch sehr hohe Randinduktionen vorausgesetzt kann daher die Induktionskurve bis zum Blechrande höchstens auf das zwei- bis dreifache dieser Werte steigen, und diese geringe Steigerungsfähigkeit kommt eben in einem niedrigen Dämpfungsexponenten zum Ausdruck. Das Spiraldiagramm der Figur 14 und die Kurven der Figur 16 bestätigen diese Ausführungen.

Ist die Hauptwelle der Induktion schwächer gedämpft als die zugeordnete Welle der Feldstärke, so ist umgekehrt das Korrekturglied

$$B_2 = \tilde{B}_{20} \left(\frac{x + e_0}{e_0}\right)^{-(m+1)} \sin\left(\omega t + \psi_2 - \sqrt{m\,(m-1)} \ln \frac{x + e_0}{e_0}\right) \qquad 37\,a)$$

bzw.

$$B_2 = \tilde{B}_{20}\, e^{-(m+1)y} \sin\left(\omega t + \psi_2 - \sqrt{m\,(m-1)}\, y\right) \qquad 38\,a)$$

viel stärker gedämpft als die erregende Feldstärke, ja selbst stärker gedämpft als die H_1-Welle. In Figur 15 habe ich nur das Spiralendiagramm

Digitized by Google

$$\dot{\tilde{B}}_2 = \dot{\tilde{B}}_{20}\, e^{-\frac{m+1}{\sqrt{m(m-1)}}\varphi''} (\cos\varphi'' + j \sin\varphi'') \qquad 39\,a)$$

für die schon mehrfach benützetn Zahlenwerte abgebildet. Das rapide Erlöschen der $\tilde{B}_2$-Welle ist eine sehr starke Stütze unserer Vermutung, daß diesem Glied überhaupt nur eine untergeordnete Rolle zufällt. Im Übrigen sind wir nunmehr gut genug über die

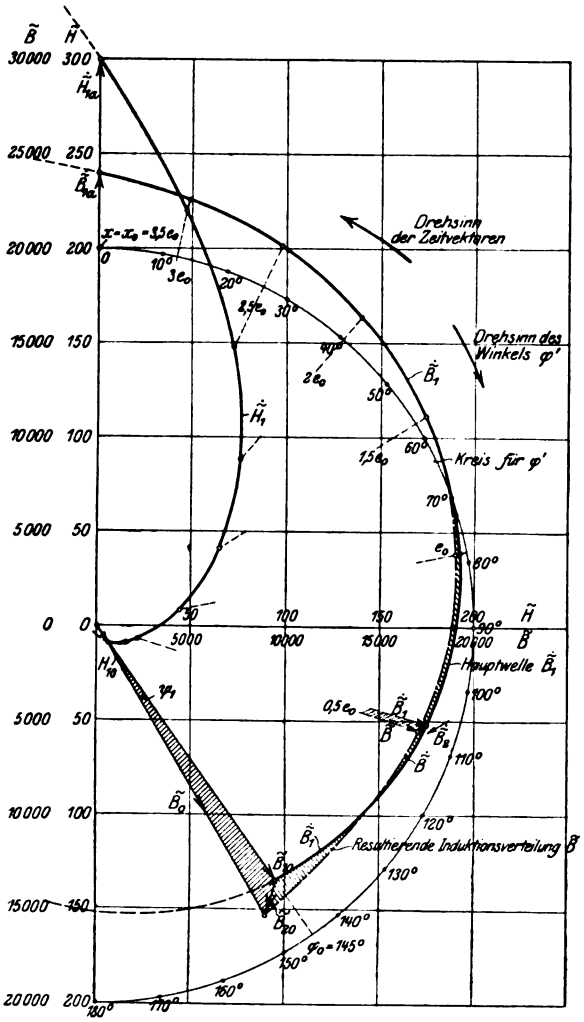


Fig. 14. Spiralendiagramm für die Hauptwelle der Feldstärke und Induktion.

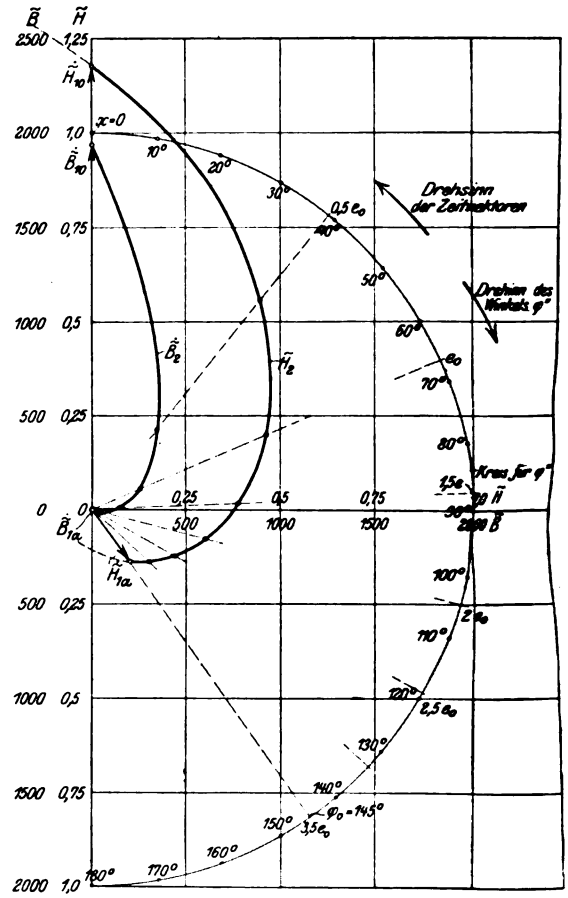


Fig. 15. Spiralendiagramm für die Nebenwelle der Feldstärke und Induktion.

magnetischen Veraältnisse orientiert, um auch diese Frage ein für alle Mal zum Austrag zu bringen. Was uns zur vollkommenen Lösung noch fehlt ist ja nur das Gesetz der Feldspaltung, oder was auf dasselbe herauskommt

Die Bestimmung der Integrationskonstanten

in der Lösung 29 der Differentialgleichung.

Die Grenzbedingungen, die uns die Konstanten $\tilde{H}_{10}$, $\tilde{B}_{10}$, ψ_1 und $\tilde{H}_{20}$, $\tilde{B}_{20}$, ψ_2 voi-schreiben, werden durch die Gesetze der Thomsonschen Induktionsströmung diktiert, in welche die Induktionsverteilung der Randzone längs der Ordinatenachse $x = 0$ übergeht. Das Gesetz der Feldverteilung in der Mittelzone

Digitized by Google

$$H = \tilde{H}_0' e^{\alpha_0 x} \sin(\omega t + \alpha_0 x) \quad ^1)$$

haben wir schon früher diskutiert. Ihm entspricht eine Wirbelströmung ρ von der spezifischen Dichte $\left(\frac{\text{Amp.}}{\text{qcm}}\right)$

$$\rho = -\frac{1}{0{,}4\pi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -\tilde{H}_0' \frac{a_0\sqrt{2}}{0{,}4\pi} \sin(\omega t + a_0 x + 45^0)$$

Nehmen wir einmal an, der Vektor $\tilde{H}_0'$ und damit auch ρ lägen fest, dann müßten wir die Konstanten der Randschicht so wählen, daß sie für $x = 0$ dieselben Werte wie die Thomsonsche Induktionsströmung ergeben, nämlich

$$\text{für } x = 0 \qquad H = \tilde{H}_0' \sin \omega t$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \tilde{H}_0' \alpha_0 (\sin \omega t + \cos \omega t)$$

Die erste Bedingung liefert:

$$\tilde{H}_0' \sin \omega t = \tilde{H}_{10} \sin(\omega t + \psi_1) + \tilde{H}_{20} \sin(\omega t + \psi_2)$$

Das heißt

$$\begin{cases} \tilde{H}_0' = \tilde{H}_{10} \cos\psi_1 + \tilde{H}_{20} \cos\psi_2 \\ 0 = \tilde{H}_{10} \sin\psi_1 + \tilde{H}_{20} \sin\psi_2 \end{cases}$$

Die zweite Bedingung lautet

$$\tilde{H}_0' \alpha_0 (\sin \omega t + \cos \omega t) = \frac{\tilde{H}_{10}}{e_0}\left[m \sin(\omega t + \psi_1) + \sqrt{m(m-1)} \cos(\omega t + \psi_1)\right] +$$

$$+ \frac{\tilde{H}_{20}}{e_0}\left[(1-m)\sin(\omega t + \psi_2) - \sqrt{m(m-1)} \cos(\omega t + \psi_2)\right].$$

Das heißt

$$\begin{cases} \tilde{H}_0' \varepsilon = \tilde{H}_{10}[m\cos\psi_1 - \sqrt{m(m-1)}\sin\psi_1] + \tilde{H}_{20}[(1-m)\cos\psi_2 + \sqrt{m(m-1)}\sin\psi_2] \\ \tilde{H}_0' \varepsilon = \tilde{H}_{10}[m\sin\psi_1 + \sqrt{m(m-1)}\cos\psi_1] + \tilde{H}_{20}[(1-m)\sin\psi_2 - \sqrt{m(m-1)}\cos\psi_2] \end{cases}$$

Somit besitzen wir vier Bestimmungsgleichungen, die sich leicht nach den vier Unbekannten auflösen lassen. Mit wenig Zwischenrechnungen stellt sich heraus:

$$\frac{\tilde{H}_{10}}{\tilde{H}_0'} = \frac{\tilde{B}_{10}}{\tilde{B}_0'} = \sqrt{\frac{(\varepsilon + m - 1)^2 + (\varepsilon + \sqrt{m(m-1)})^2}{2(2m-1)^2 - 1}}$$

$$\text{bzw. } \frac{\tilde{H}_{20}}{\tilde{H}_0'} = \frac{\tilde{B}_{20}}{\tilde{B}_0'} = \sqrt{\frac{(\varepsilon - m)^2 + (\varepsilon - \sqrt{m(m-1)})^2}{2(2m-1)^2 - 1}} \qquad 41)$$

und

$$\sin\psi_1 = \frac{\tilde{H}_0'}{\tilde{H}_{10}} \cdot \frac{(2m-1)\varepsilon - \sqrt{m(m-1)}(2\varepsilon - 1)}{2(2m-1)^2 - 1}$$

$$\text{bzw. } \sin\psi_2 = = -\frac{\tilde{H}_0'}{\tilde{H}_{20}} \cdot \frac{(2m-1)\varepsilon - \sqrt{m(m-1)}(2\varepsilon - 1)}{2(2m-1)^2 - 1} \qquad 42)$$

Dieses Resultat ist in mehr als einer Hinsicht höchst bemerkenswert. Vor allem lehrt es, daß die Aufteilung der resultierenden Feld- und Induktionsverteilung in zwei Wellenzüge

---

1) Wir schreiben $\tilde{H}'_0$ bzw. $\tilde{B}'_0$ und nicht $\tilde{H}_0$ bzw. $\tilde{B}_0$, weil, wie wir später sehen werden, infolge der Korrekturfunktion H_2 die Knickstelle der Sättigungskurve etwas auf der Interpolationsgeraden verschoben wird.

Digitized by Google

einzig und allein von dem Materialkoeffizient m der Sättigungskurve abhängt und aus diesem für jede Eisensorte ein für alle Mal berechnet werden kann.

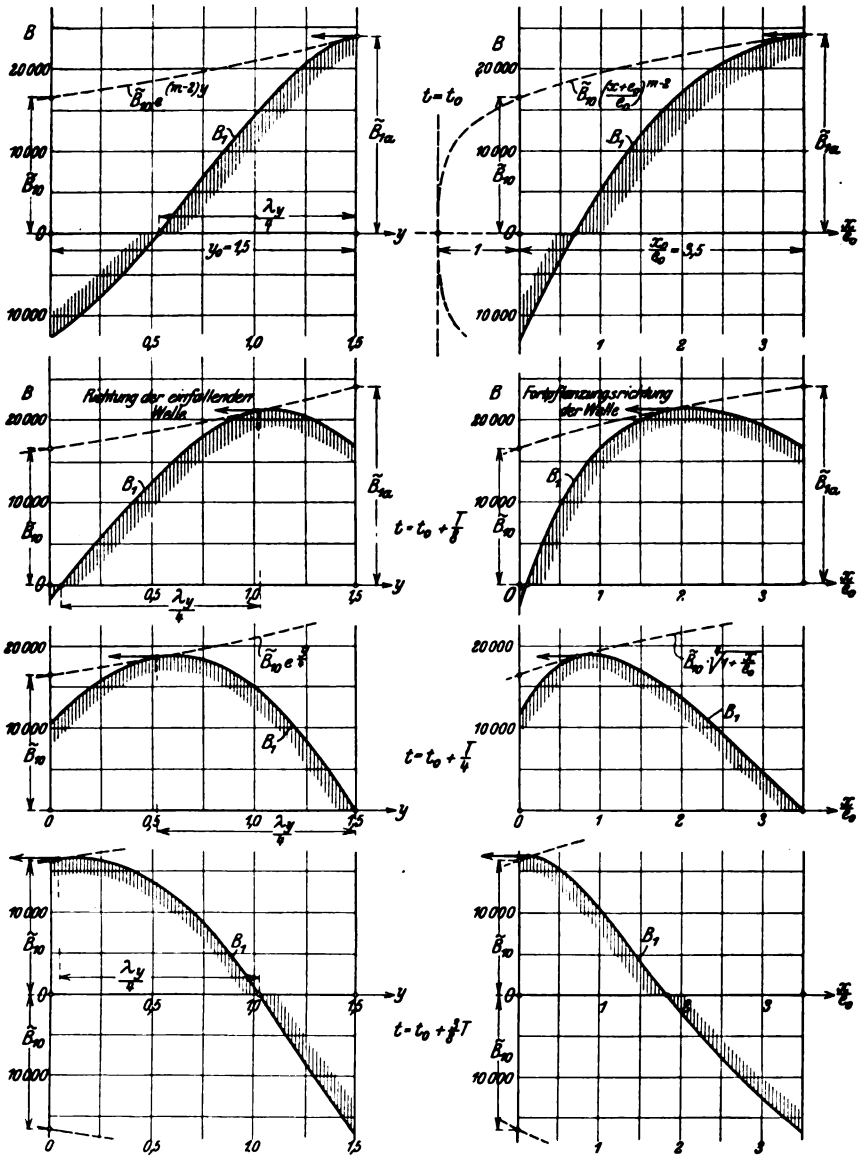


Fig. 16a. Verzerrtes Koordinatensystem. Fig. 16b. Unverzerrtes Koordinatensystem.
Fig. 16a und b. Änderung der Hauptwelle B_1 der Induktionsverteilung.

Für Stahlguß (m = 2,25) ergibt sich

$$\tilde{H}_{10} = 0{,}93\,\tilde{H}_0 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{H}_{20} = 0{,}11\,\tilde{H}_0'$$
$$\sin\psi_1 = 0{,}088 \qquad \sin\psi_2 = -0{,}745$$

Analog folgt

Für Gußeisen (m = 2,72)

$$\tilde{H}_{10} = 0{,}945\,\tilde{H}_0' \quad \text{bzw.} \quad \tilde{H}_{20} = 0{,}0856\,\tilde{H}_0'$$
$$\sin\psi_1 = 0{,}0665 \qquad \sin\psi_2 = -0{,}733$$

Digitized by Google

Was diese Zahlenwerte aussagen, läßt sich etwa wie folgt in Worte fassen: Vom Rande aus dringt eine Welle H_1 bzw. B_1 (siehe Gleichung 30 und 30a) in das Blechinnere ein. Mit verringerter Amplitude $\tilde{H}_{10}$ bzw. $\tilde{B}_{10}$ erreicht sie die Grenzschicht der Mittelzone, jenseits welcher wir ein Material mit konstanter Permeabilität $\tilde{\mu}_0$ voraussetzen dürfen. Diesem sprunghaft veränderten Gesetz der Permeabilität entspricht eine teilweise Reflexion der ankommenden Welle. Indessen wird — und das ist es, was wir zu zeigen hatten, — nur ein ganz geringer Anteil der Hauptwelle reflektiert. Von der Anfangsamplitude $\tilde{H}_{20}$ bzw. $\tilde{B}_{20}$ allmählich abklingend, zieht sich diese Hilfswelle H_2 bzw. B_2 (siehe Gleichung 37 bzw. 37a) nach dem Rande zurück, wo sie die resultierende Schwingung auf den Wert $\tilde{H}_a$ bzw. $\tilde{B}_a$ bringt. In die Mittelzone aber tritt eine Welle mit der geometrischen Summe der beiden Amplituden über:

$$\dot{\tilde{H}}_0' = \dot{\tilde{H}}_{10} + \dot{\tilde{H}}_{20}$$

bzw.

$$\dot{\tilde{B}}_0' = \dot{\tilde{B}}_{10} + \dot{\tilde{B}}_{20}$$

Fig. 17 illustriert die Übereinanderlagerung der beiden Wellenzüge an Hand des Spiralendiagramms. Sie wird uns auch für spätere Betrachtungen noch gute Dienste leisten.

Alle Eigenschaften der Hilfswelle deuten darauf hin, daß sie tatsächlich nur die untergeordnete Bedeutung besitzt, die wir ihr schon in allen früheren Rechnungen beigemessen haben. Ihre geringe Höhe, ihre Fortpflanzungsrichtung, die derjenigen der Haupterscheinung zuwiderläuft, ihr Abklingen gegen den Blechrand hin, alles zeugt dafür, daß wirklich der Hauptwelle ein dominierender Einfluß auf die Gesetze der gesamten Feldverteilung und damit der Permeabilität zukommt, wie wir dies durch Gleichung 24 festgesetzt hatten. Immerhin wird man gerne erfahren, welchen Fehler die Annahme dieser Gleichung schlimmstenfalls im Gefolge hat; und da dieser Fehler mit der Höhe der Randsättigung zunimmt, so ist gerade unser bisher verwendetes Zahlenbeispiel recht geeignet, uns den gewünschten Einblick zu gewähren.

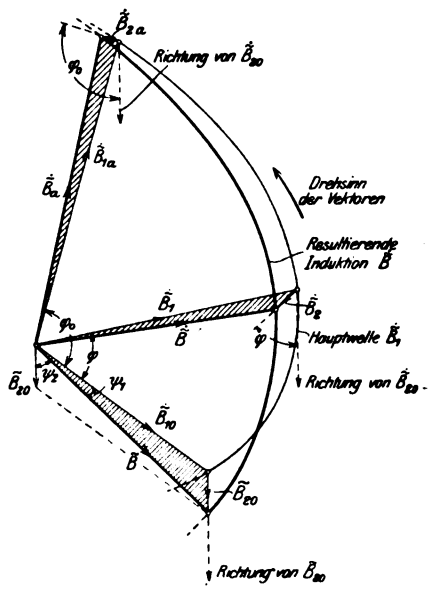


Fig. 17. Überlagerung der Haupt- und Nebenwelle im Vektordiagramm der Induktionsverteilung.

Wir hatten den Fall gesetzt, es stände uns längs des Blechrandes eine mit 50 Perioden pulsierende Feldstärke von maximal

$$\tilde{H}_a = 300$$

zur Verfügung, durch die wir bei einer bestimmten Stahlgußqualität (m = 2,25) entsprechend

$$\tilde{\mu}_a = 80$$

eine maximale Randinduktion

$$\tilde{B}_a = 24\,000$$

erreichen. Strenggenommen setzt sich der Vektor der Randinduktion, wie in Fig. 17 dargestellt, aus 2 Vektoren zusammen. Indessen ist bei erheblichen Randsättigungen der Hilfsvektor $\dot{\tilde{B}}_{20}$ sehr klein — er trägt hier nur $1^0/_{00}$ der Randinduktion — und demgemäß stimmen die Scheitelwerte der Hauptwelle und der resultierenden Induktion überein.

Digitized by Google

Wir setzen somit:

$$\dot{\tilde{B}}_{1a} = \dot{\tilde{B}}_a = 24\,000$$

und ebenso

$$\dot{\tilde{H}}_{1a} = \dot{\tilde{H}}_a = 300$$

Es wird dem Leser vielleicht schon aufgefallen sein, daß die Figuren 13, 14 und 16 gerade unter diesen Voraussetzungen entworfen sind, sodaß sie die folgenden Rechnungen unmittelbar illustrieren, und ein gleiches gilt für die Diagramme 15 der Hilfswelle.

Aus den Konstanten der Randfasern ergeben sich sogleich die Konstanten der Grenzlinien. Da der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Induktion längs der Hauptwelle genau mit der Interpolationskurve der Fig. 8 übereinstimmt, so ist

$$\tilde{B}_{10} = \tilde{B}_0 = 16\,400$$

$$\tilde{H}_{10} = \tilde{H}_0 = 10$$

und

$$\tilde{\mu}_0 = 1640$$

Andererseits ist nach dem Gesetz 41 der Feldspaltung

$$\tilde{B}_{20} = \frac{0{,}11}{0{,}93}\tilde{B}_{10} = 1940$$

$$\tilde{H}_{20} = \frac{0{,}11}{0{,}93}\tilde{H}_{10} = 1{,}18.$$

Somit muß für die Grenzlinien und rückwirkend auch für die Mittelzone

$$\tilde{B}_0' = \frac{1}{0{,}93}\tilde{B}_0 = 17\,600 \quad \text{anstatt} \quad \tilde{B}_0 = 16400$$

und

$$H_0' = \frac{1}{0{,}93}\tilde{H}_0 = 10{,}8 \qquad \text{,,} \qquad \tilde{H}_0 = 10$$

angenommen werden. Nur die Permeabilität

$$\tilde{\mu}_0 = 1640$$

verändert ihre Größe weder auf der Grenzlinie, noch in der Mittelzone.

Die mitgeteilten Korrekturen zeigen, wie weit wir uns von der ursprünglichen Interpolation der Sättigungskurve entfernt haben: Wir haben die Knickstelle der Ersatzkurve auf der Anfangsgeraden um 8% höher gelegt. Aber nicht lange, so bewegen wir uns wieder auf der ursprünglichen Interpolationskurve; denn die Hilfswelle B_2, — „das Fehlerglied", wenn man so will — erlischt überaus schnell. Das tritt am augenfälligsten hervor, wenn man das Spiralendiagramm der Hilfswelle gemäß Fig. 17 mit dem Spiralendiagramm der Hauptwelle kombiniert. Da ich beide Diagramme von vornherein in dem diesen Rechnungen entsprechenden Maßstab gezeichnet habe, so macht das nur geringe Mühe. Auf diese Weise ergibt sich das in Fig 14 strichpunktierte Vektordiagramm der resultierenden Induktionsverteilung. Man sieht, wie bald diese mit der Hauptwelle zur Deckung kommt. Etwa über $^4/_5$ der Randzone besteht praktisch kein Unterschied zwischen beiden, daher auch praktisch keine Abweichung von der ursprünglich angenommenen Interpolationskurve der magnetischen Charakteristik. Zur besseren Übersicht habe ich noch den Zusammenhang zwischen Feldstärke und Induktion, so wie man ihn aus den resultierenden Feldverteilungskurven folgern müßte, in Fig. 8 strichpunktiert eingetragen. Schon bei

$$\tilde{H} = 25 \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{B} = 18\,400$$

Digitized by Google

hat die neue Kurve die wirkliche Sättigungslinie praktisch eingeholt, und bis dahin lassen sich die Abweichungen noch immer gut ertragen. Im übrigen hätte man ja auch (durch Vergrößerung von m) die ursprüngliche Interpolationskurve in der Gegend der Knickstelle etwas tiefer legen können; dann wäre die Annäherung noch etwas besser gewesen.

V. Der resultierende Induktionsfluß. Ich bin in den bisherigen Betrachtungen etwas ausführlich gewesen; denn es kam mir darauf an, die Grundlagen der Theorie so klar darzulegen, daß der Leser über ihren Wert oder Unwert selbst zu entscheiden vermag. Wie jede Theorie, welche auf der analytischen Formulierung der Sättigungskurve beruht, läßt auch sie der Kritik ein weites Feld. Die Lösung eines derartigen Problems ist ja nicht eindeutig. Alles kommt darauf an, in der Wahl dieser Formulierung eine glückliche Hand zu haben, mit einfachen Methoden ein einfaches, und doch glaubhaftes Resultat zu erhalten. Wovor man sich dann aber auch hüten muß, ist, dieses Resultat allzu wörtlich aufzufassen Das gilt z. B. in unserem Falle für die reflektierte Hilfswelle H_2 bzw. B_2. Eine solche wohl definierte Reflexion tritt natürlich in Wirklichkeit nicht auf, denn in Wirklichkeit ändert sich auch die Permeabilität des Mediums mit der Induktion nach einem Gesetz und nicht nach zwei Gesetzen. Die reflektierte Welle ist nur der einfachste Ausdruck dafür, wie das Vorhandensein eines Maximums in der Permeabilitätskurve die einfallende Welle etwa beeinflussen kann. Wenn wir dies im Gedächtnis behalten, so haben wir für die folgenden Rechnungen den richtigen Standpunkt gewonnen.

Den Techniker, der immer und überall sogleich das Fazit der Erscheinungen zu ziehen sucht, ohne sich bei ihren Feinheiten aufzuhalten, ihn, den Mann der wissenschaftlichen Praxis, interessiert wohl in erster Linie wenn nicht ausschließlich die Ausnützung des Eisenquerschnittes. Für ihn schrumpft das ganze Problem der Induktionsverteilung auf die Frage zusammen: „Wenn ich pro cm Eisenweg eine bestimmte Ampérewindungszahl aufwenden kann, die mir am Rande nach Maßgabe der Wechselstrom-Sättigungskurve eine bestimmte Wechselinduktion $\tilde{B}_a$ erzeugt, welchem Fluß bahne ich damit den Weg durchs Eisen, und welche Verluste habe ich zu bestreiten?" Für die Mittelzone in der wir das Gesetz der Thomsonschen Induktionsverteilung als gültig annahmen, haben wir den resultierenden Fluß bereits im 3ten Abschnitte berechnet. Den Beitrag der Randzone findet man, indem man die Induktionswellen zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x_0$ integriert. Pro cm Seitenlänge ist:

$$\frac{N_a}{cm} = \int_0^{x_0} (B_1 + B_2)\, dx$$

In diese Gleichung sind die Werte für B_1 und B_2 aus Gleichung 30 und 30a einzuführen. Man erhält dann zwei Integrale von der Form:

$$\int z^\alpha \sin(\beta \ln z + \gamma)\, dz = \frac{z^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2 + \beta^2}\left[(\alpha+1)\sin(\beta \ln z + \gamma) - \beta \cos(\beta \ln z + \gamma)\right],$$

und nach einigen Umformungen mit Hilfe der Substitution

$$\chi = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{m}{m-1}} \qquad 43)$$

das Endresultat:

$$\frac{\dot{N}_a}{cm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} \left(\frac{\dot{B}_{1a}}{\alpha_a} - \frac{\dot{B}_{10}}{\alpha_0}\right)(\cos\chi + j\sin\chi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{\dot{B}_{20}}{\alpha_0} - \frac{\dot{B}_{1a}}{\alpha_a}\right)(\sin\chi + j\cos\chi) \qquad 44)$$

Digitized by Google

Dazu kommt noch der Beitrag der inneren Zone, für den wir nach Gleichung 13a setzen

$$\frac{\dot{\tilde{N}}_0}{cm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\dot{\tilde{B}}_{10} + \dot{\tilde{B}}_{20}}{\alpha_0} (\cos 45^0 + j \sin 45^0) \qquad 45)$$

sodaß wir den totalen Fluß pro cm Seitenlänge als die Summe der beiden Ausdrücke 44 und 45 erhalten.

Die mitgeteilten Formeln folgen streng aus den Vorausetzungen der Theorie, ohne daß neue vereinfachende Annahmen gemacht worden wären, und in Anbetracht dessen darf man wohl über ihre einfache Bauart überrascht sein. Sie gestatten sich jedem praktischen Beispiel anzupassen, und verlangen außer der Kenntnis der magnetischen Charakteristik (m) nichts anderes, als das man die einfallende und reflektierte Welle nach den Vorschriften des vorigen Abschnittes bestimme und in die Formeln einführe. Dann erhält man gleichzeitig die Größe des resultierenden Flusses und seine Phase gegenüber der bekannten Randinduktion. —Wenn man sich indes vor Augen hält, was ich einleitend über die Bedeutung der reflektierten Welle gesagt habe, nämlich daß sie mehr eine Folge unserer speziellen Annahmen als ein wohl definierter physikalischer Vorgang sei, so wird man wohl geneigt sein, unter Verzicht auf diese Größe die Formeln noch weiter zu vereinfachen.

Es ist ja auch kein nennenswerter Fehler zu erwarten, wenn wir die reflektierte Welle vernachlässigen und

$$\dot{\tilde{B}}_{1a} = \dot{\tilde{B}}_a, \quad \dot{\tilde{B}}_{10} = \dot{\tilde{B}}_0$$

einführen. Was wir dabei scheinbar auf der einen Seite an Genauigkeit einbüßen, gewinnen wir auf der anderen Seite durch bessere Anpassung des anzunehmenden Permeabilitätsgesetzes an die wirklichen Verhältnisse. Außerdem ersparen wir uns dadurch die Berechnung der Feldspaltung, ein Vorteil, den der Praktiker wahrscheinlich nicht gering veranschlagen wird. Wir schreiben somit endgültig:

$$\frac{\dot{\tilde{N}}_g}{cm} = \frac{\dot{\tilde{N}}_a}{cm} + \frac{\dot{\tilde{N}}_0}{cm} = \frac{\dot{\tilde{B}}_a}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} (\cos\chi + j \sin\chi)$$
$$+ \frac{\dot{\tilde{B}}_0}{\alpha_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos 45^0 + j \sin 45^0) - \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} (\cos\chi + j \sin\chi) \right) \qquad 46)$$

Oder wenn wir den Phasenwinkel φ_0 (siehe Gl. 36a) zwischen den Vektoren $\dot{\tilde{B}}_a$ und $\dot{\tilde{B}}_0$ einführen:

$$\frac{\dot{\tilde{N}}_g}{cm} = \frac{\dot{\tilde{B}}_a}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} (\cos\chi + j \sin\chi) + \frac{\tilde{B}_0}{\tilde{B}_a} \cdot \frac{\alpha_a}{\alpha_0} \left[\cos(45^0 + \varphi_0) + j \sin(45^0 + \varphi_0) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} (\cos(\chi + \varphi_0) + j \sin(\chi + \varphi_0)) \right] \right\} \qquad 46a)$$

Solange wir diese Formel auf Beispiele mit hoher Randinduktion anwenden, dominiert unbedingt das erste Glied, während das zweite nur eine kleine Korrektur bedingt. Läßt man diese zunächst aus dem Spiele, so kann man sagen: Der resultierende Kraftfluß besitzt ungefähr die Größe

$$\frac{\tilde{N}_g}{cm} \doteq \frac{\tilde{B}_a}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}}$$

und ist hinter der Randinduktion ungefähr um den Winkel

$$\chi = \text{arc tg} \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}}$$

verspätet.

Digitized by Google

Wenn man dieses Resultat mit den entsprechenden Formeln der Thomsonschen Theorie vergleicht, so erlebt man eine kleine Überraschung: Man erinnert sich wohl noch, wie wenig die wirkliche Kraftlinienströmung — quantitativ betrachtet — mit der Thomsonschen Induktionsverteilung gemein hatte. Und doch. Legt man der Thomsonschen Theorie als konstanten Wert über den ganzen Blechquerschnitt die Leitfähigkeit $\tilde{\mu}_a$ der Randfasern zu Grunde, so liefern beide Theorien für den resultierenden Fluß nicht sehr verschiedene Werte. Nach Thomson wäre:

$$\left(\frac{\tilde{N}_g}{cm}\right)_{Th} = \frac{\tilde{B}_a}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\chi = 45^0$$

Die exaktere Theorie ergibt für m = 2,1 bis 2,9

$$\tilde{N}_g = (1{,}17 \sim 1{,}11) \cdot (\tilde{N}_g)_{Th}$$

und

$$\chi = (1{,}2 \sim 1{,}13) \cdot 45^0$$

Diese auffällig gute Übereinstimmung bildet vielleicht auch die Ursache, weshalb die Praxis bisher mit der Thomsonschen Theorie auskam. Man rechnete vielleicht aus Bequemlichkeit mit der Randpermeabilität anstatt mit irgend einem Mittelwert der Permeabilitätsskala, ohne zu ahnen, daß gerade darin die unerläßliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Thomsonschen Formeln liegt. — Im übrigen habe ich erst noch zu zeigen, daß die mitgeteilten Vergleichwerte auch durch den 2ten Summanden in Gleichung 46a nicht wesentlich erschüttert werden, und ich will das an Hand unseres alten Zahlenbeispieles nachholen.

Eine 50-periodige Ummagnetisierung unserer Stahlgußprobe (m = 2,25) mit $\tilde{H}_a = 300$ liefert.

$$\left.\begin{array}{llll} \tilde{B}_a = 24\,000 & \tilde{\mu}_a = 80 & \alpha_a = 2{,}76 & \\ \tilde{B}_0 = 16\,400 & \tilde{\mu}_0 = 1640 & \alpha_0 = 125 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \chi = 49^0\,10' \\ \varphi_0 = 145^0 \end{array}$$

Demgemäß ergibt der erste Summand:

$$(\dot{\tilde{N}}_g)_I = 5400 + j\,4600,$$

der zweite Summand:

$$(\dot{\tilde{N}}_g)_{II} = 129 + j\,102$$

und daraus folgt insgesamt:

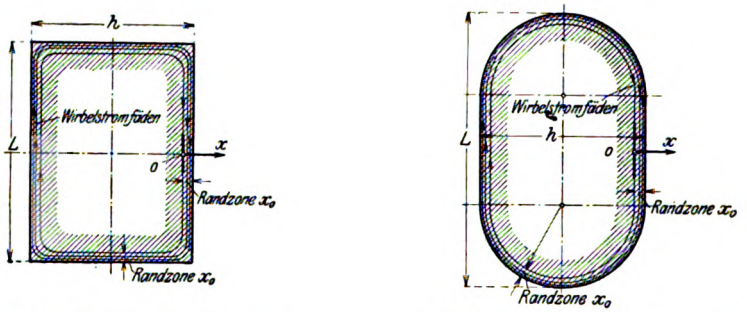
$$\tilde{N}_g = (\dot{\tilde{N}}_g)_I + (\dot{\tilde{N}}_g)_{II} = 5530 + j\,4700$$

Das ist nur ein Unterschied von $2^1/_2\%$ gegen den ersten Summanden, und wo es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, wird man sich bei hohen Randinduktionen mit dem ersten Summanden begnügen können. Bei niedrigen Induktionen hingegen und dementsprechend schmalen Randzonen nähert sich die Wirklichkeit der Thomsonschen Theorie mehr an, als es der erste Summand zum Ausdruck bringt, und es ist dann empfehlenswert, die ungekürzte Formel 46a zu Rate zu ziehen.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich strenggenommen auf Blechquerschnitte, deren Längsdimensionen ihre Breite so sehr übertreffen, daß praktisch die Induktionsströmung längs der schmalen Querseiten keine Bedeutung erlangt (Fig. 10). Tatsächlich tritt uns das Problem indes bei ganz anders gestalteten Querschnitten entgegen, nämlich bei den Polen von Einankerumformern und Synchronmotoren, die in der Regel rechteckig

Digitized by Google

oder halbrund (Fig. 18) ausgeführt werden. Wenn man aber bedenkt, daß die Induktionsströmung sich auf eine ganz schmale Zone längs des Polumfanges zurückzieht, eine Zone, die auch im Verhältnis zu Polbreite h sehr klein ist, so darf man ruhig annehmen, daß auch in diesem Falle die Induktionsströmung denselben Gesetzen über die größte Länge des Umfangs gehorcht — genau so lange, als auch die Wirbelstromfäden dem Umfang praktisch parallel laufen. Das aber ist überall mit Ausnahme der Polkanten der Fall, und diese Zonen



Mittlerer Umfang der Randzone
$U = 2(L + h) - 4x_0$.

Mittlerer Umfang der Randzone
$U = 2(L + 0{,}57\,h) - x_0\pi$.

Fig. 18. Zur Anwendung der Theorie auf massive Polquerschnitte.

sind verschwindend klein, weil das den Polquerschnitt umsäumende Band der Wirbelströmung gewöhnlich nur 0,5 bis 1,5 cm breit ist. Was man zu tun hat ist daher einfach die eben berechnete Größe des Flusses pro cm Seitenlänge mit der mittleren Länge des umsäumenden Bandes zu multiplizieren. Dann erhält man den gesamten Polfluß, den die aufgewendete M. M. K. durch den Querschnitt hindurchzupressen vermag. Dieser mittlere Umfang ist beim rechteckigen Querschnitte etwa um 4, beim halbrunden Querschnitt etwa um 3 Randzonenbreiten kleiner als der äußere Umfang.

VI. Verteilung und Verluste der Wirbelströmung. Die Wirbelströmung berechnet sich aus der Feldverteilung an Hand der elektromagnetischen Grundgleichung 6. Die Mittelzone beherrscht das Gesetz der Thomsonschen Theorie

$$\dot{\rho} = \dot{H}_0' \frac{\alpha_0\sqrt{2}}{0{,}4\,\pi} (\cos 135^0 + j \sin 135^0) \ldots \left[\frac{\text{Amp.}}{\text{qcm}}\right] \qquad 47)$$

Für die Randzone erhalten wir wieder zwei sich überlagernde Wellen

$$\rho_1 = \tilde{H}_{10} \frac{\alpha_0\sqrt{2}}{0{,}4\,\pi} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} \left(\frac{x+e_0}{e_0}\right)^{m-1} \sin\left(\omega t + \psi_1 - (90^0 + \chi) + \sqrt{m\,(m-1)}\,\ln\frac{x+e_0}{e_0}\right) \qquad 48)$$

und

$$\rho_2 = \tilde{H}_{20} \frac{\alpha_0\sqrt{2}}{0{,}4\,\pi} \cdot \sqrt[4]{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{x+e_0}{e_0}\right)^{-m} \sin\left(\omega t + \psi_2 + \chi - \sqrt{m\,(m-1)}\,\ln\frac{x+e_0}{e_0}\right) \qquad 49)$$

Die Wirbelströmung besitzt sonach genau denselben Charakter wie die Feld- und Induktionsverteilung und hält hinsichtlich der Größe der Dämpfung die Mitte zwischen beiden. Das gesamte Wirbelstromvolumen längs einer Randseite ist in jedem Moment entgegengesetzt gleich den magnetisierenden Amperewindungen; sonst könnte sich ja im Innern keine feldfreie Zone ausbilden.

Die maximale Stromdichte erreicht am Rande sehr beträchtliche Werte. Sie schwankt je nach der Höhe der Randinduktion zwischen

Digitized by Google

$$\tilde{\rho}_a = \left(\sqrt[4]{\frac{m}{m-1}} \text{ bis } 1\right) \cdot \tilde{H}_a \frac{\alpha_a \sqrt{2}}{0{,}4\,\pi}, \qquad 50)$$

wobei die größeren Werte den höheren Randsättigungen zugeordnet sind. Für unser altes Zahlenbeispiel erhalten wir

$$\tilde{\rho}_a = 1080 \frac{\text{Amp.}}{\text{qcm}} \cong 10{,}8 \frac{\text{Amp.}}{\text{qmm}}$$

oder

$$(\rho_a) \text{ effectiv} = 7{,}7 \frac{\text{Amp.}}{\text{qmm}}$$

Das ist ein außerordentlich hoher Wert, der nur vorübergehend ertragen werden kann.

Ich kann mich hinsichtlich der Wirbelstromdichte mit diesen spärlichen Andeutungen begnügen. Der Schwerpunkt liegt nicht in der Verteilung, sondern in den Verlusten der Wirbelströmung, und um zu diesen zu gelangen, knüpfen wir besser an den im 5ten Abschnitt berechneten Kraftfluß an:

Bei einem mittleren Umfang der Randzone von U^{cm} induziert der Gesamtflux

$$\dot{\tilde{N}}_g = U \cdot \frac{\dot{\tilde{N}}_g}{cm}$$

in jeder magnetisierenden Windung eine E. M. K.

$$\frac{\dot{\tilde{E}}_g}{w} = j\,\omega\,\dot{N}_g \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$$

Wenn nun auf 1 cm Eisenlänge gerade w Erregerwindungen entfallen, so ist $\tilde{E}_g$ die „Gegen-EMK" dieses Abschnittes, und

$$\dot{\tilde{J}} = \frac{\dot{\tilde{H}}_a}{0{,}4\,\pi}$$

der zugehörige Magnetisierungsstrom. Würde die Magnetisierung verlustlos erfolgen, so müßten der Strom- und Spannungsvektor aufeinander senkrecht stehen. Da in Wirklichkeit ganz erhebliche Verluste zu decken sind, — von denen wir hier nur die Wirbelstromverluste zu berücksichtigen haben — so ist die Nachteilung der EMK größer als 90°, und das innere Produkt aus beiden Vektoren bestimmt den Wirbelstromeffekt pro cm Eisenweg:

$$W^{\frac{\text{Watt}}{\text{cm}}} = -\frac{1}{2} \cdot \dot{\tilde{E}}_g \cdot \dot{\tilde{J}} = -(j\,\dot{\tilde{N}}_g) \cdot \dot{\tilde{H}}_a \times 2{,}5\ \nu \cdot 10^{-8}$$

Die Entwicklung dieses Ausdruckes ergibt für die Verluste pro qcm Seitenfläche:

$$\left.\begin{aligned} \frac{W^{\text{Watt}}}{0^{\text{qcm}}} &= \frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_a}{1000} \times \frac{1{,}25}{\alpha_a} \sqrt{\frac{2\,m}{2\,m-1}} \sqrt{\frac{m}{m-1}} \\ &- \frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_0}{1000} \times \frac{1{,}25}{\alpha_0} \left(\sqrt{\frac{2\,m}{2\,m-1}} \sqrt{\frac{m}{m-1}} - 1\right) \cos \varphi_0. \end{aligned}\right\} \qquad 51)$$

Der Winkel φ_0 zwischen den Vektoren $\tilde{B}_a$ und $\dot{\tilde{B}}_0$ ist wieder aus Gleichung 36a zu entnehmen.

Es wäre manches über diese Gleichung zu sagen, wenn ihr prinzipieller Aufbau nicht schon aus der Thomsonschen Theorie bekannt wäre. Beschränkt man sich bei hohen Randinduktionen wieder auf den ersten Summanden

$$\frac{W_I}{0} = \frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_a}{1000} \times \frac{1{,}25}{\alpha_a} \sqrt{\frac{2\,m}{1\,m-1}} \sqrt{\frac{m}{m-1}} = \text{const} \times \tilde{H}^2_a \sqrt{\frac{\nu\,\mu}{\lambda}} \qquad 51a)$$

so erkennt man das obwaltende Grundgesetz: Die spezifischen Wirbelstromverluste wachsen

Digitized by Google

mit dem Quadrate der aufgewendeten Feldstärke aber nur mit der Wurzel aus der Periodenzahl und Permeabilität und umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der elektrischen Leitfähigkeit. Die Form der Sättigungskurve ändert den Proportionalitätsfaktor nicht viel; denn den Grenzen

$$m = 21 \text{ bis } 29$$

entspricht nur ein Spielraum

$$\sqrt{\frac{2m}{2m-1}}\sqrt{\frac{m}{m-1}} = 1{,}35 \text{ bis } 1.21.$$

Schließlich ist es noch interessant, auch diese Formel an Hand unseres früheren Zahlenbeispieles gegen die Thomsonsche Theorie zu messen. Für die 50 periode Magnetisierung der Stahlgußprobe mit $\tilde{H}_a = 300$ ergibt sich:

$$\frac{W}{O} = 2{,}14 + 0{,}06 = 2{,}20 \frac{\text{Watt}}{\text{qcm}}$$

Daraus erhellt zunächst die geringe Bedeutung des 2ten Summanden bei hohen Randinduktionen, während man bei niedriger Sättigung besser die ungekürzte Formel benützt. Die Thomsonsche Theorie ergäbe unter denselben Verhältnissen aber für $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_a$ const. einen 30% zu kleinen Wert:

$$\left(\frac{W}{O}\right)_{Th.} = \left(\frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_a}{1000}\right) \cdot \frac{1{,}25}{\alpha_a} = 1{,}63 \frac{\text{Watt}}{\text{qcm}}.$$

Das ist noch immer kein sehr großer Fehler und ein solcher war auch nicht zu erwarten, denn die Wirbelstromverluste wurden aus dem resultierenden Flux abgeleitet, für den wir bereits eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen beiden Theorien festgestellt hatten.

Zusammenfassung. Die Kompliziertheit des Problems zwang mich, die Theorie mit einem Ballast von Rechnung zu beschweren, unter dem die Einfachheit der gewonnenen Resultate fast zu verschwinden droht. Darum möchte ich in diesem letzten Abschnitt in aller Kürze die wichtigsten Ergebnisse zusammenzustellen, die auch dem Praktiker von Nutzen sein dürften, wenn er sich einmal mit der Wechselstromerregung eines massiven magnetischen Kreises beschäftigen muß.

Bei den gebräuchlichen Eisensorten läßt sich die Wechselstromcharakteristik $\tilde{B} = f(\tilde{H})$ oberhalb des Kniees durch den Ansatz

$$\frac{\tilde{B}}{\tilde{B}_0} = \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{H}_0}\right)^{\frac{m-2}{m}} \qquad 4\,b)$$

bzw.

$$\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_0} = \sqrt[m]{\left(\frac{\tilde{H}_0}{H}\right)^2} \qquad 4)$$

wiedergeben. Dabei schwankt m nur zwischen 2,1 und 2,9. — In Gebieten der niedrigen Feldstärken ersetzt man die Sättigungskurve genau genug durch eine Gerade durch den Koordinatenursprung, welche die erste Kurve in einem Punkte mit den Koordinaten $\tilde{H}_0$, B_0, $\tilde{\mu}_0$ schneidet.

Wenn man einen massiven Abschnitt eines magnetischen Kreises mit Wechselstrom erregt, so drängt sich die Kraftlinienströmung am Umfange zusammen, den größten Teil des Querschnittes wie mit einem schmalen Rande umsäumend. Auf geringer Breite durchläuft so die Permeabilität die ganze Skala ihrer Werte. Hatten wir zuvor in der Sättigungskurve die Zone oberhalb und unterhalb $\tilde{B}_0$ unterschiedne, so unterscheiden wir jetzt nach

Digitized by Google

denselben Gesichtspunkten eine „Mittelzone" mit $\tilde{B} \leq \tilde{B}_0$, und eine „Randzone", in der die Induktion von der Amplitude $\tilde{B}_0$ längs der „Grenzlinie" bis zur Randinduktion $\tilde{B}_a$ ansteigt.

Für die mittlere Zone darf die Permeabilität als constant und gleich $\tilde{\mu}_0$ betrachtet werden. Man weiß, was die alte Theorie für diesen Fall aussagt. Der Vorgang spielt sich ab, als strebten von beiden Grenzlinien 2 magnetische Sinuswellen mit konstanter Geschwindigkeit und abnehmender Amplitude der Blechmitte zu. Ihre Wellenlänge ist klein und beträgt nur

$$\lambda_0 = \frac{2\pi^{cm}}{\alpha_0}, \text{ wobei: } \alpha_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\nu}{100}\cdot\frac{\tilde{\mu}_0}{1000}\cdot\lambda} \qquad 8)$$

Aber noch ehe sie diesen Weg zurückgelegt hat, ist die Welle praktisch vollkommen absorbiert. Denn ihre Amplitude erlischt nach einem Exponentialgesetz mit dem hohen Dämpfungsexponenten α_0.

Bevor die Welle die Mittelzone erreichte, mußte sie eine Randzone von der Breite

$$x_0 = \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha_a} - \frac{1}{\alpha_0}\right) \qquad 26)$$

durchqueren, wobei

$$\varepsilon = \sqrt{(m-0{,}5)}\sqrt{m\,(m-1)} = 1{,}6 \text{ bis } 2{,}4 \qquad 28)$$

nur eine Funktion der magnetischen Charakteristik (m) ist, und

$$\alpha_a = 2\pi\sqrt{\frac{\nu}{100}\cdot\frac{\tilde{\mu}_a}{1000}\cdot\lambda}$$

den Dämpfungsfaktor der Thomsonschen Theorie, berechnet für die Permeabilität der Randfasern, bezeichnet.

In dieser Randzone ist dieWellenbewegung ein wenig komplizierter. Mit der Amplitude $\tilde{B}_a$ am Blechrand einfallend drängt sie, zunächst nur wenig gedämpft und mit verhältnismäßig großer Wellenlänge, gegen die Mittelzone vor. Wie aber dabei die Induktion abnimmt und Permeabilität wächst, so erhöht sich auch die Dämpfung. Gleichzeitig verringert sich die Wellenlänge und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, bis an der Grenzlinie bereits diejenigen Verhältnisse erreicht sind, welche die übertretende Welle in der Mittelzone beibehalten muß.

Beide Zonen zusammen repräsentieren pro cm Seitenlänge einen Flux

$$\frac{\dot{N}_g}{cm} = \frac{\tilde{B}_a}{\alpha_a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{m-1}}\,(\cos\chi + j\sin\chi)$$
$$+ \frac{\dot{\tilde{B}}_a\cdot\frac{\tilde{B}_0}{\tilde{B}_a}}{\alpha_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{[\cos(45^0+\varphi_0) + j\sin(45^0+\varphi_0)]$$
$$- \sqrt[4]{\frac{m}{m-1}}\,[\cos(\chi+\varphi_0) + j\sin(\chi+\varphi_0)]\Big\} \qquad 46\,a)$$

wobei

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{m\,(m-1)}\,\ln\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_a} \qquad 36\,a)$$

und

$$\chi = \text{arc tg}\sqrt{\frac{m}{m-1}} \qquad 43)$$

Digitized by Google

zu setzen ist. Bei hohen Randinduktionen genügt es, den ersten Summanden in Gleichung 46 zu berücksichtigen. Bei niedrigen Induktionen nähert man sich mehr und mehr der Grenze

$$\frac{\dot{\tilde{N}}_g}{cm} \doteq \frac{\dot{\tilde{B}}_a}{\alpha_a} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 45^0 + j \sin 45^0) \qquad 13)$$

Um den Gesamtfluß eines massiven rechteckigen oder abgerundeten Eisenquerschnittes zu finden, hat man den spezifischen Flux mit dem mittleren Umfang der Randzone zu multiplizieren.

Die resultierende Kraftlinienströmung ist gegen die magnetisierenden Amperewindungen um etwas mehr als 45^0 verspätet, ein Zeichen dafür, daß der Magnetisierungsvorgang von sehr erheblichen Wirbelstromverlusten begleitet ist. Wir bezogen diese auf die Einheit der Oberfläche parallel zur Kraftlinienrichtung und berechneten

$$\left.\begin{aligned} \frac{W^{Watt}}{O^{qcm}} = {} & \frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_a}{1000} \times \frac{1{,}25}{\alpha_a} \sqrt{\frac{2m}{2m-1}} \sqrt{\frac{m}{m-1}} \\ & - \frac{\nu}{100} \cdot \frac{\tilde{H}_a}{1000} \cdot \frac{\tilde{B}_0}{1000} \cdot \frac{1{,}25}{\alpha_0} \left(\sqrt{\frac{2m}{2m-1}} \sqrt{\frac{m}{m-1}} - 1 \right) \cos \varphi_0 . \end{aligned} \right\} \qquad 51)$$

Es ist eigentümlich, daß die für den Gesamtfluß und die Wirbelstromverluste erhaltenen Werte nicht sehr viel von denjenigen abweichen, welche die Thomsonsche Theorie für $\tilde{\mu} = \text{const} = \tilde{\mu}_a$ ergeben würde. Wir erkannten hierin den mutmaßlichen Grund, weshalb gegen die alte Theorie, so unvollkommen sie auch die Wechselstromerregung eines massiven magnetischen Kreises beschreibt, bisher noch keine Stimmen aus der Praxis laut geworden sind.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 11. Heft. 1916.

Kondensatoren als Schutz gegen Ausschaltspannungen bei Gleichstrommaschinen hoher Spannung und bei Drosselspulen.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Ziel. Der Anker einer Gleichstrommaschine für hohe Spannung besitzt gewöhnlich eine nicht unbeträchtliche Induktivität. Wird der Belastungsstrom plötzlich abgeschaltet, so sind hohe Ausschaltspannungen zu befürchten. Daß sie tatsächlich auftreten, beweisen häufig beobachtete Durchschläge. Es ist also gut, den Anker einer Gleichstromhochspannungsmaschine durch einen parallel geschalteten Kondensator gegen Ausschaltspannungen zu schützen.

Wie groß soll man nun den Schutzkondensator nehmen? Diese Frage wird man nach folgendem Gesichtspunkt beantworten wollen. Die Maschine gebe normal eine Spannung von E Volt. Wir wollen beim Ausschalten eine Spannungssteigerung vom m E Volt als zulässig ansehen. Je nach der Güte der Isolierung und der Höhe der normalen Spannung wird man m kleiner, gleich oder höher als 1 setzen. Ist C die Kapazität des Schutzkondensators, K die Eigenkapazität der Maschine (beide gemessen in Farad), so soll somit der Kondensator durchschnittlich nicht mehr elektrische Schwingungsenergie als

$$W_e = \tfrac{1}{2}(C + K)\, m^2 E^2 \text{ Wattsekunden} \qquad 1)$$

aufnehmen. Wir werden nun den Schutzkondensator so groß wählen wollen, daß dieser Betrag mit der magnetischen Energie W_m übereinstimmt. Diese beträgt, wenn J den Ankerstrom, $L = (L_A + L_W)$ die Induktivität des Ankers und der Wendepole in Henry bedeutet,

$$W_m = \tfrac{1}{2} L \cdot J^2 \text{ Wattsekunden.} \qquad 2)$$

Aus 1) und 2) folgt nun

$$C + K = L \frac{J^2}{m^2 E^2} \text{ Farad.} \qquad 3a)$$

Die Maschinenkapazität K wird im allgemeinen klein gegen die Schutzkapazität C sein. Alsdann hat man zu fordern:

$$C = L \frac{J^2}{m^2 E^2} \cdot 10^6 \text{ Mikrofarad.} \qquad 3b)$$

Beispiel: Bei einer Gleichstromhochspannungsmaschine für 5000 Volt und für eine Stromstärke von 1 A mögen der Anker eine Induktivität von 12, die Wendepole eine Induktivität von 8 Henry haben. Es werde eine Spannungssteigerung auf das Doppelte der normalen Spannung zugelassen: $m = 1$; $mE = 5000$ Volt. Dann müssen wir dem Schutzkondensator die Kapazität

$$C = \frac{20 \cdot 1^2}{1^2 \cdot 5000^2} \cdot 10^6 = 0{,}8 \text{ Mikrofarad}$$

geben.

Ich habe dieses Beispiel angeführt, um zu zeigen, daß zu einem sicheren Schutz großer Induktivitäten sehr große Kondensatoren gehören.

Digitized by Google

Nun wird man folgendes einwenden können:

Eine Kapazität von der Größe 3) ist nur dann notwendig, wenn der Belastungsstrom plötzlich abgeschaltet wird. In Wirklichkeit wird die Abschaltung durch den Ausschaltlichtbogen gemildert. Sie vollzieht sich nicht in unendlich kurzer, sondern in endlicher, wenn auch kleiner Zeit. Es liegt daher im Bereiche der Möglichkeit, daß für praktische Ausschaltzeiten die Maschine auch dann noch geschützt ist, wenn ihr ein kleinerer Kondensator, als ihn die Vorschrift 3) verlangt, parallel geschaltet wird.

Die vorliegende Arbeit will nun beweisen, daß eine Maschine für lange Abschaltzeiten bereits durch ihre Eigenkapazität geschützt ist. Für lange Abschaltzeiten brauchen wir sie daher nicht erst besonders zu schützen. Ein der Maschine parallel geschalteter Kondensator wirkt erst dann als Schutz, wenn die Ausschaltzeit so kurz ist, daß der Kondensator praktisch die gesamte magnetische Feldenergie in sich aufnehmen muß. Es hat daher, solange es nur auf Ausschaltspannungen ankommt, keinen Zweck, der Maschine einen Kondensator parallel zu schalten, der kleiner ist, als ihn die Vorschrift 3) verlangt. Tut man es doch, so erhält man keinen wirklichen, sondern nur einen vermeintlichen, einen „Pseudoschutz".

2. Die mathematisch-technische Aufgabe. Wir werden die Gleichstromhochspannungsmaschine als ein Gebilde mit der Induktivität L und der Eigenkapazität K ansehen, in dem eine Gleichspannung E induziert wird (Fig. 1). Den Widerstand vernachlässigen wir. Die Eigenkapazität bringen wir durch einen der Induktivität L parallel geschalteten Kondensator zum Ausdruck. Liegt der Maschine außerdem noch eine Schutzkapazität C parallel, so wirkt diese wie eine Vergrößerung der Eigenkapazität. Den

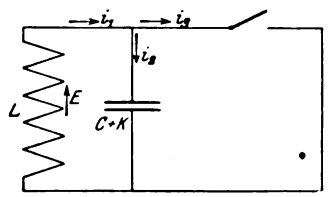


Fig. 1. Das Schaltschema.

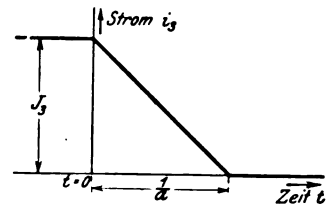


Fig. 2. Die dem Strome i_3 vorgeschriebene Änderung.

Klemmen der Maschine werde ein Gleichstrom J_3 entnommen. Zur Zeit $t = 0$ werde dieser abgeschaltet. Es sinkt somit der Strom (Fig. 2) vom Zeitpunkte $t = 0$ ab nach irgendeinem, zunächst nicht genauer anzugebenden Gesetze vom Wert J_3 auf Null herab. Da es im folgenden zunächst nur darauf ankommt, den großen Zügen nach den Einfluß einer längeren oder kürzeren Ausschaltzeit zu übersehen, so wollen wir annehmen, der Strom J_3 sinke geradlinig mit der Zeit auf Null herab. Wir setzen also

$$i_3 = J_3 (1 - a t). \qquad 4)$$

Dieser Ansatz besagt, daß die Abschaltung des Stromes i_3 in der Zeit $\tau = \frac{1}{a}$ beendet ist. Durch Verfügung über a haben wir es daher in der Hand, längere oder kürzere Ausschaltzeiten darzustellen. Natürlich hätten wir statt des linearen Ansatzes 4) andere Ansätze, etwa quadratische oder solche höherer Ordnung einführen können. Indessen werden wir sehen, daß unser Ansatz 4) bereits genügt, um das Abschaltproblem ziemlich allgemein zu überblicken.

Die eigentliche Aufgabe besteht nur darin, unter den oben mitgeteilten Voraussetzungen die maximale Klemmenspannung der Maschine zu berechnen.

3. Die mathematische Lösung. Die Hauptgleichungen lauten für unseren Fall offenbar:

$$E = L \frac{d i_1}{d t} + \frac{1}{C + K} \cdot \int i_2 \, d t \qquad 5)$$

Digitized by Google

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad 6)$$

$$i_3 = J_3 \text{ für } t \leqq 0; \quad i_3 = J_3(1 - a\,t) \text{ für } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}; \quad i_3 = 0 \text{ für } t \geqq \frac{1}{a}.$$

Für die Zeit vor der Abschaltung ($t \leqq 0$; Gleichstrombelastung) ist, wie man ohne weiteres sieht, $i_3 = J_3$; $i_2 = 0$ und die Kondensatorspannung

$$\frac{1}{C+K}\int i_2\,dt = V_2 = E. \qquad 8)$$

Wir beseitigen aus den Gl. 5) und 6) den Strom i_1 und erhalten:

$$E - L\frac{di_3}{dt} = L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C+K}\int i_2\,dt \qquad 9)$$

oder, indem wir die Kondensatorspannung

$$V_2 = \frac{1}{C+K}\int i_2\,dt \qquad 10)$$

einführen:

$$E - L\frac{di_3}{dt} = L(C+K)\frac{d^2V_2}{dt^2} + V_2. \qquad 11)$$

Für die Abschaltezeit $\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}\right)$ berechnen wir $L\frac{di_3}{dt}$ aus dem Ansatz 4). Wir finden

$$-L\frac{di_3}{dt} = J_3 L a. \qquad 12)$$

Nach vollendeter Abschaltung ist

$$-L\frac{di_3}{dt} = 0. \qquad 13)$$

Es gilt somit für die Abschaltzeit $\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}\right)$ die Differentialgleichung:

$$E + J_3 L a = L(C+K)\frac{d^2V_2}{dt^2} + V_2 \qquad 14)$$

und die Lösung:

$$V_2 = E + J_3 L a + A \sin \omega t + B \cos \omega t \qquad 15)$$

$$\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L(C+K)}. \qquad 16)$$

Nach vollendeter Abschaltung haben wir zu schreiben:

$$E = L(C+K)\frac{d^2V_2}{dt^2} + V_2 \qquad 17)$$

und

$$V_2 = E + F \sin \omega t + D \cos \omega t \qquad 18)$$

$$\frac{1}{a} \leqq t < \infty.$$

Der Lösung 15) muß vorgeschrieben werden, daß zur Zeit $t = 0$ (Beginn der Abschaltung) die Spannung $V_2 = E$ und der Strom $i_2 = 0$ ist.

Die Konstanten A und B haben somit die Forderungen zu erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} E &= E + L J_3 a + B \\ i_{2\,t=0} &= (C+K)\frac{dV_2}{dt_0} = 0 = A\,\omega(C+K) \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Digitized by Google

Es ist somit

$$A = 0$$

$$B = -L J_3 a.$$

Während der Abschaltzeit wird daher die Kondensatorspannung durch den Ausdruck:

$$V_2 = E + L J_3 a \{1 - \cos \omega t\} \qquad 20)$$

$$\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}\right)$$

beschrieben.

Aus ihm folgt für den Zeitpunkt $t = \frac{1}{a}$, mit dem die Abschaltung endigt,

$$V_2\left(t = \frac{1}{a}\right) = E + L J_3 a \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right) \qquad 21)$$

$$i_2\left(t = \frac{1}{a}\right) = L J_3 a \omega (C + K) \sin \frac{\omega}{a}. \qquad 22)$$

Die Konstanten F und D im Ausdruck 18) müssen nun so bestimmt werden, daß sich für die Zeit $t = \frac{1}{a}$ die Werte 21) und 22) ergeben. Dies trifft zu, wenn diese Konstanten die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$L J_3 a \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right) = F \sin \frac{\omega}{a} + D \cos \frac{\omega}{a} \qquad 23)$$

$$L J_3 a \sin \frac{\omega}{a} = F \cos \frac{\omega}{a} - D \sin \frac{\omega}{a} \qquad 24)$$

Man findet leicht, daß man setzen muß:

$$F = L J_3 a \sin \frac{\omega}{a} \qquad 25)$$

$$D = -L J_3 a \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right). \qquad 26)$$

Nach vollendeter Abschaltung $\frac{1}{a} \leqq t < \infty$ hat man für die Kondensatorspannung zu schreiben:

$$V_2 = E + L J_3 a \sin \frac{\omega}{a} \cdot \sin \omega t - L J_3 a \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right) \cos \omega t \qquad 27)$$

Der besseren Übersicht wegen stellen wir unsere Ergebnisse zusammen. Es ist vor der Abschaltung

$$V_2 = E; \qquad 28)$$

während der Abschaltung $0 \leqq t \leqq \frac{1}{a}$

$$V_2 = E + L J_3 a \cdot (1 - \cos \omega t); \qquad 29)$$

nach der Abschaltung $\frac{1}{a} \leqq t < \infty$

$$V_2 = E + L J_3 a \left[\sin \frac{\omega}{a} \cdot \sin \omega t - \left(1 - \cos \frac{\omega}{a}\right) \cos \omega t\right]. \qquad 30)$$

4. Diskussion der Lösung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1. a sei sehr groß, so daß $\frac{\omega}{a}$ eine kleine Zahl ist, etwa $\frac{\omega}{a} \leqq \frac{\pi}{10}$. Das heißt [vgl. Ansatz 4)] der Ausschaltvorgang ist in einer Zeit beendet, die gleich oder kleiner als der 20. Teil der Schwingungsdauer des aus Maschine und Schutzkondensator gebildeten Schwingungskreises ist.

Digitized by Google

Alsdann steigt die Kondensatorspannung während der Abschaltung dauernd an und erreicht am Schluß derselben den Wert

$$V_2\left(t=\frac{1}{a}\right)=E+LJ_3a\left(1-\cos\frac{\omega}{a}\right)\approx E+LJ_3a\cdot\frac{\omega^2}{2a^2}=E+LJ_3\omega\cdot\frac{\omega}{2a} \qquad 31)$$

Nach vollendeter Abschaltung [Ausdruck 30)] steigt die Kondensatorspannung weiter an und pendelt in Schwingungen um ihren Durchschnittswert E. Die Amplitude der Schwingung beträgt:

$$LJ_3a\sqrt{\sin^2\frac{\omega}{a}+\left(1-\cos\frac{\omega}{a}\right)^2}=LJ_3a\cdot 2\left|\sin\frac{\omega}{2a}\right|.$$

Bei kleinem Werte von $\frac{\omega}{a}$ hat man daher für die größte Spannungserhöhung

$$\Delta E=LJ_3\omega \qquad 32)$$

zu schreiben. Durch Einsetzen des Wertes 16) für ω, überzeugt man sich leicht, daß der hier behandelte Fall gleichbedeutend mit der Forderung ist, daß sich die gesamte magnetische Energie des Ankers in elektrische umsetzen soll. Führen wir für die maximale Spannungssteigerung wieder die S. 345 aufgestellte Forderung ein, so gelangen wir auch jetzt noch zu den Ausdrücken 3) zurück.

Solange der Abschaltvorgang sich in einer Zeit abspielt, die klein gegen die Dauer einer Viertelschwingung des durch Maschine und Kondensator gebildeten Schwingungskreises ist, ist eine Maschine nur dann geschützt, wenn sie einen nach 3) bemessenen Kondensator erhält.

2. Es sei die Ausschaltdauer groß im Vergleich zur Schwingungsdauer des Maschinenkreises. In diesem Falle vollführt die Spannung am Kondensator auch während der Abschaltzeit Schwingungen. Die höchste Spannung übertrifft die Spannung E um

$$LJ_3 2a \text{ Volt.} \qquad 33)$$

Es ist praktisch, die Ausschaltezeit $\tau=\frac{1}{a}$ mit der Schwingungsdauer $T=2\pi\sqrt{L\cdot(C+K)}$ in Vergleich zu setzen. Es sei

$$\tau=\frac{1}{a}=\lambda T=\lambda\cdot\frac{2\pi}{\omega}. \qquad 34)$$

Die Verhältniszahl λ gibt also an, wieviel Schwingungen des Maschinenkreises auf die Abschaltezeit τ kommen. Während der Abschaltung beträgt die Spannungssteigerung

$$LJ_3\cdot\frac{2}{\lambda T}=LJ_3\frac{\omega}{\pi\lambda} \text{ Volt.} \qquad 35)$$

Die Spannungsgefahr am Kondensator während der Abschaltung nimmt somit umgekehrt proportional mit der Ausschaltezeit τ ab.

Nach der Abschaltung schwingt der Kondensator mit einer Amplitüde von

$$LJ_3\cdot\frac{2}{\lambda T}\cdot\sin\frac{\omega}{2}\lambda T \qquad 36)$$

weiter.

Es kann gerade der Fall eintreffen, daß $\omega\frac{\lambda}{2}T=\lambda\pi$ ein vielfaches von π ist. Dies trifft zu, wenn λ eine ganze Zahl ist. Alsdann ist die Amplitude 36) Null. Der Kondensator bleibt nach der Abschaltung auf der Spannung E. Es trat die Spannungserhöhung 33) nur während der Abschaltung auf.

Wenn aber λ ein ungeradzahliges Vielfaches von $^1/_2$ ist, dann ist $\left|\sin\omega\frac{\lambda T}{2}\right|=$

Digitized by Google

$= |\sin \lambda\pi| = 1$. Es tritt alsdann nach der Abschaltung dieselbe Spannungssteigerung auf wie während der Abschaltung.

Die Spannungssteigerung nach dem Abschalten ändert sich mit der Abschaltdauer nach der dünn gezeichneten Kurve der Fig. 3. Für die Amplitude der Spannungssteigerung während des Abschaltens gilt die stark gezeichnete Kurve. Uns kommt es nun auf die maximale Spannungssteigerung ΔE während und nach dem Abschalten an [Formel 32) und 35)]. Wir können für die gesuchte Spannungssteigerung schreiben:

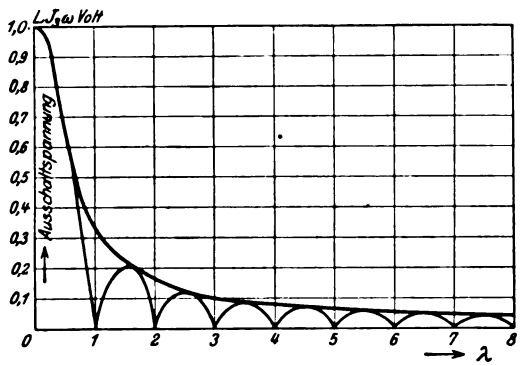


Fig. 3. Ausschaltspannung und Ausschaltzeit.

$$\Delta E = L J_3 \frac{\omega}{\lambda\pi}, \quad \text{wenn } \lambda \geqq \tfrac{1}{2} \qquad 37)$$

und

$$\Delta E = L J \omega, \quad \text{wenn } \lambda \leqq \tfrac{1}{10} \qquad 38)$$

Für das Intervall $\frac{1}{10} < \lambda < \frac{1}{2}$ könnte eine weitere Annäherungsformel leicht aus den für beliebige Werte von λ gültigen Gleichungen abgelenkt werden. Doch ist dies nicht notwendig, da die Ausdrücke 37) und 38) bereits genügend genau den Verlauf der Spannungssteigerung festlegen. Ihre Figur stimmt mit der stark gezeichneten Kurve Fig. 3 überein.

Wir entnehmen der Fig. 3 folgendes: Ist die Abschaltdauer gleich oder größer als die Schwingungsdauer des Maschinenkreises, so nimmt die Abschaltspannung umgekehrt proportional der Schaltdauer ab. Der Abschaltfunke wirkt in diesem Gebiete somit stark schwächend auf die Ausschaltspannungen.

Wir wollen uns nun über die Ausschaltspannungen bei einer Maschine unterrichten, erstens, wenn sie ungeschützt ist und ihr somit nur ihre Eigenkapazität K zukommt; zweitens, wenn ihr ein kleiner Kondensator k parallel geschaltet ist, dessen Kapazität mit K von gleicher Größenordnung sein soll; drittens, wenn die Maschine einen großen Kondensator C erhalten hat. Um einen besonderen Fall vor Augen zu haben, ziehen wir wieder das Beispiel S. 345 heran. Unsere dort gemachten Angaben ergänzen wir durch die Mitteilung, daß die Maschine eine Eigenkapazität von $\frac{2}{100}$ Mikrofarad haben soll. Wir wollen $k = \frac{4}{100}$ Mikrofarad und $C = 0{,}8$ Mikrofarad wählen. Die ungeschütze Maschine kann mit einer Kreisfrequenz

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LK}} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 2 \cdot 10^{-8}}} = 1580 \text{ sec}^{-1} \qquad 39)$$

schwingen.

Die zugehörige Schwingungsdauer beträgt

$$T_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{LK} = \frac{1}{251} \text{ sec.}$$

Wird der Maschine der kleine Kondensator parallel geschaltet, so sinkt die Kreisfrequenz auf

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L(K+k)}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot (2+4)\,10^{-8}}} = 914 \text{ sec}^{-1}. \qquad 40)$$

Die Schwingungsdauer steigt auf

$$T_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{L(K+k)} = \frac{1}{145} \text{ sec.} \qquad 41)$$

Digitized by Google

Bei dem großen Kondensator ergibt sich die Kreisfrequenz noch niedriger zu

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L(K+C)}} = \frac{1}{\sqrt{20\,(2+80)\cdot 10^{-8}}} = 250 \text{ sec}^{-1} \qquad 42)$$

$$T_3 = \tfrac{1}{40} \text{ sec.}$$

Der normale Belastungsstrom betrage 1 Ampere. Dann kann im ungünstigsten Falle bei der ungeschützten Maschine die Überspannung

$$\Delta E_1 = L J \omega_1 = 20 \cdot 1 \cdot 1580 = 31\,600 \text{ Volt}$$

auftreten. Bei parallel geschaltetem kleinen Kondensator ergibt sich die Überspannung

$$\Delta E_2 = L J \omega_2 = 20 \cdot 1 \cdot 914 = 18\,280 \text{ Volt}$$

und bei angeschlossenem großen Kondensator die Überspannung

$$\Delta E_3 = L J \omega_3 = 20 \cdot 1 \cdot 250 = 5000 \text{ Volt.}$$

In Fig. 4 sind auf der Ordinate die angegebenen drei Spannungen eingetragen.

Es sei nun die Ausschaltezeit $\frac{1}{a}$ groß gegen $\frac{1}{40}$ Sekunden. Wir setzen nach 34)

$$\frac{1}{a} = \lambda_3 T_3 = \frac{\lambda_3}{2\pi}\sqrt{L(K+C)} \qquad 43)$$

Dann ist die Ausschaltezeit erst recht groß gegen T_2 und T_1. In bezug auf diese Schwingungszeiten sei

$$\frac{1}{a} = \lambda_2 T_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi}\sqrt{K+k} \qquad 44)$$

$$\frac{1}{a} = \lambda_1 T_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi}\sqrt{LK} \qquad 45)$$

Es besteht somit die Beziehung

$$\lambda_3 \cdot \sqrt{L(C+K)} = \lambda_2 \cdot \sqrt{L(K+k)} = \lambda_1 \cdot \sqrt{LK}$$

oder

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \sqrt{\frac{C+K}{K+k}} = \lambda_3 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \sqrt{\frac{C+K}{K}} = \lambda_3 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

In unserem Falle ist

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \sqrt{\frac{82}{6}} = \lambda_3 \cdot 3{,}7$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \sqrt{\frac{82}{2}} = \lambda_3 \cdot 6{,}4.$$

Wir greifen nun einen beliebigen Wert von λ_3 etwa $\lambda_3 = 4$ heraus. Die Abschaltung geschieht in $^1/_{10}$ Sekunden. Alsdann ist $\lambda_2 = 4 \cdot 3{,}7 = 14{,}8$ und $\lambda_1 = 4 \cdot 6{,}4 = 25{,}6$.

Es tritt somit bei der durch den großen Kondensator geschützten Maschine die Spannung auf:

$$\Delta E_3 = \frac{5000}{4 \cdot \pi} = 400 \text{ Volt.}$$

Bei der ungeschützten Maschine erhalten wir:

$$\Delta E_1 = \frac{31\,600}{\pi \cdot 25{,}6} = 400 \text{ Volt,}$$

Digitized by Google

und bei der Maschine mit kleinem Kondensator:

$$\Delta E_2 = \frac{18280}{\pi \cdot 14{,}8} = 400 \text{ Volt.}$$

Wir erhalten somit das überraschende Ergebnis, daß die Maschine dieselbe Spannungsbeanspruchung erfährt, gleichgültig, ob ihr ein großer oder kleiner Kondensator parallel liegt. Diese Aussage gilt, solange λ_3 größer als $^1/_2$ angesehen und daher Formel 38)

$$\Delta E = L J \frac{\omega}{\pi \lambda}$$

Gültigkeit hat. Der Grund für die überraschende Übereinstimmung der drei Spannungen liegt daran, daß bei großem Kondensator die Kreisfrequenz ω groß und λ mäßig ist. Bei kleinem Kondensator liegt der Wert der Kreisfrequenz ω höher als bei großem Kondensator. Dafür ist aber in demselben Verhältnis die Zahl λ gewachsen. Der Kondensator mag daher eine Kapazität haben, welche man will, das Verhältnis $\frac{\omega}{\lambda}$ ist bei gegebener Ausschaltzeit und gegebener Maschineninduktivität für alle Werte ein und dasselbe.

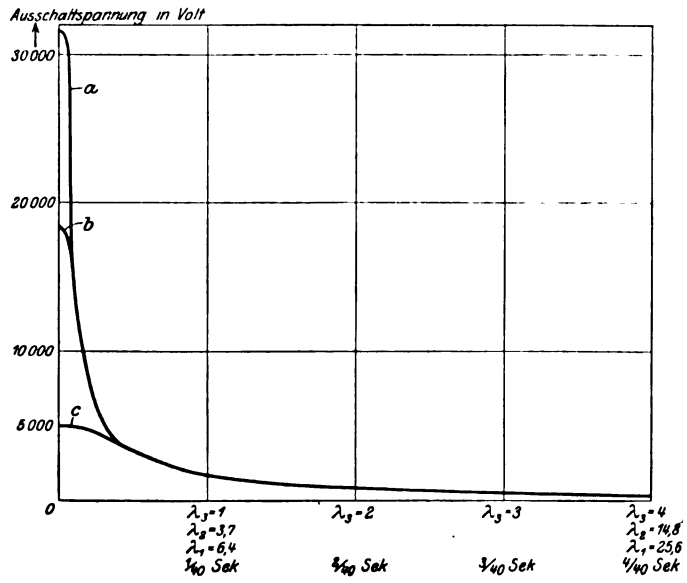


Fig. 4.
a = Ausschaltspannung der ungeschützten Maschine. Eigenkapazität $^2/_{100}$ Mikrofarad.
b = Ausschaltspannung der geschützten Maschine. Schutzkapazität $^4/_{100}$ Mikrofarad.
c = Ausschaltspannung der geschützten Maschine. Schutzkapazität 0,8 Mikrofarad.

Bis zum Werte $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, bis zu dem der Ausdruck 38) Gültigkeit hat, fallen daher die Überspannungskurven für alle drei Kondensatoren ineinander; von da ab biegt die Kurve für den großen Kondensator ab und mündet bei $\Delta E_{max} = 5000$ V in die Ordinatenachse. Die Spannungskurven für den kleinen Kondensator und die ungeschützte Maschine steigen noch weiter und trennen sich erst bei $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Jetzt beginnt die Kurve für die Überspannungen des kleinen Kondensators sich abzulösen und bei 18280 V auf der Ordinatenachse zu endigen. Die Spannungskurve für die ungeschützte Maschine steigt noch weiter bis auf 31600 Volt.

Wir ziehen aus der Betrachtung der Fig. 4 folgenden Schluß:

Ein der Maschine parallel geschalteter Kondensator vermindert nicht immer die Ausschaltspannung. Er tut es nur dann, wenn die Abschaltung des Stromes genügend rasch vor sich geht. Und zwar muß sie sehr viel kürzere Zeit erfordern als eine Schwingung des aus Kondensator und Maschine gebildeten Kreises. In diesem Falle kann die Abschaltung als plötzlich angesehen werden. Die gesamte magnetische Energie des Ankers wird vom Kondensator aufgenommen.

Soll ein Kondensator daher ein wirklicher und nicht nur ein vermeintlicher Schutz sein, so muß er die durch 3) angegebene Größe haben.

Digitized by Google

5. Erweiterung. Unsere Ausführungen gelten zunächst nur für geradlinige Ausschaltkurven. Die wirklichen Ausschaltkurven sind im allgemeinen nicht geradlinig. Es ist möglich, daß es Ausschaltkurven gibt, bei denen sich auch ein kleinerer Kondensator, als Formel 3) ihn fordert, als nützlich erweist. Es lassen sich aber andererseits auch Ausschaltkurven angeben, bei denen ein solcher Kondensator geradezu schadet. Die erste Aussage wird man ohne weiteres glauben. Die zweite will ich beweisen.

Wir teilen die als groß angenommene Abschaltzeit in gleiche Intervalle. Jedes Intervall soll groß gegen die Schwingungsdauer T_g der mit einem zu kleinen Kondensator geschützten Maschine sein. Die Intervalle sind dann erst recht groß gegen die Schwingungsdauer T_u der ungeschützten Maschine. Nun sei noch angenommen, daß das Intervall gerade gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Schwingungsdauer T_u und gleich einem ungeradzahligen Vielfachen der halben Schwingungsdauer T_g sei. Durch passende Verfügung über die Größe des Schutzkondensators läßt sich diese Annahme verwirklichen. Wir stellen uns nun eine Ausschaltkurve dadurch her, daß wir zwischen den Intervallen gerade aneinanderstoßende Linien ziehen. Deren Neigung ist gleichgültig. Für jedes abgesteckte Intervall gelten nun die Rechnungen des Abschnittes 3. Während des ersten Intervalles ist die maximale Spannung gleich $E + L\Delta J\frac{\omega_u}{\pi\lambda_u}$ oder gleich $E + L\Delta J\frac{\omega_g}{\pi\lambda_g}$. Der Index u bezieht sich auf die ungeschützte, der Index g auf die geschützte Maschine. Am Ende des ersten Intervalls hat der Augenblickswert der Spannung (Formel 29) bei der ungeschützten Maschine gerade den Wert E. Würde sich daher nach dem ersten Intervall der Strom J nicht weiter ändern, so bliebe am Kondensator die Spannung dauernd E. Bei der geschützten Maschine dagegen hat am Ende des ersten Intervalls die Spannung den Wert $E + L\Delta J\frac{\omega_g}{\pi\lambda_g}$. Würde sich der Strom bei der geschützten Maschine nach dem ersten Intervall nicht ändern, sondern konstant bleiben, so würde die Kondensatorspannung sich von nun an gemäß dem Ausdruck $E + L\Delta J_1\frac{\omega_g}{\pi\lambda_g}\sin\omega_g t$ ändern. Im zweiten Intervalle ist bei der ungeschützten Maschine die maximale Spannung $E + L\Delta J_2\frac{\omega_u}{\pi\lambda_u}$. Bei der geschützten Maschine dagegen ist sie größer gleich $E + L\Delta J_1\frac{\omega_g}{\pi\lambda_g} + L\Delta J_2\frac{\omega_g}{\pi\lambda_g}$ usf. Man sieht, daß bei einer so gebildeten Ausschaltkurve die maximale Spannung bei der ungeschützten Maschine kleiner ausfallen wird als bei der mit einem Kondensator geschützten Maschine.

Die in Fig. 5 konstruierte Ausschaltkurve liegt zwar im Bereiche der Möglichkeit. Sie ist aber keine wahrscheinliche Ausschaltkurve. Wollte man das Ausschalteproblem in seiner Allgemeinheit anfassen, so müßte man erst die Frage nach den wahrscheinlichen Ausschaltkurven beantworten[1]). Ich gehe indessen hierauf nicht weiter ein, da der Glaube an den Nutzen eines Kondensators, der kleiner als nach Vorschrift 3) bemessen ist, bereits durch das Mitgeteilte genügend stark erschüttert sein dürfte.

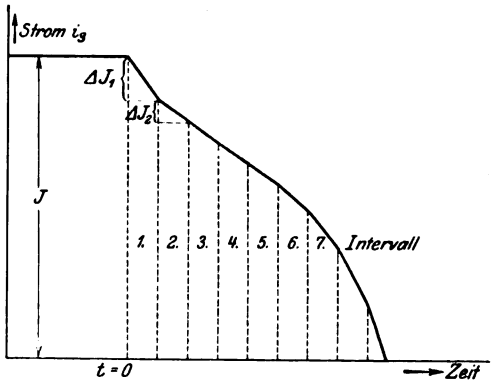


Fig. 5. Ausschaltkurve.

[1]) Ich verweise auf die Arbeit von E. Philippi: „Über Ausschaltvorgänge und magnetische Funkenlöschung", Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes 1909, S. 469 u. flgde. Für die oben angeschnittene Frage kommt zwar nur der Abschnitt 3b) in Betracht. Doch enthält die Arbeit viele verwandte wertvolle Betrachtungen und Untersuchungen über das Ausschaltproblem.

Digitized by Google

Die Erfahrung lehrt, daß man ungeschützte Drosselspulen viele Male ausschalten kann, ohne daß sie durchschlagen. Unsere Fig. 4 gibt die Erklärung. Erfolgt die Abschaltung „genügend langsam", so schlägt die Spule nicht durch. „Genügend langsam" heißt in diesem Falle, die Ausschaltzeit muß größer sein als die Schwingungszeit aus Spule und einen ihr parallel geschalteten nach 3) bemessenen Kondensator. Sobald die Abschaltung rasch genug erfolgt, schlägt die Spule durch.

Beim Abschalten einer Induktivität wird man daher Schalter, die eine langsame Unterbrechung begünstigen, vorziehen. Schnappschalter sind, wie die Praxis bereits längst herausgefunden hat, ganz zu verwerfen. Es wäre lohnend, für eine Reihe gebräuchlicher Schalter durch den Versuch Ausschaltkurven aufzunehmen und ihre Spannungen mit der vorgetragenen Theorie zu vergleichen.

Grundlagen zur Konstruktion eines neuen Durchführungsisolators.

Von

Adolf Bolliger, Zürich.

Im 8. und 9. Hefte, Jahrg. 1914 dieser Zeitschr., erschien die Arbeit über Hochspannungsisolatoren von Karl Kuhlmann, zu deren Mitarbeit ich herangezogen worden war. Damals faßte ich die Ideen, welche mich kurz darauf zur Konstruktion des in dieser Schrift besprochenen Durchführungsisolators geführt haben. Die Konstruktion von Kraftlinienbildern läßt leicht die unzweckmäßige Verteilung des Feldes bei den bestehenden Durchführungsisolatoren erkennen, ist aber auch imstande, die der günstigsten Potentialverteilung entsprechenden Leiterformen zu finden. Daß hierfür den graphischen Methoden gegenüber den analytischen Methoden der Vorzug zu geben ist, dürfte zum Beispiel der Vergleich von Fig. 1 vorliegender Arbeit mit Fig. 3 der seitdem von J. Spielrein erschienenen Abhandlung (3. Heft, Jahrg. 1915 dieser Zeitschr.) zeigen. Spielrein hat dort versucht, eine Luftdurchführung mit möglichst konstanter Feldstärke zu konstruieren. Er hat für das Verhältnis der Radien an der weitesten und engsten Stelle seines Hochspannungsbolzens, welches für die günstigsten Leiterformen eine Konfigurationskonstante darstellt, den Wert 4 erhalten, während meine Fig. 1 und 2 den Wert 1,6 ergeben. Die entsprechende Abänderung meines Kraftlinienbildes (Fig. 2) auf die von Spielrein ermittelten Leiterformen würde zeigen, daß bei jener Durchführung am Wulste des Hochspannungsbolzens und am innern Rande der Niederspannungsfassung relativ hohe Feldstärken auftreten würden. Um die richtige Potentialverteilung im Innern des Isolators zu erreichen, muß man auch das Verhalten des Feldes in der Umgebung desselben betrachten. Das Kraft- bzw. $\mathfrak{D}$-Linienbild dieser Schrift ist nach dem in der Kuhlmannschen Arbeit angegebenen Verfahren gezeichnet worden und entspricht — wie dies übrigens auch bei den dortigen Bildern der Fall ist — rotationsförmigen Leitern. Spielrein hat dies in seiner Arbeit

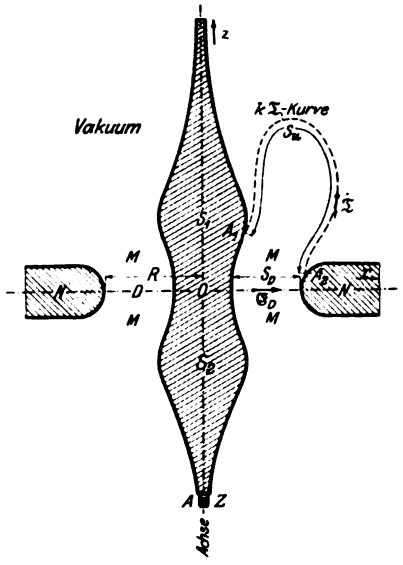


Fig. 1.

Digitized by Google

für die Kuhlmannschen Bilder bestritten und dieselben als sogenannte „ebene" Bilder ausgegeben. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß dem nicht so ist; denn für ebene Bilder ist bekanntlich das Verhältnis der Länge ds zur Breite db für alle Vierecke konstant, wenn man nur Niveaulinien mit gleichen Potentialunterschieden und Flußröhren mit gleichen Verschiebungsmengen betrachtet. Der Beweis dafür ist übrigens sehr leicht zu erbringen. Die zweite Gleichung auf Seite 209 von Kuhlmanns Arbeit und dessen Kraftlinienbilder belehren uns aber vom Gegenteil. Bei näherer Betrachtung erkennt man, daß das Verhältnis $\lambda = \frac{ds}{db}$ der Viereckseiten proportional dem Abstand r von der Bolzenachse ist, wie dies bei Bildern in den Meridianebenen von rotationsförmigen Feldern der Fall ist.

Konstruktionsprinzipien für den Isolator.

Für die Konstruktion eines guten Isolators sind die folgenden drei Einzelaufgaben zu lösen:

I. Bestimmung zweckmäßiger Leiterformen.
II. Bestimmung der Form des Isolatorkörpers unter Berücksichtigung eines geeigneten Isolationsmaterials.
III. Sicherung des Isolators gegen betriebsstörende, äußere Einflüsse.

Zu Aufgabe I. Um den Begriff: „Was sind zweckmäßige Leiterformen" fassen zu können, denken wir uns zwischen der Hochspannungsleitung und der Niederspannungsfassung den leeren Raum. Wir sehen also vollständig ab von der höheren Dielektrizitätskonstanten des Isolatorkörpers. Die Leiterformen nehmen wir in bezug auf die Durchführungsstelle D (vgl. Fig. 1) symmetrisch an. Bezeichnen dann $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$ den maximalen und den minimalen Wert von $\mathfrak{E}_D$ an der Durchführungsstelle D, so definieren wir solche Leiter als zweckmäßig, für welche die Größe

$$U = \frac{\mathfrak{E}_{max} - \mathfrak{E}_{min}}{\mathfrak{E}_{max} + \mathfrak{E}_{min}}\ ^{1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1)$$

für eine bestimmte Potentialdifferenz der Leiter zu einem Minimum wird. U soll Ungleichförmigkeitsgrad der Feldstärke $\mathfrak{E}_D$ heißen.

Je kleiner U ist, um so mehr nähern wir uns dem Idealfalle, wo die Feldstärke $\mathfrak{E}_D$ in der ganzen Durchführungsstelle gleich groß ist. Es bedarf wohl keiner nähern Begründung, warum die vollständige Erreichung dieses Zieles unmöglich ist; hingegen ist leicht einzusehen, daß es für U einen mathematischen Minimalwert gibt.

Leider steht U mit den Leiterformen in so komplizierter Abhängigkeit, daß die praktische Ausführung des hier vorliegenden Variationsproblemes rein ausgeschlossen ist. Für die Ermittlung der günstigsten Leiterformen bleibt schließlich nur der Weg des Probierens, den der Verfasser auch eingeschlagen hat. Das Probieren besteht hier darin, daß zu angenommenen Leiterformen jeweilen das ganze Kraftlinienbild konstruiert wird und unter möglichst vielen Fällen der günstigste Fall herausgegriffen wird. Der Verfasser hat so die Leiterformen, wie sie die Fig. 1 und 2 zeigen, gefunden.

Fig. 2 enthält das zu den ermittelten Leiterformen gehörende Vakuumfeld. Man erkennt daran, daß die Niveaulinien in der Gegend der Durchführungsstelle D nahezu äquidistant sind; das heißt, daß die Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Mittelteile M des Isolators praktisch konstant ist.

---

[1]) Wenn man ganz genau verfahren wollte, so müßten in der Bedingungsgleichung für die günstigsten Leiterformen auch die Feldstärken außerhalb der Durchführungsstelle D in Betracht gezogen werden. An Stelle der Gleichung 1) würde ein Gesetz treten, das die weitere Untersuchung wesentlich erschweren und ein nur wenig verändertes Resultat ergeben würde.

Digitized by Google

Der Hochspannungsleiter L_1 ist zu einer eingeschnürten Doppelspindel ausgebildet, und die Niederspannungsfassung ist scheibenförmig und wird gegen innen ungefähr kreisringförmig begrenzt. Die Feldstärke erreicht ihren Maximalwert nicht an der Durchführungsstelle D, sondern — was besser ist — am äußern Rande der beiden Spindelköpfe S_1 und S_2; denn der Weg der dort beginnenden Kraftlinien ist länger als der Kraftlinienweg in der Durchführungsstelle D.

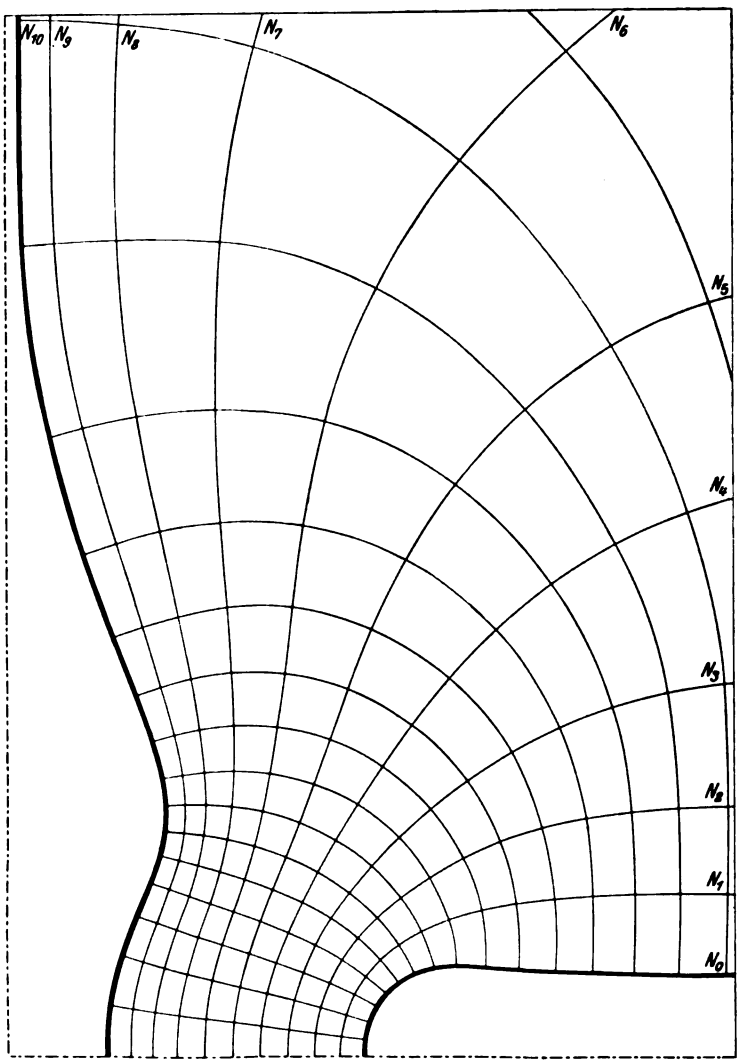


Fig. 2. Meridianschnitt durch das Vakuumfeld.

Zu Aufgabe II. Für die Sicherheit des Isolators gegen Überschlag ist eine längs der Oberfläche des Isolatorkörpers überall gleichbleibende Tangentialfeldstärke das günstigste, weil dann jeder Punkt der Oberfläche mit der zulässigen Überschlagsfestigkeit beansprucht werden kann. Um einen Isolatorkörper zu konstruieren, der dieser Bedingung näherungsweise entspricht, betrachten wir im nächsten Abschnitte Kurven konstanter Tangentialfeldstärke.

Digitized by Google

Kurven konstanter Tangentialfeldstärke.

(k·𝔗-Kurven.)

In irgendeiner Fläche (K-Fläche), die von einer Kraft- bzw. 𝔇-Linie nirgends geschnitten wird, also aus lauter Kraft- bzw. 𝔇-Linien besteht, kann man Kurven konstanter Tangentialfeldstärke (k·𝔗-Kurven) betrachten. Eine solche Fläche bilden z. B. alle Kraft- bzw. 𝔇-Linien, welche durch irgendeine Niveaulinie des Feldes gehen.

Die Ermittlung der k·𝔗-Kurven ist unter der Voraussetzung möglich, daß die Potentialverteilung des Feldes längs der ganzen K-Fläche bekannt ist.

Für die analytische Untersuchung beschränken wir uns auf den Fall ebener Kurven. Wir nehmen also an, daß das vorliegende Feld einen oder mehrere ebene Schnitte senkrecht zu allen getroffenen Niveaulinien zuläßt und bestimmen dann den Verlauf der k·𝔗-Kurven in derartigen Schnittflächen. Für die sog. „ebenen Feldverteilungen", denen das sog. Logarithmische Potential, das nur von zwei zu der Ebene parallelen Koordinaten abhängig ist, zugrunde liegt, wird deshalb z. B. die Aufgabe vollständig gelöst.

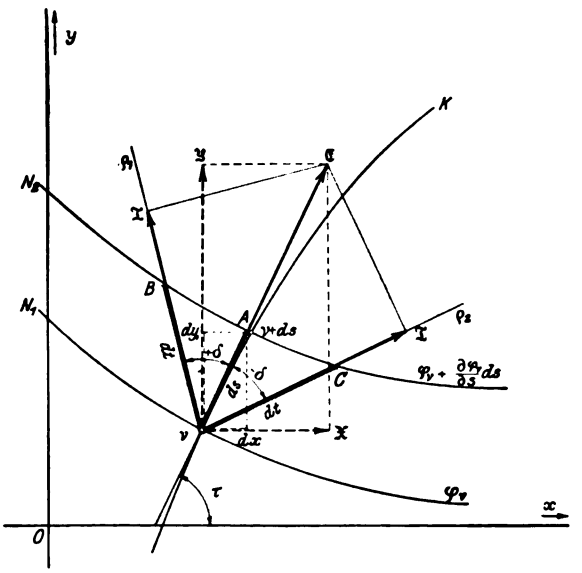


Fig. 3.

Wir beziehen in unserer K-Ebene alles auf rechtwinklige, geradlinige Koordinaten (x, y). Bezeichnet $\varphi(x, y)$ oder kürzer φ das Potential längs dieser Ebene und Φ einen konstanten Parameter, so kann die Schar der Niveaulinien in der K-Ebene durch die folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\varphi(x, y) = \Phi. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Die Kraftlinien bilden dazu die Schar der orthogonalen Trajektorien.

Bedeuten in Fig. 3 $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die x- und y-Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und dx und dy die x- und y-Komponenten des Linienelementes ds der Kraftlinie K im Punkte ν, so gilt nach der Abbildung die Beziehung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

und dies ist die Differentialgleichung der Kraftlinien.

In jedem Punkte ν gibt es zwei Richtungen ϱ_1 und ϱ_2, die mit der Kraftlinie K entgegengesetzt gleiche Winkel $+\delta$ und $-\delta$ einschließen, für welche die Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{E}$ die Größe $\mathfrak{T}$ haben, so lange

$$|\mathfrak{T}| < |\mathfrak{E}| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

Um die Differentialgleichung der k·𝔗-Kurven ableiten zu können, muß berücksichtigt werden, daß in der Differentialgleichung 3) der Kraftlinien

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Digitized by Google

ist, und man erhält deshalb die Differentialgleichung der k·$\mathfrak{T}$-Kurven, wenn man τ durch $\bar{\tau} = \tau + \delta$ ersetzt. Es ist dann:

$$\operatorname{tg}\bar{\tau} = \operatorname{tg}(\tau \pm \delta) = \frac{\operatorname{tg}\tau \pm \operatorname{tg}\delta}{1 \mp \operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Um tg δ berechnen zu können, wenden wir das Gesetz

$$\oint \mathfrak{E}_s \, ds = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

auf das Dreieck ABν der Fig. (3) an. Es folgt dann, wenn ds den Normalabstand und dt die Länge der Strecken in den Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 zwischen den Niveaulinien N_1 und N_2 an der Stelle ν bedeuten:

$$\cos\delta = \frac{ds}{dt} = \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{E}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{T}^2}}{\mathfrak{T}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Unter Berücksichtigung von 3), 5) und 9) folgt aus 6) die Differentialgleichung der Kurven konstanter Tangentialfeldstärke zu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{T}^2}}{\mathfrak{T}\mathfrak{x} \mp \mathfrak{y}\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{T}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Hierin sind $\mathfrak{T}$ die konstant anzunehmende Tangentialfeldstärke und $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die x- und y-Komponenten der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, die man aus dem Potentiale φ durch die folgenden Differentiationen nach den Koordinatenrichtungen erhält:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} \\ \mathfrak{y} &= -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Durch Integration der Gl. 10) erhält man, je nachdem man dort die obern oder untern Vorzeichen verwendet, die eine oder andere der beiden k·$\mathfrak{T}$-Kurvenscharen. Die Größe $\mathfrak{T}$ übernimmt dabei die Rolle des Kurvenparameters.

Anwendungsbeispiel. k·$\mathfrak{T}$-Kurven in einer Meridianebene des Feldes eines unendlich langen, geradlinigen, linearen Leiters. Wir legen den geradlinigen Drahtleiter in die y-Achse unseres rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y). Dann ist:

$$\varphi = c \lg \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

und nach 11):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= +\frac{c}{x} \\ \mathfrak{y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Also lautet für diesen Fall Gl. 10):

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{T}^2}}{\mathfrak{T}} = \pm\frac{\sqrt{c^2 - (\mathfrak{T}x)^2}}{\mathfrak{T}x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

woraus durch Separation der Variabeln und Integration folgt:

$$y = +\frac{c}{\mathfrak{T}}\int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{T}}{c}x\right)^2}}{x}\, dx + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

Digitized by Google

Durch die Konstante C_1 wird offenbar nur der Anfangspunkt des Koordinatensystems festgelegt; da sich aber das Potential φ [Gl. 12)] in der y-Richtung überhaupt nicht ändert, kann man mit Vorteil

$$C_1 = 0$$

setzen.

Nach Ausführung der Integration in Gl. 15) ergibt sich für y das Resultat:

$$y = \pm \frac{c}{\mathfrak{T}} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - (\mathfrak{T}x)^2}}{c} + \lg n \frac{c - \sqrt{c^2 - (\mathfrak{T}x)^2}}{\mathfrak{T}x} \right\} \quad \ldots\ldots 16)$$

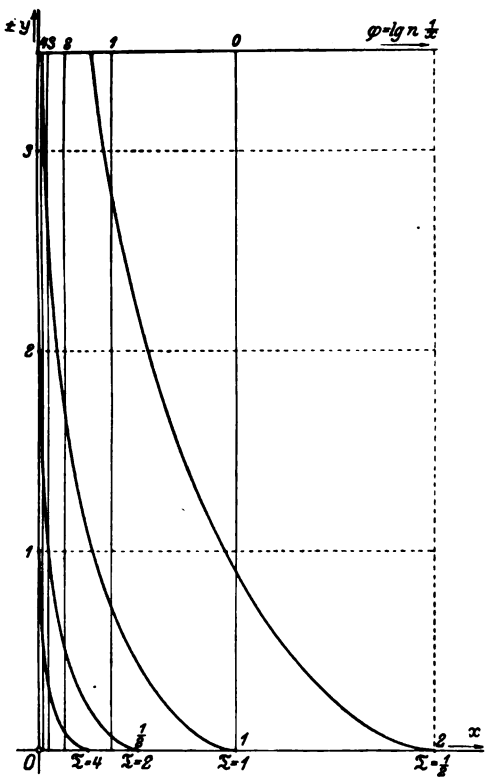


Fig. 4.

Das Resultat Gl. 16) wird in Fig. 4 graphisch veranschaulicht. Man erkennt sowohl aus der Formel, wie auch aus der Abbildung, daß für $x = 0$ alle $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven eine Singularität besitzen, und zwar werden dort alle Werte von y logarithmisch unendlich. Die Leiterachse ist Asymptote für die Kurven. Der Grund liegt darin, daß am Leiter das Potential von unendlich großen Werten auf endliche Beträge fällt. Um diese Potentialdifferenz mit der endlichen Feldstärke $\mathfrak{T}$ zu leisten, muß längs des Leiters ein unendlich großer Weg durchlaufen werden.

Für

$$x = \frac{c}{\mathfrak{T}} \quad \ldots\ldots 17)$$

enden die Kurven. Darüber hinaus ist nämlich die Feldstärke $\mathfrak{E}$ kleiner als die vorgeschriebene Tangentialfeldstärke $\mathfrak{T}$, d. h. die Werte y der Gl. 16) werden imaginär. In den Endpunkten der Kurven ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{T}$, und die Kurventangenten stehen senkrecht auf den Niveaulinien [1]).

Aus dem Besprochenen und aus der Fig. 4 gehen deutlich die Eigenschaften hervor, welche den $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven im allgemeinen zukommen, und deren Verständnis für die Anwendung auf die Isolatorenkonstruktion nötig ist.

Graphische Näherungsmethode. Ist die Potentialverteilung nicht durch ein analytisches Gesetz, sondern durch die Angabe möglichst vieler Niveaulinien mit der konstanten Spannungsdifferenz $\Delta\varphi$ festgelegt, so kann der Verlauf der $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven näherungsweise auf graphischem Wege ermittelt werden. Wir nehmen zu diesem Zwecke das an der Stelle ν zwischen zwei benachbarten Niveaulinien liegende $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurvenstück von der Länge Δt als geradlinig an. Ist dann $\mathfrak{T}$ die konstant angenommene Tangentialfeldstärke, so muß sein:

$$\mathfrak{T} \cdot \Delta t = \Delta\varphi,$$

[1]) Das bei den Isolatoren vorkommende Potential nähert sich in der Umgebung des Hochspannungsbolzens mehr oder weniger dem in diesem Abschnitt besprochenen Potential des linearen Leiters. Die $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven müssen deshalb dort einen ähnlichen Verlauf haben wie in Fig. 4. Es erklärt sich hieraus der Vorteil der von der Firma Brown-Boveri & Cie. eingeführten konkaven Isolatorform gegenüber der früher allgemein üblichen konvexen Form.

Digitized by Google

d. h. $$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\mathfrak{T}} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

Die nach Gl. 18) berechnete Strecke kann man also leicht zwischen den Niveaulinien mit dem Zirkel in stetiger Aneinanderreihung abtragen. Der ungefähre Verlauf der $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven ergibt sich dann in Form von Polygonzügen. Die so gewonnenen Kurven werden bei exaktem Konstruieren um so genauer den wahren $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven entsprechen, je kleiner die Potentialdifferenz $\Delta \varphi$ gewählt wird.

Konstruktion des Isolatorkörpers.

Die Form des einer konstanten Tangentialfeldstärke entsprechenden Isolatorkörpers läßt sich mit Hilfe der $k \cdot \mathfrak{T}$-Kurven des leeren Raumes unter der Voraussetzung von relativ dünnen Isolatormänteln näherungsweise finden. Ein durch solche Kurven begrenzter Isolatorkörper besitzt im definitiven Isolatorfelde eine ungefähr konstante Tangentialfeldstärke.

Jeder Durchführungsisolator muß so gebaut sein, daß seine Durchschlagsfestigkeit größer ist als seine Sicherheit für das Auftreten von Gleitfunken. Für einen „Luftisolator", auf dessen genauere Untersuchung wir uns in dieser Schrift beschränken wollen, erweisen sich die folgenden Sicherheitskoeffizienten als zweckmäßig:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sicherheitskoeffizient gegen Durchschlag} = 3\\ \text{Sicherheitskoeffizient gegen Überschlag} = 2\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

Nun besitzt aber die atmosphärische Luft eine Durchschlagsfestigkeit von maximal 30 000 V/cm und erträgt längs Porzellan eine Tangentialfeldstärke von mindestens 4000 V/cm[1]). Daher kann man einen Luftisolator so bauen, daß er entsprechend den Sicherheitskoeffizienten [Gl. 19)] an der Durchführungsstelle D mit einer Feldstärke:

$$\mathfrak{E}_D = 10\,000 \text{ V/cm} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

und längs des Porzellanisolators mit der Tangentialfeldstärke

$$\mathfrak{T} = 2000 \text{ V/cm} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

beansprucht wird.

Bezeichnet E die ganze Spannungsdifferenz des Isolators, S_D den totalen Durchschlagsweg (vgl. Fig. 1) und S_U den totalen Überschlagsweg, so gilt der Annahmen von konstanten Feldstärken $\mathfrak{E}_D$ und $\mathfrak{T}$ wegen

$$\mathfrak{E}_D \cdot S_D = \mathfrak{T} \cdot S_U = E, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22)$$

woraus:

$$S_U = S_D \cdot \frac{\mathfrak{E}_D}{\mathfrak{T}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

Wenn nun im Kraftlinienbild $(n - 1)$ Niveaulinien eingezeichnet sind, so folgt für die Strecke Δt der Formel 18)

$$\Delta t = \frac{S_U}{n} = \frac{S_D}{n} \cdot \frac{\mathfrak{E}_D}{\mathfrak{T}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 24)$$

Wenn $n = 10$ gewählt wird, wie es in Fig. 2 der Fall ist, so gilt nach Gl. 20), 21) und 23) für die Konstruktion eines Porzellanisolatorkörpers:

$$S_U = 5\, S_D \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 25)$$

[1]) Ich beabsichtige, hauptsächlich die Form- und nicht die Materialfrage der Isolatoren zu erledigen. Als Material für den Isolatorkörper soll deshalb für die Berechnungen in dieser Schrift das manchen andern Stoffen punkto Qualität nachstehende, seiner leichten Formbarkeit und Billigkeit wegen aber sonst viel gebräuchliche Porzellan vorgezogen werden.

Digitized by Google

und also: $$\Delta t = \frac{S_D}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 26)$$

Mit dem so gefundenen Werte Δt denken wir uns im Vakuumfelde (Fig. 2) aus beiden k·$\mathfrak{T}$-Scharen beliebig viele Kurven, die gleichmäßig über das Feld verteilt sein mögen, konstruiert. Alle diese Kurven besitzen die gleiche Gesamtlänge S_U und die gleiche konstante Tangentialfeldstärke $\mathfrak{T}$; sie sind einander also in elektrischer Hinsicht vollständig äquivalent. Wir können darunter irgendeine Kurve zur Festlegung der äußern Begrenzung des Isolatorkörpers wählen.

Behufs Raumersparnis in Kästen von Transformatoren, Ölschaltern usw. ist ein Isolator von möglichst kleinen Dimensionen von Vorteil. Der Verfasser hat sich deshalb für eine k·$\mathfrak{T}$-Kurve entschieden, wie sie Fig. 1 zeigt. Diese Kurve entfernt sich an der Niederspannungsfassung N beginnend vom Mittelteile M des Isolators, kehrt dann aber im Verlaufe zur Hochspannungsfassung hin wieder gegen diesen zurück. Die Wahl wurde noch durch den glücklichen Umstand begünstigt, daß diese Kurve die Hochspannungsleitung nicht an einer ihrer engen, sondern an ihrer weitesten Stelle, nämlich an der äußern Begrenzung des Spindelkopfes S trifft.

Der neue Isolator wird deshalb an der Hochspannungsfassung bei weitem weniger beansprucht als die gewöhnlichen Durchführungsisolatoren mit ihren engen Fassungen.

Unter anderem wurde vom Verfasser auch Wert darauf gelegt, den Isolatorkörper im generellen tangential an die Leiter heranzuführen, wodurch die Tangentialfeldstärke längs des Isolatormantels an den Fassungsstellen bis auf jeden gewünschten Kleinheitsgrad gebracht werden kann. Darüber gibt auch das Beispiel des vorigen Abschnittes näheren Aufschluß. An dem dort vorkommenden linearen Leiter ist die Feldstärke sogar unendlich groß und die k·T-Kurven laufen deshalb genau tangential in ihn ein.

Hilfssätze aus der Potentialtheorie.

Wir betrachten das elektrostatische Feld eines Leitersystemes Λ, das aus den beliebig gestalteten, in fester Konfiguration zueinander stehenden Konduktoren K_1, K_2, $K_3 \ldots K_n$ bestehen möge, im freien Äther. Jeden Konduktor denken wir uns durch eine kapazitätslose Leitung mit einer unendlichfernen Elektrizitätsquelle von konstantem Potentiale verbunden.

Die Potentialfunktion φ_I unseres Systemes besitzt dann an den einzelnen Konduktoren Leiterpotentiale Φ_1, Φ_2, $\Phi_3 \ldots \Phi_n$, die durch elektrostatische Influenz nicht geändert werden können.

Nun werde vom Unendlichen her ein neuer Konduktor K mit der Gesamtmasse Null in unser Feld eingeführt. Die nunmehr existierende Potentialfunktion φ_{II} besitzt dann am eingeführten Konduktor K einen gewissen konstanten Randwert C, den wir abgrenzen wollen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz:

$$\psi = \varphi_I - \varphi_{II} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 27)$$

Auf Grund der Eigenschaften von φ_I und φ_{II} ist ψ eine Potentialfunktion mit den Randwerten o an allen Konduktoren des Systemes Λ und vom Betrage

$$\Psi = \Phi - C \quad \ldots \ldots \quad 28)$$

am Konduktor K, wobei Φ die Potentialverteilung des ursprünglichen Feldes φ_I an K bedeutet.

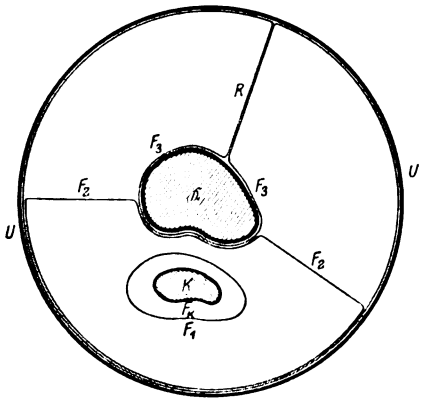


Fig. 5.

Für alle Untersuchungen betreffend der Funktion ψ repräsentiert das Leitersystem Λ einen einzigen geerdeten Leiter $\mathfrak{K}$; denn wir können uns dafür die einzelnen Konduktoren durch Drähte verbunden denken.

Da die Gesamtmasse auf K gleich Null ist, verschwindet das Oberflächenintegral der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ über jeder Fläche, die K ganz umschließt. Es ist also:

$$J = \int_{(F)} \mathfrak{E}_n \, df = o \quad \ldots \ldots \quad 29)$$

Dies gilt z. B. für die Flächen F_1, F_2 und F_3 der Fig. 5. U bedeutet in jener Abbildung die unendlichferne Kugel. F_3 umschließt also den ganzen Raum zwischen $\mathfrak{K}$ und U.

Digitized by Google

Als Verbindung der Oberflächen von $\mathfrak{K}$ und U ist der unendlich dünne, röhrenförmige Mantel R übrig geblieben. Über diesen verschwindet, wie leicht einzusehen ist, der Integralanteil von J. Die restierende Integrationsfläche $F_{\mathfrak{K}} + U$ wollen wir durch Einführung der Bezeichnung $F_{\mathfrak{K},U}$ zusammenfassen. Da sowohl an $F_{\mathfrak{K}}$, wie auch an U $\mathfrak{E}_n$ mit $\mathfrak{E}$ selber identisch ist, kann man für Gl. 29) setzen:

$$J = \int_{F_{\mathfrak{K},U}} \mathfrak{E}\, df = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

Da $\mathfrak{E}$ an $F_{\mathfrak{K}}$ nicht Null ist, folgt aus Gl. 30) mit Notwendigkeit, daß $\mathfrak{E}$ an $F_{\mathfrak{K},U}$ teils positiv und teils negativ sein muß. Da aber das Potential ψ auf $F_{\mathfrak{K},U}$ allenthalben Null ist, gilt der Satz:

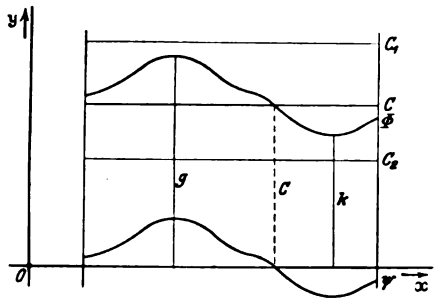


Fig. 6.

Satz I. Das Potential irgendwelcher Massen mit der Summe Null, die außerhalb eines geerdeten Konduktors beliebig verteilt sind, ist teils positiv und teils negativ.

Nach einem bekannten Satze aus der Potentialtheorie [1]) liegen die Extremalwerte eines Potentiales am Rande des Regularitätsgebietes, wofür $F_{\mathfrak{K},U}$ und die Oberfläche von K in Betracht kommen [1]). Auf Grund von Satz I gibt es aber mindestens einen positiven und einen negativen Extremalwert und diese können unmöglich auf $F_{\mathfrak{K},U}$ liegen, weil dort ψ überall verschwindet.

Die Konsequenz ist: Die positiven und die negativen Extremalwerte des Potentiales ψ liegen alle an K.

Daraus resultiert aber des stetigen Verlaufes einer Potentialfunktion wegen für die Funktion Ψ [Gl. 28]:

Die Randfunktion Ψ ist teils positiv und teils negativ.

Nach Gl. 28) ist:

$$C = \Phi - \Psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

Bezeichnet g den größten und k den kleinsten Wert von Φ, so erkennt man an Hand von Fig. 6, daß für jeden Fall, wo Ψ teilweise positiv und teilweise negativ ist, die Ungleichung bestehen muß:

$$k < C < g, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

was in Worten ausgedrückt lautet:

Satz II. Bringt man irgendeinen ungeladenen Konduktor K in das statische Feld eines Systems von Leitern (A), deren Potentiale durch äußere Elektrizitätsquellen konstant gehalten werden, so liegt das entstehende konstante Leiterpotential C von K zwischen dem maximalen und minimalen Potentialwerte des ursprünglichen Feldes an der Oberfläche von K.

Zusatz: Das Leiterpotential C ist also ein gewisser Mittelwert der Randwerte Φ des ursprünglichen Feldes an der Oberfläche von K.

Potentialregulatoren.

Aus dem Konduktor K des vorigen Abschnittes kann man durch einen Grenzübergang eine leitende Fläche λ erhalten. Auf einer solchen Fläche λ ist dann nirgends elektrische Dichte vorhanden, wenn sie sich vollständig mit einer Niveaufläche des ursprünglichen Feldes φ_I deckt. In jedem andern Falle kommen darauf positive und negative Belegungen η vor.

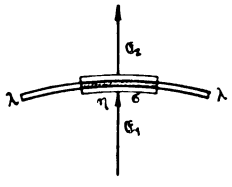


Fig. 7.

Wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf ein über dem Flächenstück σ der Fläche λ errichtetes Prisma von sehr kleiner Höhe an (vgl. Fig. 7), so erhalten wir:

$$\int_{\sigma} \mathfrak{E}_2\, d\lambda - \int_{\sigma} \mathfrak{E}_1\, d\lambda = 4\pi \int_{\sigma} \eta\, d\lambda \quad \ldots\ldots \quad 33)$$

oder also, wenn N_1 den eintretenden und N_2 den austretenden Fluß und e_σ die Elektrizitätsmenge auf σ bedeuten:

$$N_2 - N_1 = 4\pi e_\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

[1]) Vgl. C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, § 11 und § 12.

Digitized by Google

Formel 34) besagt uns, daß die auf die Fläche λ auftreffenden Flußröhren daselbst nicht eine stetige Fortsetzung finden. Erstreckt man die Integrationen der Formel 33) hingegen auf die ganze Fläche λ, so erkennt man nach Formel 34), daß der totale in λ eintretende Fluß gleich dem totalen aus λ austretenden Flusse sein muß; denn es ist:

$$e_\lambda = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

Solche leitende Flächen sind z. B. Bleche oder sonstige Leiterbelege, die als Potentialregulatoren, d. h. als Einrichtungen zur Ausgleichung von lokalen Spannungsänderungen in das Feld eingeführt werden. Stehen diese Bleche längs Niveauflächen des ursprünglichen Feldes φ_I, so werden darauf nach den vorhergehenden Betrachtungen keine elektrischen Belegungen induziert. Die Flußröhren finden durch dieselben ihre stetige Fortsetzung. Gibt man den Blechen hingegen ganz willkürliche Formen, so werden darauf bestimmte elektrische Verteilungen entstehen, und das Feld wird so deformiert, daß die Eintritts- und Austrittsstellen der Flußröhren an den Blechen gegeneinander verschoben sind.

Der Isolator (vgl. Fig. 8 und 9) ist mit einem solchen Bleche ausgestattet. Der konstante Potentialwert C, der sich nach dem Zusatze des vorigen Abschnittes darauf einstellt, ist ein Mittelwert aus den Potentialwerten des ursprünglichen Feldes φ_I längs dieses Bleches. Solange das durch das Blech hervorgerufene Superpositionsfeld gegenüber dem Feld φ_I in den Hintergrund tritt, kann mit hinreichender Geuauigkeit dieser Mittelwert durch das arithmetische Mittel aus dem maximalen und minimalen Randwerte des Potentiales φ_I am Bleche ersetzt werden.

Das verwendete Blech ist nicht längs einer Niveaufläche des Vakuumfeldes gelegt, sondern so geformt, daß die Feldstärke in der Durchführungsstelle auch nach Einführung des Isolatorkörpers nur unwesentlich geändert wurde. Im Bilde (Fig. 8) läßt sich am Verlauf der $\mathfrak{D}$-Linien, welche am Bleche B Unterbrechungen erfahren, sehr schön erkennen, daß dieses induzierte Ladungen enthält, durch welche bei der ausprobierten Leiterform die gewünschte Felddeformation erreicht ist. Zur Erhöhung der Sicherheit wird es manchmal vorteilhaft sein, statt nur ein Blech, deren mehrere zu verwenden. Der Hauptzweck dieser Bleche besteht in der Ausgleichung von Störungen, die in der Potentialverteilung auftreten können. Wenn die Potentialdifferenz zwischen Hoch- und Niederspannung gleichbleibt, sind sie immer auf irgendeinen Teil des Isolators lokalisiert und können durch diese mit andern Feldpartien in Verbindung stehenden Bleche teilweise ausgeglichen werden. Von großem Vorteile sind sie daher für die Aufrechterhaltung der Spannungsverteilung in der Durchführungsstelle und besonders längs des Isolatorkörpers.

Das $\mathfrak{D}$-Linienbild.

Die Konstruktion des $\mathfrak{D}$-Linienbildes (Fig. 8) wurde nach Annahme des Isolatorkörpers unter der Voraussetzung einer Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = 5$ für das verwendete Isolationsmaterial vorgenommen. Für die Flußröhren wurde die gleiche Verschiebungsmenge gewählt, wie im Vakuumfeld (Fig. 2).

Das $\mathfrak{D}$-Linienbild zeigt als Hauptcharakteristikum für den neuen Durchführungsisolator, daß die meisten $\mathfrak{D}$-Linien den Isolatorkörper zweimal und nicht nur einmal, wie dies bei gewöhnlichen Isolatoren der Fall ist, durchsetzen. Die Anzahl der Verschiebungsröhren ist hier größer als die Anzahl der Flußröhren im Vakuumfelde. Die Niveaulinien sind hier im Hohlraum des Isolators deshalb etwas gedrängter als an der entsprechenden Stelle dort. Immerhin ist die Äquidistanz derselben im Luftraum des Isolators fast vollständig erhalten, und sie treten auch so durch den Isolatorkörper hindurch, daß die Tangentialfeldstärke an demselben nicht stark variiert. Die vom Ver-

Digitized by Google

fasser in Abschnitt 3 gemachte Annahme der ungefähren Übereinstimmung der diesbezüglichen Eigenschaften im Vakuum- und definitiven Isolatorfelde behält also ihre Berechtigung.

An der Oberfläche des Isolatorkörpers zeigen sich recht beträchtliche Brechungen der $\mathfrak{D}$- und Niveaulinien. Bei Verwendung von Isolationsmaterialien für den Isolatorkörper, deren Dielektrizitätskonstante ε kleiner als bei Porzellan ist, würden diese Brechungen und die Abweichungen zwischen Vakuum- und $\mathfrak{D}$-Linienbild auch geringer ausfallen.

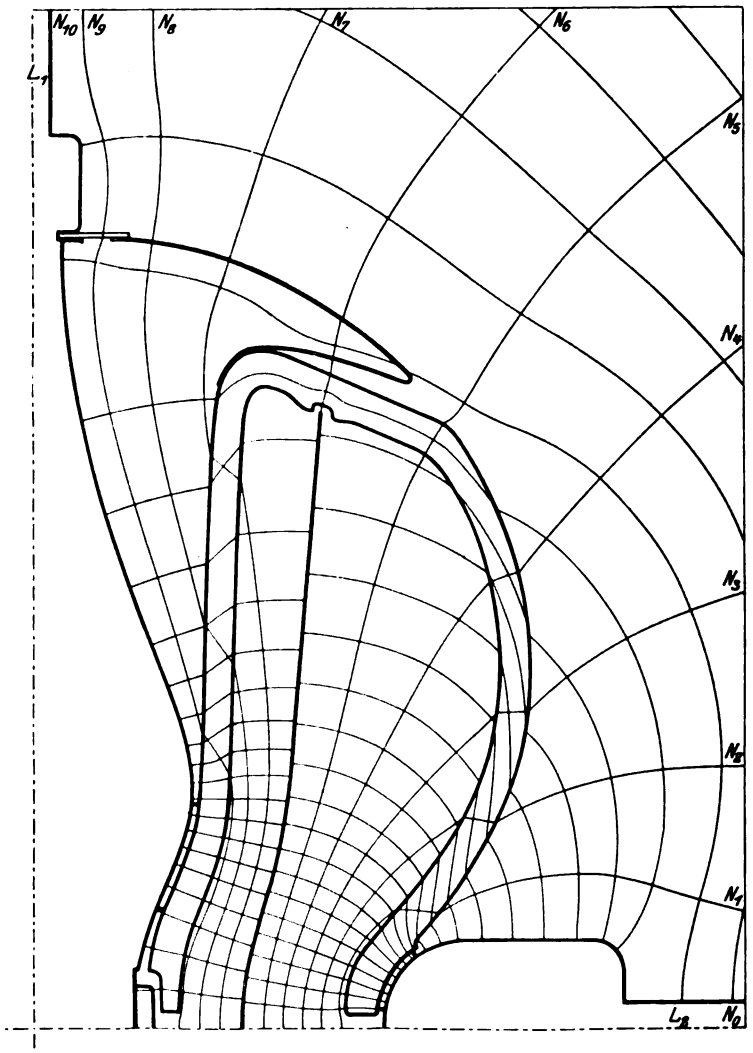


Fig. 8. Meridianschnitt durch das $\mathfrak{D}$-Linienbild des Isolators.

Zur Erhöhung der innern Isolationsfähigkeit kann selbstverständlich auch bei diesem neuen Isolatortypus Druckluft- oder Ölfüllung verwendet werden. Beim Gebrauche von Öl ($\varepsilon = 2{,}2—2{,}3$) würde die Brechung an der Innenfläche des Isolatorkörpers auch vermindert und die Potentialverteilung in der Durchführungsstelle derjenigen des Vakuumfeldes ähnlicher. Also würde die Verwendung dieser Füllungen nur zu empfehlen sein. Die diesbezügliche theoretische Untersuchung ist in dieser Schrift übergangen worden.

Digitized by Google

Zur Konstruktion des Isolators.

Der ganze Isolatorkörper besteht aus zwei Hälften, wovon die zweite zu der in den Fig. 8 und 9 gezeichneten in bezug auf die Durchführungsstelle symmetrisch liegt. Die beiden Teile werden durch eine in der Doppelspindel $S_1 S_2$ (siehe Fig. 1 und 9) zwischen den Hochspannungsfassungen verlaufende Schraube tangential gegen die Niederspannungsfassung gepreßt. Die Zweiteiligkeit des Isolatorkörpers ermöglicht die Verwendung des Isolators bei Wänden von verschiedener Dicke. Er eignet sich auch für sehr dicke Wände. Zur Erlangung einer angenähert konstanten Feldstärke in der Durchführungsstelle ist es dann doch zweckmäßig, die Einschnürung der Doppelspindel, wenn auch nur unwesentlich zu vergrößern.

Der Isolatorkörper wird am äußeren Teile mechanisch auf Druck und am innern Teile (am Trichter) auf Zug beansprucht. Die Dicke seiner Wandung ist mit Rücksicht darauf gewählt worden. Für die rein elektrische Beanspruchung wäre ein dünnerer Isolatormantel vorteilhafter.

Der Isolator hat nicht die längliche Form der gewöhnlichen Durchführungsisolatoren, sondern wird gegen außen beinahe kugelförmig begrenzt. Der Gleitfunkenweg ist nichtsdestoweniger kürzer, denn es gehört dazu auch der Weg längs des Trichters, in dessen Tiefe die Hochspannungsfassung sitzt.

Der Isolator ist in der Schrift rillenlos konstruiert; doch sei hier bemerkt, daß die Anbringung von Rillen keine Schwierigkeiten mit sich bringt. Durch die Rillen würde der Gleitfunkenweg noch wesentlich vergrößert und im Falle stärkerer Ionisationen würde das Auftreten von Überschlagsfunken erschwert. Die Rillen würden hier in irgendwelchen wulstartigen Ausbuchtungen am Isolatormantel bestehen.

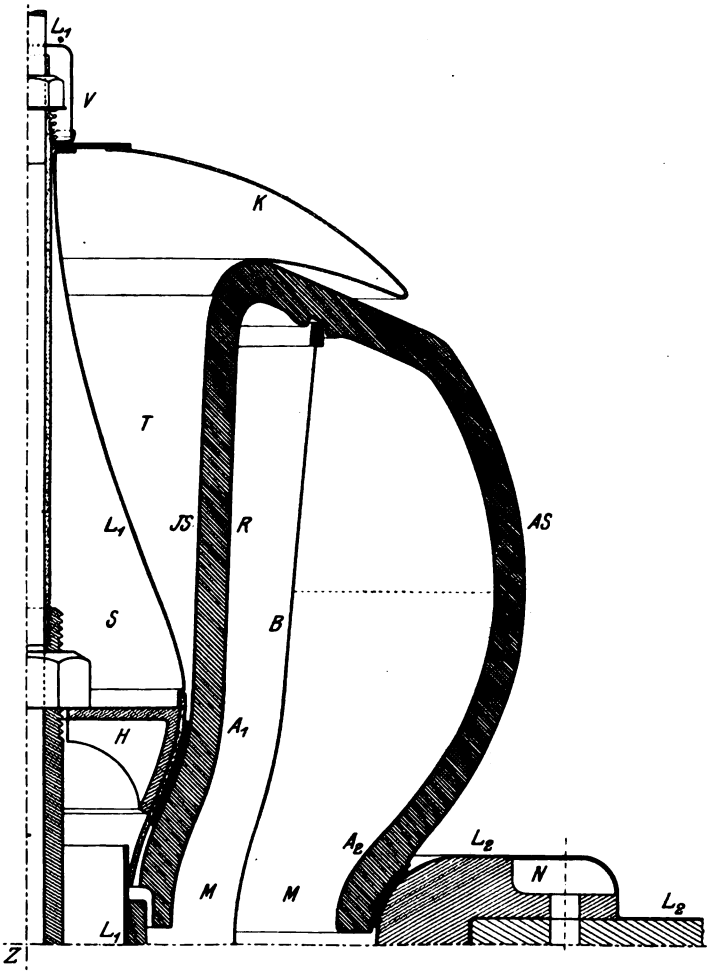


Fig. 9. Durchführungsisolator.

Um die Hochspannungsleitung ungehindert an den Isolator heranführen zu können, befindet sich der eigentliche Leitungsanschluß nicht im Zentrum der Hochspannungsfassung, sondern im Verschlusse V eines röhrenförmigen Ansatzes.

Zum Schutze der Trichter T gegen Verstaubung und das Eindringen sonstiger Fremdkörper können Schutzkappen K, wie dies in Abb. 9 erkenntlich ist, verwendet werden. An jeder solchen Schutzkappe ist die Tangentialfeldstärke in der Nähe der Hochspannungsleitung (vgl. Fig. 8) größer als längs des Isolatorkörpers. Es empfiehlt sich deshalb, dazu ein für das Entstehen von Gleitfunken noch ungünstigeres Material

Digitized by Google

als am Isolatorkörper zu verwenden. Es eignen sich dafür selbst Stoffe, die keine große mechanische Festigkeit besitzen, wie imprägniertes Papier, Gummi- und Mikapräparate. Eine zweckmäßige Abdichtung mit der Hochspannungsleitung erzielt man mit einer Glimmerplatte (siehe Fig. 8). Eine etwas einfachere, in elektrischer Hinsicht vielleicht etwas günstigere Modifikation der Schutzkappen K würde man erhalten durch Weglassen des vom Falze zurücklaufenden und auf dem Isolatorkörper aufliegenden Teiles der Kappe. Bei dieser Änderung wäre aber der Trichter T nach außen nicht mehr vollständig abgeschlossen.

Der durch diese Abhandlung eingeführte Durchführungsisolator besitzt somit, nochmals kurz zusammengefaßt, folgende charakteristische Eigenschaften:

Die Feldstärken an der Durchführungsstelle sowie längs des Isolatorkörpers sind praktisch konstant. Deshalb besitzt der Isolator eine maximale Widerstandsfähigkeit gegen Durchschlag und Überschlag bei stark reduzierten Dimensionen in radialer und axialer Richtung. Bei gleichen Sicherheitskoeffizienten verhalten sich die Längen dieses Isolators und der gewöhnlichen rund wie 1 : 2 und die Durchmesser der Niederspannungsfassungen wie 1 : $^4/_3$. Außerdem läßt das tangentiale Anlegen des Isolatorkörpers an die Leiter eine minimale Feldstärke an den Fassungsstellen zu, und die „Spannungsregulatoren" machen das Auftreten von lokalen störenden Spannungsänderungen im Isolatorfeld zum großen Teile unmöglich.

Gibt es geschlossene elektrische Kraftlinien?

Von

G. Benischke.

1. Aus der Maxwellschen Hypothese über das elektromagnetische Feld hat man die Folgerung gezogen, daß die elektrischen Kraftlinien eines Wechselstromes geschlossene Linien sind, die parallel zum Leitungsdraht verlaufen. Diese Auffassung wird öfter ausgesprochen, aber nicht zeichnerisch dargestellt, während die elektrischen Kraftlinien ruhender Ladungen oder die magnetischen Kraftlinien elektrischer Ströme sehr häufig aufgezeichnet werden. Man scheint doch noch davor zurückzuschrecken, die angeblichen geschlossenen elektrischen Kraftlinien so bestimmt darzustellen, wie es eben durch eine Zeichnung geschieht. Zum ersten Male finde ich solche in ihrem ganzen Verlauf dargestellt in dem Artikel „Zur Definition der induzierten elektromotorischen Kraft" von Herrn Rogowski in dieser Zeitschrift 4. Bd. S. 56, 1915. Dort sind in Fig. 2 die elektrischen Kraftlinien einer kreisförmigen Sekundärspule eines Transformators mit zylindrischem Eisenkern als konzentrische Kreise zu dieser Spule gezeichnet. Diese Darstellung wird dort die „heutige Vorstellung" genannt, während in Fig. 1 die „alte Vorstellung" gezeichnet ist, die sich von Fig. 2 dadurch unterscheidet, daß im Luftraum keinerlei elektrische Kraftlinien vorhanden sind.

Diese Frage ist von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie, sondern auch für die Hochspannungstechnik.

2. Zunächst möchte ich betonen, daß die „alte" Vorstellung, wie ich sie kenne, nicht darin besteht, daß es im Raum außerhalb des Leiters keine elektrischen Kräfte gibt, sondern darin, daß es elektrische Kraftlinien gibt, die Anfang und Ende haben. In diesem Falle verlaufen sie zum größten Teil zwischen Spule und Eisenkern, zum Teil aber auch zwischen Spule und anderen benachbarten Leitern oder der Erde.

Daß die elektrischen Kraftlinien statischer Ladungen keine geschlossenen Linien sind, sondern Anfang und Ende haben, dürfte wohl nicht bezweifelt werden. Sind z. B. zwei Drahtstücke a b und c d (Fig. 1) entgegengesetzt geladen, so nehmen die

Digitized by Google

Kraftlinien den angedeuteten Verlauf. Werden diese geladenen Drahtstücke durch einen Draht b c miteinander verbunden, so entsteht in diesem ein Strom, der so lange dauert, bis sich die Ladungen ausgeglichen haben. Soll man annehmen, daß während dieses Ausgleichs von dem Draht b c keine elektrischen Kraftlinien ausgehen, oder werden, während der Strom fließt, die Kraftlinien, die vorher Anfang und Ende auf a b und b c hatten, nun zu geschlossenen Linien? Man braucht diese Frage nur zu stellen, um einzusehen, daß geschlossene Kraftlinien hier unmöglich sind.

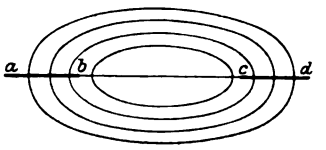


Fig. 1.

3. Es scheint, daß das Vorkommen geschlossener Kraftlinien, die parallel zum Leiter verlaufen, nur bei Wechselströmen angenommen wird. Ein Wechselstrom läßt sich aber auch bei der Anordnung der Fig. 1 leicht herstellen, wenn man a und d abwechselnd + und — ladet. Daher entsteht die Frage: verlaufen die Kraftlinien bei diesem Versuch anders, wenn nachher (nachdem der Strom null geworden ist) entgegengesetzte Ladungen wie vorher auf a und d gebracht werden? Wenn ja, woher wissen die ersten Ladungen und der Strom, der bei ihrem Ausgleich entsteht, daß nachher vielleicht noch eine entgegengesetzte Ladung mit entgegengesetzt gerichtetem Ausgleichsstrom folgen wird? Die „magnetische Verschiebung" (nach Maxwell) ist doch nicht nur bei technischen Wechselströmen oder Schwingungen, sondern bei jeder Änderung des Ladungs- oder Stromzustandes vorhanden. Wenn aber angenommen werden sollte, daß die elektrischen Kraftlinien nur bei Wechselströmen hoher Frequenz geschlossene Linien sind, so entsteht die Frage: bei welcher Frequenz werden aus den ungeschlossenen Kraftlinien, die auf der Oberfläche Anfang und Ende haben, geschlossene Linien, die parallel zum Leiter verlaufen? Erfolgt diese grundsätzliche Änderung, wenn die Dauer einer halben Periode 10 Min. oder 1 Min. oder 1 Sek. oder 0,001 Sek. dauert? Man braucht sich das nur zu überlegen, und wird zur Überzeugung kommen, daß es für Wechselströme keine anderen physikalischen Grundgesetze geben kann als für sogenannte Gleichströme. Natürlich darf man dabei nicht die vorzeichenlosen, für bestimmte Zwecke abgeleiteten, quadratischen Mittelwerte im Auge haben, sondern nur die Augenblickswerte. Daher haben auch die elektrischen Kraftlinien eines Wechselstromes für jeden Augenblickswert eine bestimmte Richtung, die sich natürlich bei jeder Halbperiode, d. h. beim Durchgang durch Null in die entgegengesetzte Richtung ändert.

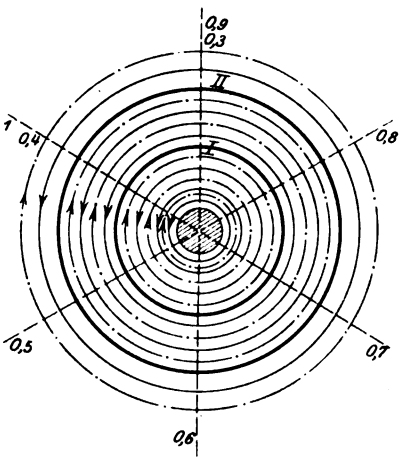


Fig. 2.

Mancher wird meinen, daß das eigentlich selbstverständlich sei; ich gehe daher zu jenen Fällen über, wo geschlossene Kraftlinien mit Bestimmtheit behauptet werden, um zu zeigen, daß auch in besonderen Fällen keine Ausnahmen von den Grundgesetzen möglich sind.

4. In Fig. 2 habe ich die Darstellung des Herrn Rogowski durch die primäre Spule I ergänzt und deren Kraftlinien ebenfalls als konzentrische Kreise mit strichpunktierten Linien eingezeichnet. Bei einem Transformator haben primärer und sekundärer Strom, sowie primäre und sekundäre Spannung während des größten Teiles jeder Halbperiode entgegengesetzte Richtung, also müssen auch die dazu gehörigen elektrischen Kraftlinien entgegengesetzte Richtung haben. Dementsprechend sind sie mit Pfeilen versehen. Mithin müßten sich die elektrischen Kräfte in dem Raum zwischen den beiden Spulen (zum mindesten in der mittleren Zone) und in dem Raum

Digitized by Google

zwischen Eisenkern und Spule gegenseitig aufheben. Es müßte also Zonen geben, in denen keine elektrische Kraft wirkt. Dann brauchte man also keine Isolation zwischen diesen Spulen und gegen den Eisenkern, denn ein Isolierstoff, der in einer Schicht elektrisch gar nicht beansprucht wird, kann von Entladungen nicht durchschlagen werden. Wir wissen aber aus reichlicher Erfahrung, daß bei genügender Spannung der Isolierstoff in radialer Richtung und nicht parallel zu den Windungen durchgeschlagen wird[1]). Besteht die Isolation zwischen den beiden Wicklungen aus Luft, so kann man im Dunkeln und bei geeigneter Spannung die Richtung der elektrischen Kraftlinien unmittelbar an dem Verlauf der Vorentladungen (Büschelentladungen und schwache Funken) sehen.

5. Obwohl die elektrischen Entladungen einen unmittelbaren Beweis für den Verlauf der elektrischen Kraftlinien liefern, soll doch noch auf eine theoretische Folgerung eingegangen werden, die die Unmöglichkeit geschlossener elektrischer Kraftlinien zeigt.

Senkrecht auf den Kraftlinien stehen die Niveauflächen[2]); sie sind in Fig. 2 durch gestrichelte Radien bezeichnet. Man kann beliebig viele zeichnen, aber jede muß einen anderen Wert haben. Man durchsetzt sie alle, wenn man längs einer Kraftlinie fortschreitet. Ich habe die relativen Werte 1, 0,9, 0,8 usf. eingeschrieben. Ist man auf diese Weise einmal herumgekommen, so kommt man wieder zu denselben Niveauflächen, so daß die Niveaufläche 1 auch den Wert 0,4 und bei weiterer Fortsetzung des Rundganges beliebig viele andere Werte haben müßte. Das ist aber unmöglich. Man erkennt aus Fig. 2 auch, daß bei einer eisenlosen Spule die verschiedenen Niveauflächen sich schneiden würden, was auch unmöglich ist.

Man wird vielleicht darauf hinweisen, daß es doch geschlossene magnetische Kraftlinien gibt. Für diese gilt aber die vorstehende Schlußfolgerung nicht, denn sie gehen durch eine vom Strom durchflossene Spule hindurch. Die Richtung der magnetischen Kraft auf derselben Kraftlinie innerhalb und außerhalb der Spule ist aber entgegengesetzt, Bei den elektrischen Kraftlinien nach Fig. 2 gibt es einen solchen Unterschied (innerhalb und außerhalb) nicht; sie gehen nirgends hindurch, sondern haben an jeder Stelle dieselbe Lage zu den Spulen; und es wird wohl auch niemand behaupten, daß eine dieser neuen elektrischen Kraftlinien an verschiedenen Stellen entgegengesetzte Richtung habe, wie es bei den magnetischen Kräften einer Spule der Fall ist. Die Annahme geschlossener elektrischer Kraftlinien führt also auch durch theoretische Überlegung zu einer Unmöglichkeit.

6. Es ist wohl nicht anzunehmen, daß Herr Rogowski den Einwand machen wird, seine Figur sei kein Transformator, weil er keine primäre Spule eingezeichnet hat, denn tatsächlich muß sie doch vorhanden sein. Es ist ferner nicht anzunehmen, daß er den Einwand machen wird, seine Darstellung gelte nur für eine Windung (Kupferring) und nicht für viele zu einer Spule vereinigte Windungen, denn wie ließe sich der Einfluß der Windungszahl auf die Gestalt der Kraftlinien begründen? Die „magnetische Verschiebung" ist doch dieselbe, wenn die Amperewindungen gleich sind!

Für den Fall aber, daß die Darstellung des Herrn Rogowski nicht einem Transformator entsprechen sollte, sondern etwa dem Fall, daß der Eisenzylinder durch rotierende Magnete wechselnd magnetisiert wird, ist es einfacher, einen synchronen Stromerzeuger schematisch darzustellen, wie ich es in Fig. 3 getan habe. Die linke Schleife sei die Wicklung des Stromerzeugers, p q seine Klemmen, an welche der Schließungskreis s t mit zwei parallelen Drähten p s und q t angeschlossen ist. Nach der Auffassung des Herrn Rogowski müßten die elektrischen Kraftlinien wie die parallelen

[1]) Fälle, wo etwa Kanäle im Isolierstoff entstehen, die von der radialen Richtung abweichen, können natürlich nicht als Gegenbeweis dienen, da sie nur von Fehlern im Isolierstoff herrühren.

[2]) Es ist allerdings auch bestritten worden, daß Wechselströme ein Potential haben. Nach meinen Ausführungen in E. u. M. 1912, S. 135, 260 und denen von Lenz in dieser Zeitschrift 1913, 1. Bd., S. 383 dürfte es wohl nicht mehr bestritten werden.

Digitized by Google

Linien verlaufen (auch durch den Eisenkörper des Stromerzeugers), und zwischen den parallelen Leitern p s und q t würden sie sich wieder gegenseitig aufheben! Wir wissen aber aus umfangreicher Erfahrung, daß bei genügender Spannung eine Entladung (Durchschlag) zwischen Leiter und Eisenkörper oder zwischen p s und q t eintritt, welche wesentlich senkrecht zum Leiter verläuft, aber nicht parallel zu ihm.

7. Die Physik ist eine Erfahrungswissenschaft und keine spekulative Metaphysik. Ihre Grundgesetze haben wir nur durch das Experiment kennen gelernt[1]). Dieses Bewußtsein ist bei den meisten Physikern lebendig, und daher haben sich viele bemüht, die hypothetischen, dem Leiter parallelen Kraftlinien durch Versuche nachzuweisen, aber immer mit negativem Erfolg (vgl. Himstedt im Programm der Universität Freiburg 1906). Erst der von Henrich auf Veranlassung von Richarz angestellte Versuch wird von diesem (und wahrscheinlich auch anderen) als beweiskräftig betrachtet[2]). Der Versuch bestand darin, daß ein kurzes Glasstäbchen — an einem Quarzfaden hängend — in die Mitte eines gleichmäßig bewickelten und mit Wechselstrom magnetisierten Eisenringes gebracht wurde. Die elektrischen Kraftlinien sollen als geschlossene Linien parallel zu den Windungen den Eisenkörper umschließen, so daß in der Mitte ein ziemlich starkes homogenes elektrisches Feld entstehen würde. Das Glasstäbchen müßte sich also mit ziemlicher Kraft in die Richtung dieses Feldes einstellen. Die Analogie mit den magnetischen Kraftlinien der Tangenten-Bussole war offenbar ausschlaggebend. Trotz dem starken „magnetischen Strom" (die elektrische Kraft soll ja diesem proportional sein) mußte das erwähnte Glasstäbchen an einen Quarzfaden aufgehängt werden, um eine Drehung desselben zu erzielen! Geschlossene elektrische Kraftlinien werden dadurch nicht bewiesen, sondern diese schwache Drehkraft rührt von den elektrischen Kraftlinien her, die von dem aufgewickelten Stromleiter ausgehen und auf diesem oder in der Nachbarschaft endigen. Kleine Unsymmetrien der Anordnung genügen, um eine so schwache Drehkraft zu erzeugen.

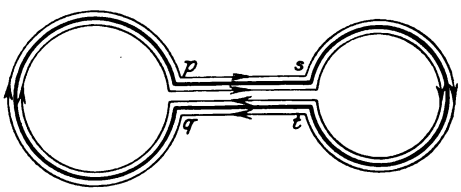


Fig. 3.

Es ist merkwürdig, daß Versuche, geschlossene elektrische Kraftlinien nachzuweisen, mit Gleichstrom überhaupt nicht angestellt wurden. Man hielt das offenbar für aussichtslos; und daher muß ich die Frage wiederholen: bei welcher Periodendauer richtungswechselnder Ströme beginnen die elektrischen Kraftlinien die Oberfläche des Leiters zu verlassen und sich zu geschlossenen Linien parallel zum Stromleiter umzubilden.

8. Die Annahme elektrischer Kraftlinien, die parallel zum Stromleiter verlaufen, und dahingehende Beweise beruhen manchmal auf einer Verwechslung der elektrischen Kräfte mit den in den Leitern induzierten elektromotorischen Kräften. Besonders deutlich tritt dies in Art. 69 des Buches „Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik" von F. F. Martens hervor. Dort heißt es: „Zum Teil aus diesem Grunde sind die magnetischen, einen elektrischen Strom umschlingenden Kraftlinien leichter nachzuweisen als die elektrischen, einen magnetischen Verschiebungsstrom umschlingenden Kraftlinien. . . . Der Nachweis der elektrischen Kraft gelingt aber leicht, wenn man" .... Und nun wird die Induzierung eines Stromes in einer Drahtschleife durch

[1]) Darum gehe ich auch auf die Analogie, die Herr Rogowski vorführt, nicht ein. Analogien können nichts beweisen; sie dürfen nur zu Hilfe genommen werden, wenn es sich darum handelt, etwa schon Bewiesenes leichter verständlich zu machen. Es scheint aber, daß die Annahme geschlossener elektrischer Kraftlinien überhaupt nur aus Analogie zu den geschlossenen magnetischen Kraftlinien entstanden ist.

[2]) In „Die Naturwissenschaften" 1913, Heft 1, S. 4.

Digitized by Google

Bewegung eines Magnetes beschrieben und als Beweis für elektrische Kräfte betrachtet, die in der Fig. 191 durch Pfeile parallel zu den Leitern eingezeichnet sind. Es wird also die in dem Leiter induzierte EMK als gleichgerichtet mit den elektrischen Kraftlinien außerhalb des Leiters angesehen.

Seit mehr als 10 Jahren habe ich bei meinen vielen Hochspannungsuntersuchungen darauf geachtet, ob irgendwie Anzeichen von elektrischen Kräften, die außerhalb der Leiter parallel zu diesen verlaufen, vorhanden sind, habe aber immer nur gefunden, daß sie wesentlich senkrecht von ihnen ausgehen.

Gibt es geschlossene elektrische Kraftlinien? Einige Bemerkungen zu dem gleichnamigen Aufsatz des Herrn Benischke.

Von

W. Rogowski.

Herr Benischke will die induzierte EMK retten und die Unmöglichkeit in sich geschlossener elektrischer Kraftlinien beweisen.

1. Allgemeines und das Beispiel Fig. 1 des Herrn Benischke. Die Erfahrung (nicht die spekulative Metaphysik) hat gezeigt, daß in einem homogenen sich selbst überlassenen Drahtringe unter gewissen besonderen Umständen (bei zeitlich veränderlichem Magnetfelde) ein Strom (Induktionsstrom) fließt.

Jedem Strome sind erfahrungsgemäß elektrische Kräfte zugeordnet.

Welche elektrischen Kräfte begleiten den Induktionsstrom? Hierauf gibt die alte (von Herrn Benischke noch jetzt vertretene) Auffassung folgende Antwort:

In einem Drahtringe kann unter besonderen Bedingungen ein eingeprägtes Elementchen (Akkumulator) entstehen (die induzierte EMK). Dieses treibt nach den Gesetzen des Gleichstromes den beobachtbaren Induktionsstrom.

Man wähle nun zuerst den Draht aus Kupfer. Die induzierte EMK sei E. Man wähle ihn aus Zink. Auch jetzt noch bleibt die induzierte EMK gleich E. Sie bleibt auch dann noch gleich E, wenn wir es mit einem Wasserring zu tun haben, dessen Leitfähigkeit 10^{-10} so schlecht ist als Kupfer. Wir wollen die Leitfähigkeit unseres Ringes beliebig verkleinern. Solange noch die Spur einer gewissen Leitfähigkeit vorhanden ist, wenn also statt des Kupfers beliebig schwach ionisierte Luft vorhanden ist, bleibt die induzierte EMK E. Soll man nun etwa annehmen, daß die induzierte EMK plötzlich verschwindet, wenn die Leitfähigkeit von unendlich kleinen Werten auf Null sinkt? Will Herr Benischke diese Frage mit „ja" beantworten?

Wir tun dies heutzutage nicht und sagen: Wenn der Kupferring nicht vorhanden wäre und an seiner Stelle der Raum leer von Materie wäre, dann würde dort ein elektrisches Feld vorhanden sein.

Das besondere Elektrische des Induktionsvorganges tritt bei der alten Auffassung nur dann auf, wenn sich ein Draht im Felde befindet. Es ist auch im Drahte lokalisiert. Nach der neueren Auffassung ist das besondere Elektrische des Induktionsvorganges ein elektrisches Feld. Es tritt auch dann auf, wenn sich kein Draht im Felde befindet, und ist überall dort im Raume vorhanden, wo sich ein Magnetfeld ändert. Geschlossene Drahtschleifen geben dem induzierten elektrischen Felde nur Gelegenheit, Ströme hervorzurufen und sich so in einer anderen Erscheinungsform zu verraten.

Nun muß es doch eine Größe im induzierten elektrischen Felde geben, die die Rolle der induzierten EMK übernehmen kann. Dies kann die Umlaufspannung des induzierten elektrischen Feldes tun, die zahlenmäßig mit der induzierten EMK übereinstimmt.

Digitized by Google

Das induzierte elektrische Feld kann kein gewöhnliches elektrostatisches Feld sein, das von Ladungen an der Oberfläche der Leiter herrührt. Denn dessen Kraftlinien haben sämtlich Anfang und Ende und seine Umlaufspannung verschwindet für jeglichen Weg. Es mag sein, daß das elektrische Feld bei der Induktion teilweise Kraftlinien enthält, die Anfang und Ende haben. Aber außerdem müssen in ihm gewisse Kraftlinien vorhanden sein, die sich in sich selbst schließen und deren Umlaufspannung an der Stelle des Ringes gerade den Wert E ergibt.[1])

Was das Beispiel von Herrn Benischke Abschnitt 3 anbelangt, so ist seine Versuchsanordnung Fig. 1 nichts anderes als ein Hertzscher Oszillator. Hertz selbst hat sich mit diesem Beispiel so gründlich beschäftigt, daß ich Herrn Benischke nur auf die klassischen Versuche und Rechnungen dieses Physikers zu verweisen brauche (Hertz, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 148—160). Wenn Herr Benischke einen Einblick in den Verlauf der elektrischen Kraftlinien haben will, so empfehle ich ihm bei Hertz S. 156 oder Zenneck, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, II. Auflage, Fig. 27 bis 30 nachzusehen, wo die geschlossenen elektrischen Kraftlinien deutlich ins Auge fallen. Eins dieser Kraftlinienbilder habe ich hier zur Orientierung abgedruckt (Fig. 1).

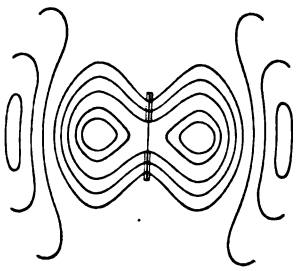


Fig. 1. Elektrische Feldlinien eines Oszillators.

Herr Benischke fragt: bei welcher Frequenz entstehen geschlossene elektrische Kraftlinien, bei $^1/_{600}$, bei $^1/_{60}$, bei 1 oder bei 1000 Wechseln in der Sekunde?

Geschlossene elektrische Kraftlinien entstehen bei jeder zeitlichen (auch nichtperiodischen) Änderung des magnetischen Feldes, folglich bei jeder Frequenz. Die Stärke des induzierten Feldes (Dichte der Linien) ist bei der Frequenz $^1/_{600}$ aber 600mal so schwach, und bei der Frequenz 1000 ist sie 1000mal so stark als bei der Frequenz 1. Bei Gleichstrom (Frequenz 0) verblaßt das induzierte elektrische Feld völlig. Ein Experimentator, der geschlossene elektrische Kraftlinien nachweisen will, würde daher im Gleichstromfelde vergeblich suchen.

2. Die Beanspruchung der elektrischen Festigkeit von Stoffen durch elektrische Kräfte der Induktion. Um eine Vorstellung der Stärke des induzierten elektrischen Feldes zu gewinnen, sei hier ein Beispiel durchgerechnet. Vorausgesetzt sei ein langer Zylinder aus geblättertem Eisen (Transformatorenkern). Die Frequenz sei 50, der Eisenquerschnitt betrage 400 cm², sein Umfang 80 cm, seine maximale Induktion B = 10 000 CGS. Dann ist die maximale Umlaufspannung des induzierten elektrischen Feldes (die zahlenmäßig mit der induzierten EMK übereinstimmt)

$$E = 2\pi \cdot 50 \cdot 400 \cdot 10\,000 \cdot 10^{-8} = 12{,}5 \text{ Volt.}$$

Die durchschnittliche Feldstärke ist daher rund:

$$\mathfrak{E} = \frac{E}{80} \sim 0{,}15 \text{ Volt/cm.}$$

Sie ist groß genug, um bei geeignetem Leitermaterial starke Stromdichten hervorzurufen. Sie ist aber andererseits so schwach, daß eine Durchschlagsgefahr von Isolationsmaterial nicht zu befürchten ist.

In der Nähe eines langen zylindrischen Stabes A (Fig. 2), der vom Gleichstrom J durchflossen wird, herrscht gewöhnlich ein schwaches magnetisches Feld. Wir wickeln

[1]) Herr Benischke irrt, wenn er meint, Herr Lenz wäre der Ansicht, das elektrische Feld von Wechselströmen lasse sich von einem Potential ableiten. Herr Lenz fußt gerade darauf, daß dies nur bei einem Teil des elektrischen Feldes der Fall ist. Der andere Teil ist nach Lenz nicht mehr von einem Potential ableitbar, sondern höchstens nur noch von einem Vektorpotentiale. Gerade dieser Teil entspricht einem elektrischen Felde mit geschlossenen Kraftlinien.

Digitized by Google

nun um den Stab aus Eisendraht eine Spirale. Wenn dem Eisendraht außerordentlich hohe Permeabilität zukommt, und seine Enden zusammengebogen werden, so erhalten wir in dem Zwischenraum zwischen den Drahtenden und in deren Nähe bei genügend vielen Windungen ein kräftiges magnetisches Feld.

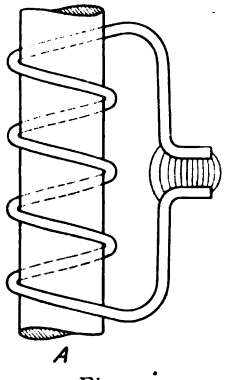


Fig. 2.

Genau so kann die schwache elektrische Komponente der geschlossenen Kraftlinien (vgl. das eben durchgerechnete Beispiel) ein starkes elektrisches Feld hervorbringen, wenn um den Transformatorkern ein gutleitender Draht in 1000 und mehr Windungen herumgeführt wird. Das Feld an den Drahtenden und in deren Nähe kann dann so stark sein, daß es Isoliermittel durchschlägt.[1]).

3. Zu dem „Beweise" des Herrn Benischke, daß es geschlossene elektrische Kraftlinien geben könne. Ich habe in Fig. 3 die magnetischen Kraftlinien und die Spuren der „Niveauflächen"[2]) im Innern eines stromdurchflossenen zylindrischen Stabes gezeichnet. Unter Weglassung von allem Unwesentlichen entspricht dieser und nicht der von Herrn Benischke angegebene magnetische Fall dem elektrischen Falle der Benischkeschen Fig. 2. Wir wissen, daß im magnetischen Falle geschlossene Kraftlinien vorhanden sind. Man kann den Benischkeschen „Beweis" Wort für Wort für den magnetischen Fall Fig. 2 wiederholen: „Man durchsetzt sie (die ‚Niveauflächen') alle, wenn man längs einer Kraftlinie fortschreitet. Ich habe die relativen Werte 1, 0,9, 0,8 usf. eingeschrieben. Ist man auf diese Weise einmal herumgekommen, so kommt man wieder zu denselben ‚Niveauflächen', so daß die ‚Niveaufläche' 1 auch den Wert 0,4 und bei weiterer Fortsetzung des Rundganges beliebig viele andere Werte haben müßte." Alles Worte des Herrn Benischke.

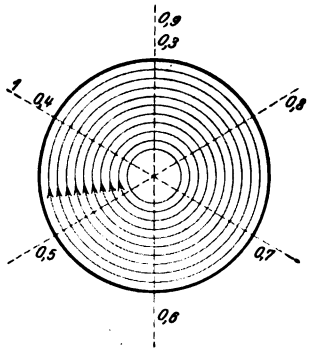


Fig. 3.

Würde man jetzt mit Herrn Benischke schließen: „Dies ist unmöglich," so hätte man „bewiesen", daß die der Erfahrung nach vorhandenen geschlossenen magnetischen Kraftlinien (Fig. 3) eigentlich gar nicht vorhanden sein müßten!

---

[1]) Ich habe hier wieder von der von mir Archiv IV, S. 59 empfohlenen Analogie Gebrauch gemacht. Diese Analogie will keineswegs, wie Herr Benischke annimmt, die Grundeigenschaften des elektrischen Feldes „beweisen", sondern sie will sie unter Hinweis auf bekannte Eigenschaften des magnetischen Feldes nur verständlich machen.

[2]) Dies sind keine gewöhnlichen Niveauflächen. Eine gewöhnliche Niveaufläche hat zwei Eigenschaften. Erstens steht sie senkrecht zu den Kraftlinien. Dies tun die obigen „Niveauflächen" auch. Zweitens ist die Arbeit beim Übergang von einer gewöhnl chen Niveaufläche zur anderen ganz unabhängig von den Stellen, an welchen dieser Übergang erfolgt, solange nur der Anfangspunkt in der einen, der Endpunkt in der anderen Niveaufläche liegt. Bei den obigen Niveauflächen trifft dies nicht zu. Die Arbeit verschwindet z. B. beim Übergang im Verzweigungspunkte und ist für andere Übergangsstellen nicht Null.

Digitized by Google

Archiv für Elektrotechnik

IV. Band. 12. Heft. 1916.

Einige Selbsterregungserscheinungen bei einphasigen Kollektormotoren.

Von

Paul Müller, Berlin.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Wie äußert sich die Selbsterregung?
3. Welche Arten von Motoren zeigen solche Selbsterregungserscheinungen?
4. Die Ursache der Selbsterregung.
   A. Selbsterregung in Generatorschaltung.
      a) Gleichstrom-Reihenschlußmotor.
      b) Wechselstrom-Reihenschlußmotor.
      c) Wechselstrommotor mit Reihenschlußtransformator.
      d) Repulsionsmotor.
      e) Motor mit ausgeprägten Polen ohne Statorwicklung.
   B. Selbsterregung in Motorschaltung.
      I. Selbsterregung bei Motoren in Verbindung mit Transformatoren.
         a) Repulsionsmotor mit Ankerspeisung.
         b) Motor in Nebenschlußschaltung.
         c) Motor in Doppelschlußschaltung.
         d) Doppelt gespeister Motor, Feldwicklung vom Ankerstrom erregt.
         e) Doppelt gespeister Motor, Feldwicklung vom Differentialstrom erregt.
      II. Selbsterregung innerhalb der Motorwicklungen allein.
         a) Zwei parallele Wicklungszweige im Stator.
         b) Vier parallele Wicklungszweige im Stator.
         c) Ausgeprägte Pole im Statoreisen.
         d) Höhere Polzahlen.
5. Abhilfsmittel.
   A. Zwei parallele Wicklungszweige, Spulen abwechselnd geschaltet.
   B. Auflösen der Verbindung zwischen gleichnamigen Bürsten.
   C. Kurzschlußwicklung für halbe Polzahl.

1. Einleitung.

Es sollen im Nachstehenden einige Selbsterregungserscheinungen[1]) beschrieben und erklärt werden, die beim Betrieb von Kollektormaschinen in der normalen Motorschaltung unbeabsichtigterweise auftreten können und die durchaus verschieden sind von der Selbsterregung, die bei der Generator- (Gegenstrombrems-) Schaltung solcher Maschinen eintritt. Für Drehstrom-Kollektormaschinen sind solche Selbsterregungserscheinungen in Motorschaltung beschrieben von Schenkel, Archiv 2, S. 10, 1913, und von Scherbius und Sonnenschein, ETZ 34, S. 1228, 1913. Besonders mannigfaltig sind die Erscheinungen jedoch bei einphasigen Kollektormaschinen mit Reihenschlußcharakteristik, auf die sich die nachstehenden Untersuchungen beziehen. Hinweise auf einen Einzelfall finden sich bei Müller, E.K.B. 1911, Heft 1, und Schenkel, Archiv, a. a. O.

[1]) Anmerkung: Die hier behandelten Erscheinungen wurden größtenteils zuerst in den Jahren 1906/07 beobachtet.

Digitized by Google

2. Wie äußert sich die Selbsterregung?

Wenn man einen mit dieser Eigenschaft behafteten Motor unbelastet in üblicher Weise anlaufen läßt, indem man ihm eine kleine, allmählich gesteigerte Spannung zuführt, so fängt er an sich zu drehen und läuft hoch; ist eine gewisse Geschwindigkeit erreicht, so tritt mit einem Male ein Bremsstoß auf, etwa so, als ob ein mit Schwung ohne Strom laufender Reihenschlußmotor plötzlich auf Kurzschlußbremsung geschaltet wird; der Stoß wird begleitet von einem heftig brummenden Geräusch im Eisenkörper, sowie von Pfeifen und meist auch heftigen Funken an den Bürsten; die Umdrehungszahl geht stoßweise auf einen kleinen Wert herunter, die Erscheinung verschwindet wieder. Darauf wiederholt sich das Spiel: Die Geschwindigkeit steigt wieder bis zu dem kritischen Wert, es tritt dann der Bremsstoß auf, die Geschwindigkeit fällt, usw. Eine solche Periode erstreckt sich, je nach den Umständen, auf eine Reihe von Sekunden, 10, 20 und mehr, bisweilen aber auch nur über Bruchteile von Sekunden. Ein normaler Betrieb ist mit solchem Motor ausgeschlossen.

Schaltet man den Motor vollständig von der Stromquelle ab und treibt ihn durch einen fremden Reihenschlußmotor von außen an, so spielt sich die Erscheinung in durchaus gleicher Weise ab; ebenso nutzt es, von einigen später angeführten Fällen abgesehen, nichts, wenn man die Statorwicklung von der Ankerwicklung oder auch die einzelnen Statorwicklungen (Feld-, Kompensations-, Wendepolwicklung oder dergl.) voneinander trennt. Ebenso wenig hilft ein Herausnehmen aller Bürsten der einen Polarität, wenngleich die Art der Erscheinung sich dabei vielfach etwas ändert. Nimmt man die übrig gebliebenen Bürsten nacheinander heraus, so wird die Bremsung schwächer und hört schließlich, wenn von jeder Polarität nur noch höchstens ein Pol besetzt ist, vollständig auf.

Ein vorgeschalteter Strommesser zeigt keinen Stromstoß an, sondern nur das natürliche Anwachsen des aufgenommenen Stromes mit abnehmender Drehzahl. Es ist auch gleichgültig, ob dem Motor zum Antrieb Gleich- oder Wechselstrom zugeführt wird (vorausgesetzt, daß der Motor an sich dafür geeignet ist).

3. Welche Arten von Motoren zeigen solche Selbsterregungserscheinungen?

Im allgemeinen neigen Kollektormotoren für Wechselstrom mehr dazu als solche für Gleichstrom, weil der bei ersteren übliche kleine Luftspalt und der geblätterte Eisenkörper die Selbsterregung überhaupt erleichtert. Die grundsätzliche Schaltung des Motors ist von nebensächlicher Bedeutung, die Erscheinungen können sowohl bei Mehrphasen- wie bei Einphasenmotoren auftreten, bei letzteren, auf die sich die nachstehenden Untersuchungen beschränken sollen, wiederum sowohl bei Reihenschluß- wie bei Repulsions-, Serienrepulsionsmotoren und dergl., ja sogar bei Maschinen ohne jede Statorwicklung, vorausgesetzt, daß der Eisenkörper nicht über den Umfang völlig gleichförmig verteilt ist, also z. B. ausgeprägte Pole besitzt. Wenn die Selbsterregung auch bei geöffneter Statorwicklung bestehen bleiben soll, so muß letztere (oder doch bei mehreren Statorwicklungen eine davon) aus einigen parallelen Zweigen bestehen, ferner muß der Motor mehr als 2 Pole haben und außerdem Parallelwicklung im Anker besitzen (was bei größeren Kollektormotoren ja fast stets zutrifft); einige Formen von Serienrepulsionsmotoren zeigen Selbsterregung aber auch bei 2 Polen und Reihenwicklung im Anker, allerdings nur solange sie mit dem zugehörigen Transformator verbunden sind, wobei aber dieser Transformator nicht an das Netz angeschlossen zu sein braucht.

In vielen Fällen hängt die Selbsterregung von der Bürstenstellung ab, so zwar, daß sie bei bestimmten Bürstenstellungen auftritt, bei anderen dagegen nicht.

Digitized by Google

4. Die Ursache der Selbsterregung.

A. Selbsterregung in Generatorschaltung.

Die Ursache der genannten Erscheinungen dürfte leichter verständlich werden, wenn zunächst an die bekannten Erscheinungen der Selbsterregung in Generatorschaltung kurz erinnert wird.

a) Gleichstrom-Reihenschlußmotor. Wenn man einen gewöhnlichen Reihenschlußmotor (Fig. 1a) auf sich selbst kurzschließt und im umgekehrten Drehsinne antreibt (Fig. 1b), so wird er zum Generator, er erregt sich selbst und erzeugt Gleichstrom.

b) Wechselstrom-Reihenschlußmotor. Ein Wechselstrommotor hat grundsätzlich dasselbe Schema wie Fig. 1a, er verhält sich in Generatorschaltung daher ebenso wie der Gleichstrommotor Fig. 1b, er erzeugt also ebenfalls Gleichstrom.

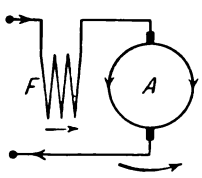


Fig. 1a.

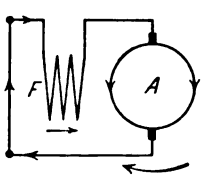


Fig. 1b.

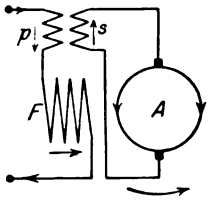


Fig. 2a.

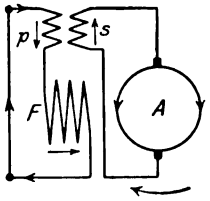


Fig. 2b.

c) Wechselstrommotor mit Reihenschluß-Transformator. Das Verhalten ändert sich, sobald zwischen Ankerkreis und Feldkreis ein Transformator geschaltet wird, was vielfach geschieht, um die Feldstärke bei gleichbleibendem Ankerstrom regeln zu können (Motor von Richter u. a.). In der Motorschaltung (Fig. 2a) geht der Strom durch die Primärwicklung p des Transformators und durch die Feldwicklung F; in der Sekundärwicklung s entsteht (bei Übersetzung 1 : 1) ein praktisch gleich großer Strom, der sich über die Ankerwicklung A schließt; die Maschine verhält sich als Motor eigentlich genau so wie bei Schaltung 1a.

Nun aber bei Generatorschaltung, also Feldstromkreis vom Netz abgetrennt und auf sich selbst kurzgeschlossen, Anker umgekehrt angetrieben (Fig. 2b). Der remanente Magnetismus erzeugt in dem Anker eine kleine Spannung, die einen Strom in Richtung der Pfeile durch Anker A und Sekundärwicklung s treibt. Dieser Strom ist nun aber kein ruhender Gleichstrom von unveränderlicher Größe, sondern ein entstehender, also der Größe nach anwachsender Strom; er erzeugt also in dem Transformator ein zunehmendes Feld und damit auch eine Sekundärspannung in p, die ihrerseits einen Strom über Feldwicklung F treibt, gerade so, wie ein Wechselstrom es tun würde. Dadurch wird das Magnetfeld der Maschine verstärkt, der Ankerstrom wächst weiter, erhöht über den Transformator den Feldstrom, und so steigern sich beide Ströme gegenseitig. So weit ist das Verhalten dasselbe wie bei der unmittelbaren Reihenschaltung Fig. 1b. Da aber das Feld im Transformator, selbst wenn der Feldstrom nur aufrecht erhalten werden soll, dauernd zunehmen muß, so tritt bald Sättigung ein; der Transformator ist daher nicht mehr imstande, den Feldstrom zu verstärken, nicht einmal aufrecht zu erhalten, letzterer beginnt vielmehr zu sinken, mit ihm auch Spannung und Strom im Ankerkreis. Die Abnahme wird immer rascher und schließlich kippt der Strom in beiden Stromkreisen gewissermaßen um, worauf der ganze Vorgang sich mit entgegengesetzter Stromrichtung, aber sonst in gleicher Weise wiederholt. Die Generatorschaltung Abb. 2b liefert also einen Wechselstrom.

d) Repulsionsmotor. Ganz ähnlich verhält sich nun der Repulsionsmotor. Diesen kann man sich aus dem Schema Fig. 2a entwickelt denken, wenn man keinen besonderen Transformator p s verwendet, sondern den Motor selbst dafür mitbenutzt, und

Digitized by Google

zwar die zu der Feldachse senkrechte Achse, die also mit der Bürstenachse zusammenfällt. Man legt (Fig. 3a) in den Stator eine Wicklung p, die ein Spiegelbild der Ankerwicklung bildet und als Primärwicklung dient, während die Ankerwicklung selbst die Sekundärwicklung dazu darstellt. Die Wicklung p wird wieder mit der Feldwicklung F in Reihe geschaltet. Die frühere Transformatorwicklung s (Fig. 2) kommt dann also in Fortfall, die von den Bürsten kommenden Leitungen werden unmittelbar unter sich verbunden, d. h. kurzgeschlossen.

Schickt man nun durch die Statorwicklungen p und F einen Wechselstrom, so erzeugt die Primärwicklung p in der die Sekundärwicklung bildenden Ankerwicklung A einen gleichgroßen Strom, genau so, wie eine Primärwicklung auf einem gewöhnlichen Transformator in der kurzgeschlossenen Sekundärwicklung einen gleichgroßen Strom hervorrufen würde (immer Übersetzung 1 : 1 vorausgesetzt und Magnetisierungsstrom vernachlässigt). Es tritt also in der Bürstenachse ein Transformatorfeld auf; dies Feld und das von der Wicklung F erzeugte Magnetfeld (Motorfeld) stören einander in keiner Weise, weil beide elektrisch senkrecht zueinander stehen.

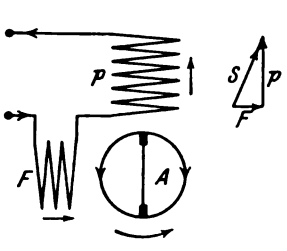


Fig. 3a.

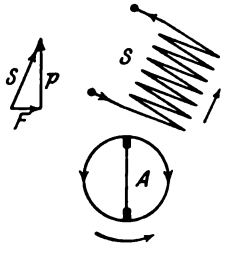


Fig. 3b.

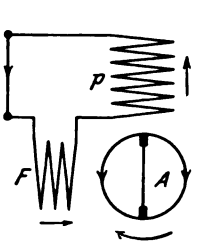


Fig. 3c.

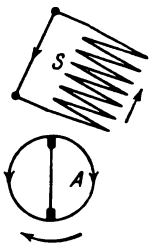


Fig. 3d.

Die beiden Wicklungen p und F kann man sich auch nach dem bekannten Kräfteparallelogramm zu einer gemeinsamen Wicklung S zusammengesetzt denken, ohne an der Wirkung etwas zu ändern (Fig. 3b).

Schaltet man diesen Motor vom Netz ab, schließt ihn in sich kurz und treibt den Anker in entgegengesetzter Richtung an (Fig. 3c), so erzeugt auch hier der in Richtung F vorhandene remanente Magnetismus eine kleine Spannung im Anker, diese ruft einen Strom hervor, dieser entstehende Strom erzeugt in der Wicklung p, die ja mit der Ankerwicklung transformatorisch verkettet ist, gleichfalls einen Strom, der sich über die Feldwicklung F schließt, hier den Magnetismus verstärkt, so daß Ankerspannung und Ankerstrom anwachsen, mit ihnen auch wieder der Strom in p, das Feld in Richtung F usw., bis schließlich in der Transformatorachse Eisensättigung eintritt, worauf die beiden Ströme zu sinken beginnen, sozusagen in die entgegengesetzte Richtung umkippen, wonach sich das Spiel in der anderen Stromrichtung wiederholt, und so fort. Es wird also wieder ein Wechselstrom erzeugt wie in dem Fall der Fig. 2b.

Die sekundliche Periodenzahl dieses Wechselstromes ist im allgemeinen recht niedrig, selten größer als etwa 1.

Fig. 3d gibt das der Fig. 3b entsprechende Schema für den Fall, daß die beiden Wicklungen p und F zu einer gemeinsamen Wicklung S zusammengelegt sind. Aus dem Vergleich der Fig. 3b und 3d sieht man, daß die Maschine als Motor wirkt, sobald die Bürstenachse gegenüber der Statorachse im Sinne der Drehung verschoben ist, dagegen als Generator, sobald sie gegen den Drehsinn zurückgezogen wird.

Hier haben wir also schon einen Fall, wo die Maschine lediglich durch verschiedene Bürstenstellung zum Motor oder zum Generator wird. Einen ähnlichen Fall zeigt die in Fig. 4 dargestellte Maschine, die nur eine Ankerwicklung, dagegen keine Statorwicklung besitzt, wohl aber ausgeprägte Pole im Statoreisen.

Digitized by Google

e) Motor mit ausgeprägten Polen ohne Statorwicklung. Stehen die Bürsten hier senkrecht zur Polachse (Fig. 4a) und schickt man Strom durch den Anker, so entstehen in üblicher Weise Ankerpole, z. B. ein Nordpol n unten und ein Südpol s oben, im übrigen passiert aber nichts. Erst wenn man die Bürsten schräg stellt, z. B. nach links (Fig. 4b), so nähert sich der untere n-Pol des Ankers mehr dem rechten Statorpol, induziert also hier einen S-Pol; ebenso nähert sich der obere s-Pol des Ankers mehr dem linken Statorpol, induziert also in diesem einen N-Pol. Der Anker beginnt also sich zu drehen, und zwar im selben Sinne, wie die Bürsten aus der Neutralen verschoben sind.

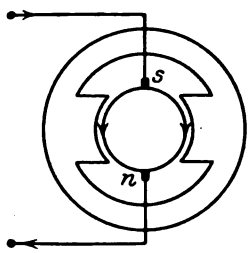


Fig. 4a.

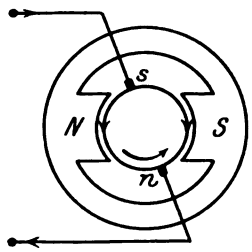


Fig. 4b.

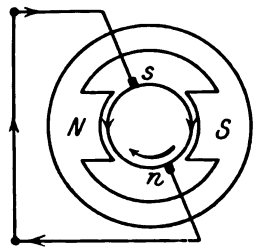


Fig. 4c.

Wenn man diesen Motor (Fig. 4c) vom Netz abschaltet, auf sich selbst kurzschließt und den Anker im entgegengesetzten Sinne antreibt, so erzeugt der remanente Magnetismus eine Spannung im Anker in der Pfeilrichtung, es entsteht also ein Strom, der wiederum im Anker unten einen n-Pol, oben einen s-Pol hervorruft; diese verstärken durch magnetische Induktion den remanenten Magnetismus, und so fort. Die Bürsten sind jetzt, wie Fig. 4c zeigt, aus der Neutralen gegen den Drehsinn zurückgezogen. Also auch diese Maschine wirkt als Motor, wenn die Bürsten aus einer bestimmten Stellung, in diesem Falle der Neutralen, im Drehsinn verschoben werden, dagegen als Generator, wenn sie gegen den Drehsinn zurückgezogen werden.

Hiermit sind die hauptsächlichsten Fälle der Selbsterregung in Generatorschaltung, soweit sie für die folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit sind, erledigt; wir können uns nun der Frage zuwenden, wie auch in Motorschaltung Selbsterregung auftreten kann.

B. Selbsterregung in Motorschaltung.

Wenn in einem Motor mit Reihenschlußcharakter, solange er als Motor geschaltet ist und betrieben wird, die Möglichkeit einer Selbsterregung bestehen soll, so setzt dies immer voraus, daß neben dem Verlauf, den der Motorstrom nimmt, noch ein anderer, in sich geschlossener Stromverlauf möglich ist, so daß sich innerhalb des Motors noch andere Ströme ausbilden können, die von dem Motorstrom unabhängig sind, wobei die gegenseitige Lage und Schaltung dieser Stromwege derart sein muß, daß sich diese Ströme und die von ihnen erzeugten Felder gegenseitig verstärken.

Es entsteht nun die Frage, in welchen Motorschaltungen derartige besondere Stromwege enthalten sein können.

Es sind hauptsächlich zwei Fälle zu unterscheiden, erstens solche, wo die betreffenden Stromkreise durch eine eigenartige Verbindung des Motors mit einem Transformator zustande kommen, wo also die Selbsterregung verschwindet, wenn man den Motor ganz für sich allein betreibt, und zweitens solche Fälle, wo die Stromkreise, die zur Selbsterregung Anlaß geben, vollständig innerhalb des Motors selbst liegen, so daß die Selbsterregung auch dann bestehen bleibt, wenn der Motor in keinerlei Verbindung mit anderen, äußeren Stromquellen steht, und selbst, wenn die einzelnen Wicklungen voneinander getrennt werden.

Digitized by Google

I. Selbsterregung bei Motoren in Verbindung mit Transformatoren.

In Fig. 2b war eine Maschine dargestellt, bei der Anker und Feld über einen Transformator in Reihe geschaltet, beide Stromkreise in sich geschlossen sind und bei geeignetem Drehsinn des Ankers Selbsterregung eintritt. Derartige Stromkreise finden sich nun in den Schaltungen gewisser Abarten des Repulsionsmotors, nämlich des Repulsionsmotors mit Ankerspeisung, des „doppelt gespeisten" Motors und ähnlichen.

a) Repulsionsmotor mit Ankerspeisung. Der gewöhnliche Repulsionsmotor, wie er in Fig. 3 dargestellt ist, hat bekanntlich die Eigenschaft, daß die für die volle Leistung günstigste Drehzahl in der Nähe der synchronen liegt. Bei den im Vollbahnbetrieb üblichen niedrigen Frequenzen führt dies zu kleiner Polzahl, daraus ergeben sich wieder sehr ungünstige elektrische Verhältnisse. Diesen Nachteil vermeidet der Repulsionsmotor mit Ankerspeisung (Fig. 5). Die Bürsten sind hier nicht kurzgeschlossen, sondern erhalten aus einer besonderen Wicklung des Transformators, der auch die Statorwicklung speist, eine Spannung zugeführt, die im selben Sinne verläuft wie diejenige, die von der Statorwicklung in dem Anker durch Transformation hervorgerufen wird. Die gesamte, dem Anker zugeführte Spannung wird also größer, und somit muß auch die Drehzahl steigen. Diese Wirkung tritt auch tatsächlich ein, aber außerdem entsteht Selbsterregung, der Motor bremst sich selber periodisch ab in der Weise, wie sie in der Einleitung beschrieben ist. Die Selbsterregung verschwindet, wenn die dem Anker von außen zugeführte Spannung auf einen kleinen Wert heruntergesetzt wird, womit der Motor sich aber wieder dem gewöhnlichen Repulsionsmotor nähert, oder wenn man die Zusatzspannung umkehrt, wobei die Drehzahl allerdings noch unter die synchrone heruntergeht.

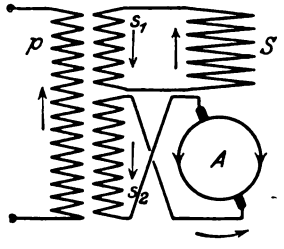


Fig. 5a.

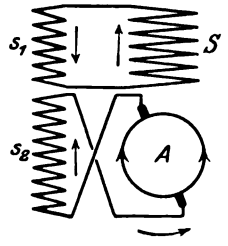


Fig. 5b.

Der augenblickliche Verlauf der Spannungen und Ströme im Motorbetrieb ist in Fig. 5a durch Pfeile dargestellt. In der Primärwicklung p des speisenden Transformators fließt der Strom entgegengesetzt wie in den beiden Sekundärwicklungen s_1 und s_2; der Strom von s_1 schließt sich über die Statorwicklung S; letztere würde gemäß Fig. 3b, wenn der Anker über die Bürsten kurzgeschlossen wäre, in beiden Ankerzweigen einen von oben nach unten fließenden Strom hervorrufen, die von s_2 zugeführte Spannung hat dieselbe Richtung. Der Anker läuft bei der in Fig. 5a dargestellten Lage der Bürsten links um.

Denkt man sich nun das ganze System vom Netz abgeschaltet und den Anker irgendwie von außen her im selben Sinne wie vorher angetrieben, also immer noch im Motorsinne (im Gegensatz zu dem Verfahren im Abschnitt A), so kann zunächst in der nunmehr vollständig offenen Primärwicklung p kein Strom fließen, man kann sich diese Wicklung also auch ganz wegdenken (Fig. 5b). Der Transformator verhält sich also so, als ob nur die beiden Wicklungen s_1 und s_2 vorhanden wären.

Der im Statoreisen bestehende remanente Magnetismus erzeugt nun in der Ankerwicklung eine Spannung im selben Sinne, wie in Fig. 5a die Gegen-EMK verlief, also bekanntlich, wie bei jedem Motor, entgegengesetzt wie der Motorstrom im Anker, demnach von unten nach oben. Diese Spannung erzeugt einen Strom gleichfalls von unten nach oben, dieser Strom schließt sich über die Transformatorwicklung s_2; als anwachsender Strom erzeugt er in der anderen Transformatorwicklung s_1 einen entgegengesetzt gerichteten Strom, der sich über die Statorwicklung S schließt. Wie Fig. 5b zeigt, fließt letzterer im selben Sinn, wie der Motorstrom in Fig. 5a geflossen

Digitized by Google

war, er verstärkt also den remanenten Magnetismus, damit wachsen Spannung und Strom im Anker, dadurch wird wieder über s_2 und s_1 der Statorstrom verstärkt, usw. Infolge der eintretenden Sättigung seines Eisenkörpers ist der Transformator bald nicht mehr imstande, Strom zu übertragen, beide Ströme lassen nach und kippen schließlich in die entgegengesetzte Richtung um, worauf sich der Vorgang mit entgegengesetzter Stromrichtung wiederholt, gerade so wie bei Besprechung der Schaltung 2 auseinandergesetzt wurde. In der Tat stimmt die Schaltung Fig. 5b grundsätzlich völlig überein mit Fig. 2b, der Anker ist über die eine, der Stator über die andere Transformatorspule kurzgeschlossen, Anker und Stator sind über den Transformator in Reihe geschaltet. Der Drehsinn ist in bezug auf diesen Stromverlauf, wie wir gesehen hatten, ebenfalls ein solcher, daß eine Generatorwirkung eintritt; ein Unterschied besteht nur insofern, als die Bürstenachse hier nicht zur Statorwicklung senkrecht steht, wie in Fig. 2b, sondern eine geneigte Lage hat. Diese Tatsache ist auf das Verhalten der Maschine nicht ohne Einfluß. Während in Fig. 2b Anker- und Feldwicklung einander nicht unmittelbar beeinflussen können, ist in Fig. 5b wieder die Statorwicklung S (oder richtiger deren in Richtung der Bürstenachse fallende Komponente) mit der Ankerwicklung transformatorisch verkettet, wie in der Beschreibung des Repulsionsmotors (Fig. 3) erläutert. Wären die Transformatorwicklungen s_1 und s_2 nicht vorhanden, Statorwicklung S und Ankerwicklung A vielmehr jede unmittelbar kurzgeschlossen, so würde sich das Schema der Fig. 3d ergeben, ein im Anker A von unten nach oben fließender Strom würde durch Transformatorwirkung im Stator S einen von oben nach unten fließenden Strom erzeugen, bei der in Fig. 5b vorhandenen Linksdrehung würde also keine Selbsterregung eintreten (im Gegensatz zur Rechtsdrehung in Fig. 3d), denn die Bürsten sind hier gegen die Statorachse S im Sinne der Drehung verschoben.

Diese transformatorische Beeinflussung zwischen Stator- und Ankerwicklung bleibt natürlich bestehen, wenn die Schaltung nach Fig. 5b wieder hergestellt wird. Der im Anker A entstehende, von unten nach oben fliessende Strom sucht in der Statorwicklung S durch unmittelbare transformatorische Verkettung einen Strom von oben nach unten zu erzeugen; derselbe Ankerstrom sucht aber auch dadurch, daß er sich über die Transformatorspule s_2 schließt und hierdurch auf die Spule s_1 induzierend wirkt, in der Statorwicklung S einen Strom in der Pfeilrichtung der Fig. 5b hervorzurufen, also entgegengesetzt wie der erste. Es sind also gewissermaßen zwei Transformatoren gegeneinander geschaltet, einmal die unmittelbar miteinander transformatorisch verketteten Wicklungen von Anker und Stator, sodann der Transformator mit den Spulen s_1 und s_2. Es handelt sich also darum, welcher Transformator sozusagen stärker ist; überwiegt der erstere, so kommt in der Statorwicklung ein Strom von entgegengesetzter Richtung zustande wie die Pfeilrichtung in Fig. 5b, der remanente Magnetismus wird nicht verstärkt, und es tritt keine Selbsterregung ein. Überwiegt dagegen die Wirkung des Transformators s_1 s_2, so nimmt der entstehende Strom den Verlauf wie die Pfeile in Fig. 5b angeben, und es gibt Selbsterregung.

Welche Wirkung überwiegt, hängt zum größten Teil vom Übersetzungsverhältnis im Motor und im Transformator ab.

Hat sowohl der Motor[1]) wie der Transformator das Übersetzungsverhältnis 1 : 1, so würde ein im Anker fließender Wechselstrom von beispielsweise 1 Ampere in der Statorwicklung einen Strom von gleichfalls 1 Ampere induzieren; er würde ferner durch die Transformatorspule s_2 fließen und in der anderen Spule s_1 einen Strom von gleichfalls 1 Ampere hervorrufen, der sich über die Statorwicklung S schließen müßte. In letzterer wollen also 2 Ströme von je 1 Ampere, aber entgegengesetzter Richtung entstehen, beide Wirkungen heben einander auf, und es kommt garnichts zustande.

[1]) Anmerkung: Bei der Statorwicklung ist die Windungszahl der in die Bürstenachse fallenden Komponente zu rechnen.

Digitized by Google

Hat dagegen die Spule s_2 z. B. doppelt so viel Windungen wie s_1, der Motor aber nach wie vor die Übersetzung 1 : 1, so ergibt sich folgendes Bild: Der Ankerstrom von 1 Ampere erzeugt in der Statorwicklung durch unmittelbere Induktion einen Strom von 1 Ampere; derselbe in s_2 fließende Strom von 1 Ampere erzeugt dagegen in der Spule s_1, die ja nur halb so viel Windungen hat, einen Strom von 2 Ampere; dieser überwiegt also, und es kommt der Stromverlauf nach Fig. 5b zustande, der Selbsterregung bedeutet.

Hat umgekehrt die Transformatorspule s_2 weniger Windungen als s_1, so erzeugt ein in ersterer fließender Strom von 1 Ampere einen Strom von weniger als 1 Ampere in s_1, es überwiegt dann also der vom Anker in der Statorwicklung S unmittelbar induzierte Strom, und es kommt keine Selbsterregung zustande.

Der kritische Wert, wo die Selbsterregung eben aufhört, liegt somit bei gleichem Übersetzungsverhältnis in Motor und Transformator; man dürfte also bei dieser Schaltung, die ja, wie oben gesagt, eine Verbesserung des gewöhnlichen Repulsionsmotors durch Erhöhung der Drehzahl ergeben sollte, dem Anker höchstens ebenso viel Spannung von außen aufdrücken, wie er vom Stator her induziert erhält, so daß man die Drehzahl bei Vollast höchstens auf etwa das Doppelte wie beim gewöhnlichen Repulsionsmotor bringen könnte. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß Streuung, magnetischer Widerstand usw. im Motor sowohl wie im Transformator vernachlässigt werden können. Das ist aber nicht der Fall, namentlich nicht beim Motor mit seinem verhältnismäßig großen Luftspalt. Beim Motor sind also die beiden Wicklungen gewissermaßen viel weniger fest unter sich verkettet als im Transformator; daher verschiebt sich auch die kritische Grenze in dem Sinne, daß auch dann, wenn Spule s_2 weniger Windungen hat als s_1, noch Selbsterregung auftreten kann. Man darf also in Wirklichkeit die Drehzahl nicht einmal ganz auf das Doppelte der synchronen steigern. Man könnte diesen durch den hohen magnetischen Widerstand im Motor bedingten Nachteil dadurch einigermaßen ausgleichen, daß man im Transformator künstlich den magnetischen Widerstand ebenfalls vergrößert, z. B. durch Luftspalt, durch Sättigung (die auch durch ein fremdes Feld, etwa durch das beim Anlegen des Transformators an das speisende Netz entstehende, erzeugt sein kann), doch haben alle diese Methoden andere Übelstände zufolge; das Endergebnis ist jedenfalls das, daß man mit wachsender Spannung in Spule s_2 sehr bald in das Gebiet der Selbsterregung kommt.

Bei all diesen, an Fig. 5b geknüpften Betrachtungen war die Primärwicklung p des Transformators vernachlässigt worden, ferner war angenommen, daß der Motor von außen her angetrieben wird. Es ist aber nach dem vorstehend Gesagten leicht einzusehen, wie der Motor sich in der eigentlichen Betriebsschaltung nach Fig. 5a verhalten wird. Er nimmt zunächst in durchaus normaler Weise seinen Motorstrom auf, der die in Fig. 5a durch Pfeile dargestellte Richtung hat; ganz unabhängig davon entsteht, sobald die genügende Geschwindigkeit erreicht ist, der selbsterregte Strom nach Fig. 5b, der sich dem Motorstrom überlagert, ohne ihn aber irgendwie unmittelbar zu beeinflussen; ein vor die Primärwicklung p geschalteter Strommesser zeigt den selbsterregten Strom also nicht an, und das ist nach Fig. 5b ohne weiteres verständlich, denn dieser Strom durchfließt die Primärwicklung garnicht. Eine Wechselwirkung zwischen Motorstrom und selbsterregtem Strom kommt nur mittelbar dadurch zustande, daß der letztere für den Motor eine starke Belastung darstellt, die viel höher ist als die dem zufließenden Motorstrom entsprechende Motorleistung, die Drehzahl geht also rasch herunter, und erst als Folge davon steigt der Motorstrom, wie bei jedem Motor mit Reihenschlußcharakter bei abnehmender Geschwindigkeit. Gleichzeitig läßt die Selbsterregung an Stärke nach und verschwindet endlich ganz, sobald die Drehzahl unter einen gewissen Wert gesunken ist. Damit verschwindet die Belastung, der aufgenommene Strom, der ja nur von der Drehzahl abhängt, ändert sich aber nicht, der Motor entwickelt also mehr Leistung als er verbraucht, beschleunigt sich also. Ist

Digitized by Google

wieder eine genügend hohe Drehzahl erreicht, so tritt von neuem Selbsterregung ein und das Spiel wiederholt sich in gleicher Weise wie vorher. Die Stärke der Selbsterregung (Amplitude und Frequenz) hängt (abgesehen von bekannten Faktoren, wie Drehzahl usw.) von der Größe des Verschiebungszwinkels zwischen Bürstenachse und Statorachse ab; ist die Verschiebung Null (Kurzschlußstellung des Motors), so verschwindet sie, bei einer Verschiebung von 90^0 ist sie am stärksten; das Schema geht dann in das der Fig. 2b über. Dieser Fall unterscheidet sich in einigen Punkten von dem vorigen, es soll deshalb mit einigen Worten darauf besonders eingegangen werden.

b) Motor in Nebenschlußschaltung. Die vollständige Schaltung ist in Fig. 6 dargestellt. Der den Motor speisende Transformator hat wieder die Primärwicklung p und die beiden Sekundärwicklungen s_1 und s_2, von denen die erste den Stator S, die zweite den Anker A mit Strom versorgt. Die Bürsten stehen gemäß Voraussetzung senkrecht zur Statorachse, Anker- und Statorwicklung sind also nicht mehr transformatorisch verkettet, die beiden Ströme sind vielmehr voneinander ganz unabhängig, der Motor hat nicht mehr Reihenschlußcharakter, sondern stellt einen richtigen Nebenschlußmotor dar. Er ist in dieser Form allerdings bekanntlich wegen der starken Phasenverschiebung des Feldes nur in beschränktem Maße brauchbar, es könnte somit überflüssig erscheinen, sich damit zu beschäftigen; in unserem Zusammenhange bildet aber gerade diese Schaltung ein lehrreiches Beispiel, denn es wird sich gleich zeigen, daß selbst dann, wenn dieser Nachteil nicht bestände, der Motor doch nicht betriebsfähig wäre, weil wieder Selbsterregung eintritt.

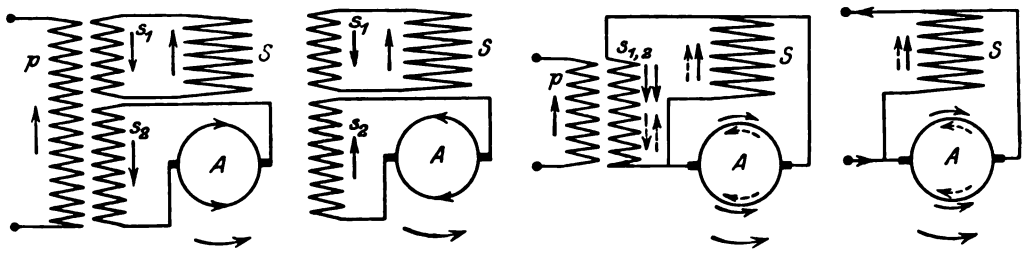


Fig. 6a. Fig. 6b. Fig. 6c. Fig. 6d.

Der Motorstrom würde in einem gegebenen Zeitpunkt den in Fig. 6a durch Pfeile dargestellten Verlauf haben, beide Sekundärströme in s_1 und s_2 also im gleichen Sinne fließend, dem Primärstrom in p aber entgegengesetzt gerichtet.

Denkt man sich das System wieder vom Netz abgeschaltet, die Primärwicklung p als unwirksam weggelassen und den Anker von außen her irgendwie angetrieben, und zwar im selben Sinne wie vorher, also wieder im Motorsinne (Fig. 6b), so erzeugt der remanente Magnetismus, genau wie im vorigen Falle (I a), eine Spannung in der Ankerwicklung in derselben Richtung, wie vorher (Fig. 6a) die Gegen-EMK, also entgegengesetzt wie vorher der Motorstrom im Anker verlief; diese Spannung ruft einen Strom hervor, der sich über die Spule s_2 schließt; in s_1 wird dadurch ein entgegengesetzt gerichteter Strom erzeugt, dieser durchfließt die Statorspule S und verstärkt dort den remanenten Magnetismus; demzufolge wachsen Spannung und Strom im Anker, dadurch wird wieder das Feld verstärkt und so fort; der Transformator kommt bald in das Sättigungsgebiet, der Strom in Anker und Feld läßt nach, geht auf Null herunter und kippt nach der entgegengesetzten Richtung um, gerade so wie früher bei Schaltung Fig. 2b besprochen.

Stellt man die eigentliche Betriebsschaltung nach Fig. 6a wieder her und führt dem Motor Wechselstrom zu, so läuft er mit einem Stromverlauf nach Fig. 6a an; sobald eine genügende Geschwindigkeit erreicht ist, tritt Selbsterregung ein, der selbst-

Digitized by Google

erregte Strom verläuft gemäß Fig. 6b, er überlagert sich dem Motorstrom von Fig. 6a, so daß also beide Ströme unabhängig voneinander bestehen.

An dem Verhalten ändert sich grundsätzlich nichts, wenn man gemäß Fig. 6c beide Sekundärwicklungen zusammenlegt, was ohne weiteres zulässig ist, wenn man der Feldwicklung S des Stators nur die entsprechende Windungszahl gibt. Der Verlauf des Motorstromes ist durch voll ausgezogene, der des selbsterregten Stromes durch gestrichelte Pfeile angedeutet.

Benutzt man endlich gar keinen Transformator, sondern legt den Motor unmittelbar ans Netz, wobei die Feldwicklung (Fig. 6d) im Nebenschluß an den Ankerbürsten liegt, so tritt gleichfalls neben dem aufgenommenen Motorstrom ein selbsterregter Strom auf; doch ist dieser jetzt (meist) ein Gleichstrom, weil mit dem Transformator naturgemäß auch der Einfluß von dessen Eisensättigung fortfällt.

Man kann sich dies Verhalten auch ohne die vorhergehenden Überlegungen leicht erklären, wenn man den Motor als Gleichstrom-Nebenschlußmaschine ansieht. Das Schema Abb. 6d entspricht ja vollständig einer solchen. Der Motor würde daher, sobald man ihm Gleichstrom zuführt, ohne weiteres als normaler Gleichstrom-Nebenschlußmotor laufen, und zwar im selben Drehsinne wie bei Wechselstrom. Allerdings sind die elektrischen Verhältnisse der Feldwicklung hier für einen normalen Gleichstrom-Nebenschlußmotor recht ungewöhnlich, weil sie mit Rücksicht auf die dem Wechselstrom eigentümliche Selbstinduktion mit ziemlich wenig Windungen von entsprechend größerem Querschnitt ausgeführt werden muß. Mit Gleichstrom gespeist, nimmt sie also infolge des niedrigen ohmischen Widerstandes sehr viel Strom auf und erzeugt ein außerordentlich starkes Feld, der Anker dreht sich also sehr viel langsamer, als er beim Wechselstrombetrieb tun würde. Ein Gleichstrom-Nebenschlußmotor wird aber bekanntlich, sobald man den Anker irgendwie durch Antrieb von außen bei gleichbleibendem Drehsinn auf höhere Drehzahl bringt als seinem Leerlauf entspricht, zum Gleichstrom-Nebenschlußgenerator. Er würde sich auch als solcher in ganz normaler Weise selbst erregen, und zwar wegen des geringen Widerstandes der Feldwicklung sehr leicht, also schon bei sehr niedriger Drehzahl.

Läßt man nun den Motor durch Zuführung von Wechselstrom an, so kommt er bald auf die Drehzahl, wo er sich als Gleichstrom-Nebenschlußmaschine selbst erregt.

Ein Wechselstrommotor mit Nebenschlußerregung nach der Fig. 6 ist also hauptsächlich deswegen nicht betriebsfähig, weil er selbsterregte Ströme erzeugen würde, die ihn abbremsen.

c) Motor in Doppelschlußschaltung. Aus der Nebenschlußschaltung von Fig. 6 läßt sich leicht eine Doppelschlußschaltung ableiten, die mehrfach vorgeschlagen wurde, weniger wegen des Doppelschlußcharakters, als wegen der damit verbundenen Verbesserung des Leistungsfaktors.

Die Schaltung ist in Fig. 7 dargestellt. Die beiden Transformatorspulen s_1 und s_2 werden mit den benachbarten Enden zusammengelegt, was ja ohne weiteres zulässig ist, und in die nunmehr gemeinsame Leitung 1—2, die zu je einem Ende der Statorwicklung S und des Ankers A führt, ist eine Drosselspule D eingeschaltet. Wäre Leitung 1—2 ganz unterbrochen, so müßte durch Feld und Anker derselbe Strom fließen, der Motor würde also ein reiner Reihenschlußmotor werden; durch Einschalten der Spule D entsteht ein zweiter Stromweg, die Transformatorspule s_1 schickt also einen Nebenschlußstrom durch die Statorwicklung S und die Drosselspule D. Der erste Stromkreis stellt bei laufendem Anker eine überwiegend ohmische Belastung dar, der Nebenschluß über S und D dagegen eine überwiegend induktive. Die Drosselspule wird meist so bemessen, daß der Nebenschlußstrom nur gleich einem Bruchteil des über den Anker fließenden Stromes ist.

Die Wirkungsweise werde an Hand der Vektordiagramme 7b und 7c kurz erläutert, wobei Widerstand, Streuung usw. unberücksichtigt bleiben. Fig. 7b stellt die

Digitized by Google

Spannungen dar. Die Summe der beiden Transformatorspannungen s_1 und s_2 wird abbalanziert durch die Selbstinduktionsspannung S der Feldwicklung (senkrecht zur Feldphase Φ) und die Gegen-EMK A des Ankers (in Richtung Φ); an der Drosselspule stellt sich also die Spannung D ein.

Die Ströme sind im Diagramm 7c wiedergegeben. Der Strom S in der Statorwicklung hat dieselbe Richtung wie das Feld, der Nebenschlußstrom D in der Drosselspule eilt seiner Spannung um 90° nach, der Ankerstrom A ergibt sich somit als die andere Seite des Parallelogrammes. Man sieht ohne weiteres, daß der Ankerstrom durch entsprechende Bemessung der Verhältnisse mit der Spannung (s_1, s_2) phasengleich oder sogar voreilend gemacht werden kann. Es wird also durch die Drosselspule tatsächlich eine Verbesserung des Leistungsfaktors erzielt, und zwar in um so höherem Maße, je größer die Spannung s_2 gegenüber s_1 ist.

Bekanntlich würde man übrigens dasselbe durch einen Ohmschen Widerstand parallel zur Feldwicklung S erreichen können, aber mit großen Verlusten, die bei der Drosselspule nicht vorhanden sind.

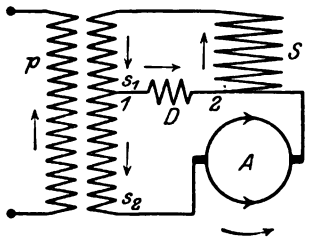


Fig. 7a.

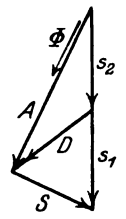


Fig. 7b.

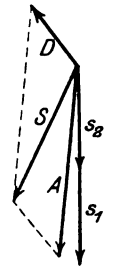


Fig. 7c.

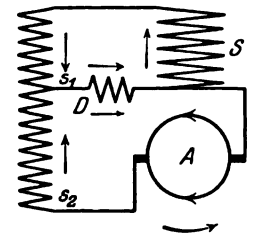


Fig. 7d.

Indessen tritt auch hier Selbsterregung ein. Denkt man sich wieder (Fig. 7d) den Transformator vom Netz abgetrennt und den Anker von außen her im selben Sinne wie vorher, also im Motorsinne, angetrieben, so ergibt sich grundsätzlich ganz dasselbe Bild wie in Fig. 6b, mit dem einzigen Unterschiede, daß die selbsterregten Ströme von Anker und Feld beide durch die Drosselspule D fließen müssen. Letztere bewirkt eine gewisse transformatorische Verkettung der beiden Ströme im Verhältnis 1:1, und zwar im entgegengesetzten Sinne wie die Verkettung durch die Transformatorspulen s_1 und s_2; die Drosselspule hat hier also eine ganz ähnliche Wirkung, wie die transformatorische Verkettung von Stator- und Ankerwicklung beim Repulsionsmotor mit Ankerspeisung (Fig. 5). Die Selbsterregung wird also erschwert, sie tritt nur dann ein, wenn die Spannung s_2 im Verhältnis zu s_1 eine gewisse Größe erreicht, der kritische Grenzwert ist theoretisch (unter denselben Vernachlässigungen wie früher) wieder durch das Übersetzungsverhältnis 1:1 gegeben. Die Spannung s_2 darf also höchstens ebenso groß sein wie s_1, in der Praxis aus den schon im früheren Fall auseinandergesetzten Gründen noch erheblich kleiner. Man muß also den Anschlußpunkt der Drosselspule entsprechend verschieben, d. h. Spannung s_1 groß und s_2 klein machen, dabei geht aber die erstrebte Verbesserung des Leistungsfaktors größtenteils verloren.

Es möge übrigens noch erwähnt werden, daß auch bei der Schaltung 5 eine ähnliche Verbesserung des Leistungsfaktors erzielt werden würde. Gerade diejenigen Schaltungen also, die eine solche Verbesserung mit sich bringen, sind mit Selbsterregung behaftet, während — wie im folgenden Abschnitt gezeigt werden wird — diejenigen, die den Leistungsfaktor nicht verbessern, von Selbsterregung frei sind.

d) Doppelt gespeister Motor, Feldwicklung vom Ankerstrom erregt. Aus dem früher behandelten Repulsionsmotor mit Ankerspeisung (Fig. 5) lassen sich nämlich

Digitized by Google

durch leichte Änderung andere Schaltungen ableiten, die keine Selbsterregung mehr aufweisen. Bei der Schaltung Fig. 5 kam die Selbsterregung dadurch zustande, daß die mit der Transformatorspule s_1 verbundene Statorwicklung S in der mit der Transformatorspule s_2 verbundenen Ankerwicklung A eine Rotationsspannung im Generatorsinne erzeugt. Eine solche Spannung könnte nicht entstehen, wenn die Achsen der Stator- und Ankerwicklung zusammenfallen würden. Man braucht daher die Wicklung S nur gemäß Fig. 3 wieder in ihre beiden Komponenten, p in Richtung der Bürstenachse und F senkrecht dazu, zu zerlegen und nur die erstere mit der Transformatorspule s_1 zu verbinden, letztere dagegen mit der Ankerwicklung in Reihe zu schalten. Man erhält dann die Schaltung 8. Die Arbeitsweise als Motor (Fig. 8a) ist unverändert, denn die beiden Spulen p und F wirken ebenso, wie die Resultierende S gewirkt hatte; in bezug auf Selbsterregung (Fig. 8b) ist das Verhalten aber völlig verschieden. In der Wicklung p bleibt die Stromrichtung zwar dieselbe, in F aber wechselt sie zugleich mit der Ankerwicklung. Die Resultierende R aus p und F (Fig. 8c) geht daher auf die andere Seite von p, also auch auf die andere Seite der Bürstenachse, und erzeugt eine Rotationsspannung nicht im Generator-, sondern im Motorsinne, so daß die Remanenz ausgetilgt wird.

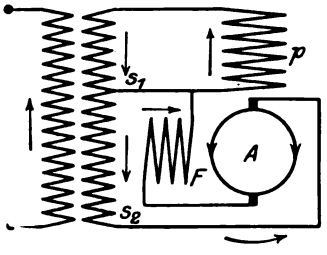


Fig. 8a.

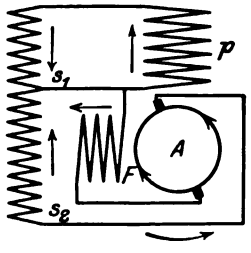


Fig. 8b.

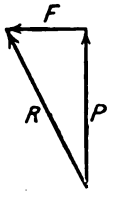


Fig. 8c.

Aus dem Diagramm 8c sieht man auch, daß man die Bürsten sogar um ein gewisses Stück im Drehsinne verschieben darf; erst wenn die Bürstenachse über die Richtung der Resultierenden R hinausgedreht wird, tritt wieder Selbsterregung ein.

Auch hier ist wieder das Übersetzungsverhältnis zwischen den Wicklungen p und A und das zwischen den Transformatorspulen s_1 und s_2 von ähnlichem Einfluß, wie bei der Schaltung 5; je größer unter sonst gleichen Umständen die Spannung s_2 gegenüber s_1 ist, um so leichter tritt Selbsterregung ein.

Zieht man die Bürsten aus der Stellung parallel zur Achse p gegen den Drehsinn zurück, so tritt erst recht keine Selbsterregung auf. Bei derartigen Motoren ist somit eine Regelung durch Verschieben der Bürsten gegen die Drehrichtung, also im Sinne einer Erhöhung der Drehzahl, ohne weiteres zulässig, im entgegengesetzten Sinne aber nur in gewissen Grenzen. Man muß daher in vielen Fällen außer der Bürstenverschiebung noch eine Spannungsregelung vorsehen.

e) Doppelt gespeister Motor, Feldwicklung vom Differentialstrom erregt. Da die kritische Bürstenstellung von der Lage der Resultierenden im Diagramm 8c abhängt, so kann man sie offenbar dadurch noch weiter hinausschieben, daß man der Statorspule p gemäß Fig. 9a eine im Sinne der Drehung verschobene Lage gibt. Das Amperewindungsdiagramm gibt dann das Bild Fig. 9b. Die Spule p wirkt dabei allerdings der Feldwicklung F zum Teil entgegen, man muß der letzteren zum Ausgleich eine etwas höhere Windungszahl geben, dadurch wird der Vektor F im Diagramm 9b wieder größer und die Neigung der Resultierenden R noch stärker, also die zulässige Bürstenverschiebung noch erweitert.

Schaltet man den Motor auf die andere Drehrichtung um, so müßte man die Wicklung p entsprechend nach der anderen Seite verschieben. Eine mechanische Ver-

Digitized by Google

drehung ist natürlich nicht möglich, man zerlegt deshalb die Wicklung p in bekannter Weise in zwei Komponenten, eine (p') senkrecht zur Feldwicklung F und eine parallel dazu, legt beide in Reihe und schaltet beim Wechsel der Drehrichtung nur den zweiten Wicklungsteil zugleich mit der Feldwicklung um.

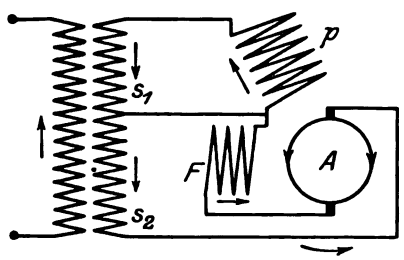


Fig. 9a.

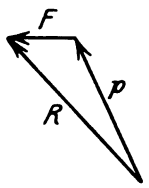


Fig. 9b.

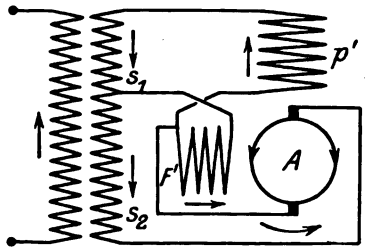


Fig 9c.

Man kann dem Windungsverhältnis der Spule p gegenüber der Ankerwicklung A an sich, wie bei jedem Repulsionsmotor, eine beliebige Größe geben. Wählt man es derart, daß der parallel zur Feldwicklung F liegende Wicklungsteil von p dieselbe Windungszahl wie diese erhält, so kann man beide vereinigen und gelangt dann zu der Schaltung 9c. Die nunmehr gemeinsame Feldwicklung F' wird vom Ankerstrom im einen Sinne durchflossen, von dem (bedeutend kleineren) Strom der Statorwicklung p' im entgegengesetzten Sinne, insgesamt also von der Differenz beider Ströme. Diese als „Differential-Erregung" bekannte Schaltung ergibt gegen das Schema 9a den Vorteil geringeren Raumbedarfs für die Feldwicklung F (eine einzige Wicklung mit dem Differenzstrom statt zweier entgegenwirkender Wicklungen) und erspart zugleich den besonderen Umschalter für den einen Teil der Wicklung p.

Der Bereich, innerhalb dessen die Regelung durch Bürstenverschiebung erfolgen kann, ist hier gegen die Schaltung 8 zwar nicht unerheblich erweitert, aber doch nicht derart, daß nicht bisweilen eine zusätzliche Regelung durch Spannungsänderung nötig wäre.

II. Selbsterregung innerhalb der Motorwicklungen allein.

Bei den bisher behandelten Fällen kommt die Selbsterregung im Motorbetrieb stets durch die gemeinsame Wirkung des Motors und des zugehörigen Transformators zustande. Schaltet man den Motor vom Transformator ab (wobei meist auch die Verbindung zwischen den einzelnen Motorwicklungen unterbrochen wird), so verschwindet die Selbsterregung.

Es gibt nun aber auch eine Reihe von Fällen, wo die Selbsterregung im Motorbetrieb auch dann eintritt, wenn der Motor vom Transformator abgetrennt und jede Wicklung (Anker-, Stator-, Feldwicklung) für sich abgeschaltet wird, ja selbst dann, wenn die Statorwicklung vollständig entfernt wird. Diese Fälle sollen nachstehend besprochen werden.

Sie haben alle das Eine gemeinsam, daß jede Wicklung aus mindestens zwei (Ankerwicklung also 2×2) parallelen Teilen bestehen und die Polzahl größer als 2 sein muß. Der selbsterregte Strom verläuft nämlich so wie in einer Maschine, die nur die Hälfte (oder $^1/_3$ usw.) der Polzahl hat, wie der Motor in Wirklichkeit besitzt.

a) Zwei parallele Wicklungszweige im Stator. Als einfachsten Fall denken wir uns nach Fig. 10 einen vierpoligen Reihenschlußmotor mit Parallelwicklung im Anker und vier Feldspulen im Stator, die in zwei parallele Gruppen von je zwei in Reihe liegenden Spulen geschaltet sind. Der Verlauf des von außen zugeführten Motorstromes ist in Fig. 10a durch Pfeile dargestellt. Wird nun dieser Motor vom Netz abgeschaltet, und zwar das Feld für sich und der Anker für sich (Fig. 10b), so sieht

Digitized by Google

man, daß trotzdem im Felde sowohl wie im Anker noch Stromwege vorhanden sind, durch die Strom fließen könnte.

Im Stator bilden die vier Feldspulen einen in sich geschlossenen Stromkreis; geht durch diesen ein Strom, so hat er in zwei Spulen dieselbe, in den beiden anderen die entgegengesetzte Richtung wie vorher beim Motorbetrieb; er erzeugt also nicht mehr vier Pole in der Reihenfolge n—s—n—s, sondern n—s—s—n. Man kann sich die beiden n-Pole vereinigt denken, ebenso die beiden s-Pole, das ganze System ist dann gleichwertig der in Fig. 10c dargestellten zweipoligen Anordnung mit in sich kurzgeschlossener Statorwicklung.

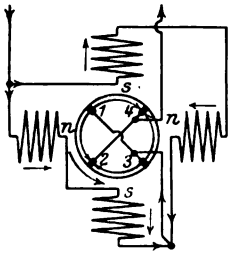


Fig. 10a.

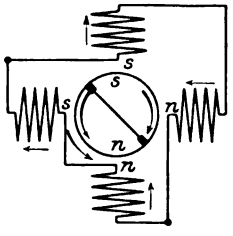


Fig. 10b.

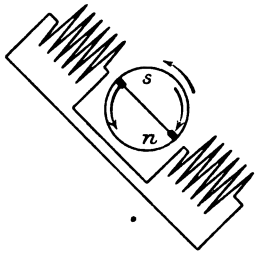


Fig. 10c.

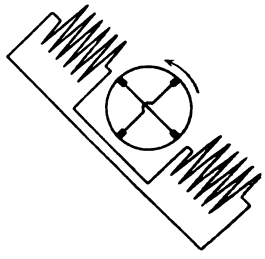


Fig. 10e.

Im Anker liegt die Sache ähnlich. Die beiden + Bürsten sind nach wie vor unter sich verbunden (die — Bürsten mögen zunächst unberücksichtigt bleiben); es ist also an sich möglich, daß aus irgendeiner Ursache ein Strom innerhalb der Ankerwicklung auf die eine + Bürste (z. B. rechts unten) zufließt, durch die Verbindungsleitung zu der anderen + Bürste (oben links) läuft und sich in der Ankerwicklung schließt. Der Stromverlauf ist also auch hier, äußerlich betrachtet, so wie in einem zweipoligen, über die Bürsten kurzgeschlossenen Anker.

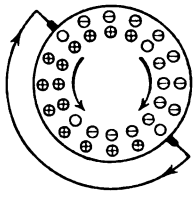


Fig. 10d.

Es fragt sich nun, wie ein solcher Strom in dem ursprünglich doch vierpoligen Anker wirkt. Das hängt von der Wicklungsart ab.

Eine gewöhnliche Ringwicklung gibt dem Anker gar keine ausgesprochene Polzahl, sie kann also je nach der Anzahl der Bürsten ohne weiteres und ebenso gut für jede beliebige Polzahl dienen.

Nicht ganz so willkürlich ist die Polzahl in einer Trommel-Parallelwicklung (Schleifenwicklung). Meist entspricht der Wicklungsschritt einer Polteilung (Durchmesserwicklung), damit wäre also eine bestimmte Polzahl gegeben, doch kann dieselbe Wicklung schließlich auch für eine verminderte Polzahl benutzt werden als sogenannte Sehnenwicklung. Ein Anker mit Durchmesserwicklung für vier Pole bildet in bezug auf ein zweipoliges Feldsystem eine Sehnenwicklung mit einem Wickelschritt gleich der halben Polteilung (Fig. 10d), er wirkt also als zweipoliger Anker weniger vollkommen, die Erfahrung lehrt indessen, daß dies kein Hindernis für Selbsterregung bildet, selbst bei noch größeren Unterschieden in der Polzahl.

Eine Wellenwicklung dagegen gibt dem Anker auf jeden Fall eine ausgesprochene Polzahl, weil eine ganze Welle gleich der doppelten Polteilung sein muß, auch bei Sehnenwicklung; ein solcher vierpoliger Anker ist also in einem zweipoligen Feldsystem unwirksam, er gibt daher auch keine Selbsterregung.

Bei den weiteren Betrachtungen soll deshalb stets eine Parallelwicklung vorausgesetzt werden. Kehren wir zum Schema Fig. 10c zurück, so haben wir nunmehr festgestellt, daß man die vierpolige Statorwicklung mit zwei parallelen Zweigen sich ersetzt denken kann durch eine in sich geschlossene zweipolige, und daß auch der

Digitized by Google

Anker wie ein zweipoliger wirken kann, der über das eine (z. B. +) Bürstenpaar kurzgeschlossen ist.

Betrachtet man Schema 10c, so fällt sofort die Ähnlichkeit mit dem Schema 3d des in sich kurzgeschlossenen Repulsionsgenerators auf. Sobald daher der Anker in Drehung versetzt wird, tritt Selbsterregung ein wie bei jenem.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei der Darstellungsweise in Fig. 10c die Ankerachse nicht mit der Bürstenachse zusammenfällt, sondern, wie aus Fig. 10d hervorgeht, senkrecht von oben nach unten geht, also unter 45^0 zur Achse der Statorwicklung liegt; in dieser Stellung ist bekanntlich die Selbsterregung am stärksten.

Dreht sich der Anker im entgegengesetzten Sinne, so übernimmt der andere, bisher unberücksichtigt gebliebene Bürstensatz die Rolle des ersten, die Erscheinung bleibt im übrigen die gleiche.

In Wirklichkeit liegen nun stets beide Bürstensätze gleichzeitig auf. Das vollständige Schema ist also das der Fig. 10e; die Maschine verliert dadurch vollständig ihren Charakter als Repulsionsmotor, geht vielmehr in den bekannten Milchmotor mit Nebenschlußcharakter über. Es entsteht daher die Frage, ob ein solcher sich ebenfalls selbst erregt, wenn die Statorwicklung kurzgeschlossen und der Anker angetrieben wird.

Wenn man die Maschine nach Fig. 10e als Motor betreiben will und zu dem Zweck die Statorwicklung öffnet und ihr Spannung zuführt, so würde bekanntlich der Anker ebensowenig wie ein normaler Kurzschlußanker anlaufen, wenn beide Bürstensätze symmetrisch zur Statorachse stehen. Bei abweichender Lage bilden sich infolge der verschiedenen Wicklungsverteilung in Stator und Anker gewisse Oberfelder aus, die zur Folge haben können, daß die Maschine doch mit mehr oder minder großem Drehmoment anzieht.

Entsprechend ist auch das Verhalten als Kurzschlußgenerator. Stehen die Bürsten symmetrisch, so ist die „Generatorwirkung" des einen Satzes gegenüber der Statorwicklung ebenso stark wie die „Motorwirkung" des anderen. Weicht die Lage der Bürsten aber hiervon ab (und zwar genügt schon ein ganz geringes Maß), so kann die Generatorwirkung überwiegen, so daß Selbsterregung eintritt.

Die rechnerische Verfolgung dieser Vorgänge führt zu ziemlich umfangreichen Formeln und soll deshalb hier nicht gegeben werden, zumal der im nächsten Abschnitt zu behandelnde Fall mit vier parallelen Wicklungszweigen im Stator grundsätzlich ganz ähnliche Erscheinungen, aber weit einfachere Gleichungen ergibt.

b) Vier parallele Wicklungszweige im Stator. Im vorigen Abschnitt war der Fall behandelt, daß im Stator (eine vierpolige Maschine vorausgesetzt) zwei parallele Wicklungszweige vorhanden sind. Der von außen zugeführte Motorstrom durchfließt beide Zweige parallel und erzeugt ein vierpoliges Feld; der innere Kurzschlußstrom geht durch beide Zweige hintereinander und erzeugt ein zweipoliges Feld.

Enthält nun der Stator vier parallele Wicklungszweige, so ergibt sich das Bild 11. Der von außen zugeführte Motorstrom (Fig. 11a) durchfließt alle vier Zweige parallel und erzeugt vier Pole n, s, n, s. Der Kurzschlußstrom hingegen kann jetzt zwei Wege durchlaufen; wenn er aus der ersten Spule hinaustritt, kann er in die dritte oder in die zweite eintreten. Danach ergeben sich die beiden Fälle Fig. 11b und 11d.

Im ersten Falle wird die Polfolge n, s, s, n erzeugt, die Wicklung ist also gleich wertig einer Kurzschlußwicklung in der Achse I—I′ (Fig. 11c).

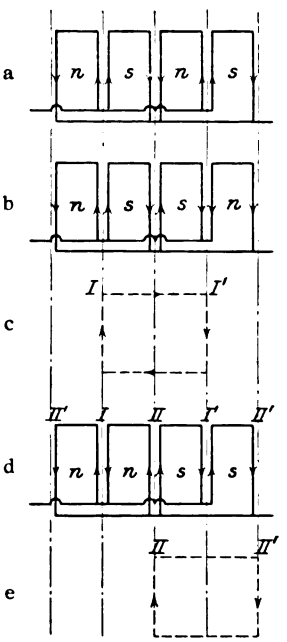


Fig. 11a—e.

Digitized by Google

Im zweiten Fall (Fig. 11d) entsteht die Polfolge n, n, s, s, die Wicklung ist also gleichwertig einer Kurzschlußwicklung in der Achse II—II′ (Fig. 11e), also um 90° gegen die erste verschoben.

Beide Kurzschlußströme können auch gleichzeitig auftreten, die Statorwicklung ist somit als Ganzes in bezug auf den Kurzschlußstrom gleichwertig zwei Kurzschlußwicklungen I—I′ und II—II′, die eine gegen die andere um 90° verschoben.

Man sollte meinen, daß hierdurch die Entstehung zweipoliger Felder überhaupt verhindert würde und deshalb auch keine Selbsterregung auftreten könnte. Das trifft indessen nicht zu, vielmehr verhält sich die Maschine ähnlich wie im vorigen Fall. Liegen die Ankerachsen genau symmetrisch zu den Statorachsen, so entstehen keine inneren Ströme, wohl aber bei abweichender Stellung. Die Erscheinung ist aber hier insofern etwas anders, als sich wegen der Symmetrie in beiden Achsen gleiche Felder ausbilden, die auch zeitlich gegeneinander verschoben sind und somit ein Drehfeld bilden.

Nachstehend sollen die Zustandsgleichungen für diesen Fall entwickelt werden.

Die Bürsten seien gemäß Abb. 12a um den Winkel $\varphi/2$ aus der Neutralen im Drehsinn verschoben. Von Bürste 1 aus fließe der Strom J_1 durch die Ankerwicklung

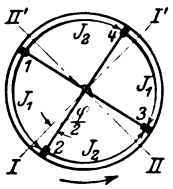


Fig. 12a.

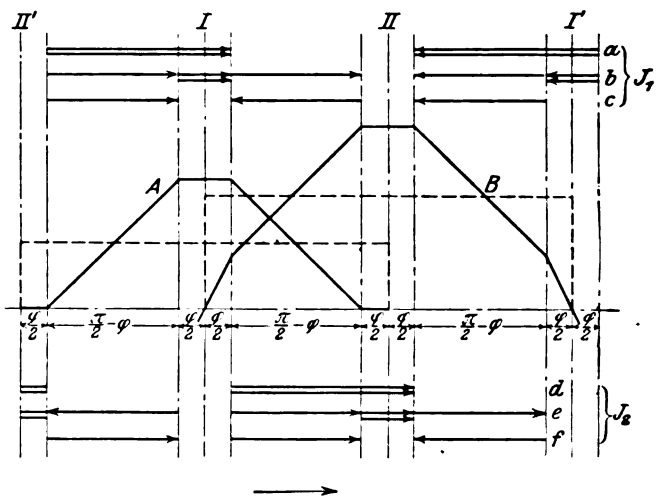


Fig. 12b.

nach Bürste 3; ebenso Strom J_2 von Bürste 2 durch den Anker nach Bürste 4. Der Strom J_1 gibt dann, wie an Hand der Fig. 10d gezeigt wurde, wirksame Amperewindungen auf dem Bogen 1 bis 2 und 4 bis 3; der Strom J_2 entsprechend auf dem Bogen 2 bis 3 und 1 bis 4.

Denkt man sich den Ankerumfang geradlinig abgewickelt und die wirksamen Amperewindungen von J_1 und J_2 in bekannter Weise in Komponenten nach den Achsen I und II zerlegt, so erhält man das Bild der Fig. 12b. Oben ist der Stromkreis J_1 dargestellt und zwar a unzerlegt, b Komponente nach Achse II, c Komponente nach Achse I; entsprechend unten Stromkreis J_2 und zwar d unzerlegt, e Komponente nach I′ und f Komponente nach II.

Der Strom J_1 erzeugt in der Achse I das Feld A, in der Achse II das Feld B. Setzt man der Einfachheit halber die Amperewindungen gleich dem Strom mal dem wirksamen Bogen und das Feld gleich diesen Amperewindungen mal Bogen mal einer entsprechenden Konstanten C, so haben die Felder A und B die Größe:

$$A = C J_1 \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad \ldots \quad 1)$$

$$B = C \frac{J_1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right). \quad \ldots \quad 2)$$

Digitized by Google

Das Feld A durchsetzt die im Stator liegende Kurzschlußwicklung II—II'. Wird deren Widerstand vernachlässigt, so erzeugt sie ein Gegenfeld von gleicher Größe, aber natürlich Rechteckform (gestrichelte Linie); das Feld A wird also nicht vollständig aufgehoben, es bleiben vielmehr in der Mitte ein Restbetrag in Richtung des Feldes A, an beiden Enden solche in Richtung des Gegenfeldes übrig. Das Gegenfeld erstreckt sich über den Bogen π, die Ordinate hat also den Wert

$$\frac{C J_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Ebenso erzeugt die Kurzschlußwicklung I—I' ein Gegenfeld zu B mit der Ordinate

$$\frac{C J_1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right).$$

Auch der Strom J_2 ruft Felder von gleicher Form und Größe und entsprechende Gegenfelder in den Kurzschlußwicklungen hervor, nur sämtlich um 90^0 verschoben.

Diese verschiedenen Felder erzeugen in den Stromkreisen J_1 und J_2 folgende Rotationsspannungen.

Das Gesamtfeld des Stromkreises J_1 (also Felder A und B zusammen) ergibt in diesem Kreis selbst bekanntlich keine Rotationsspannung, im Stromkreis J_2 dagegen die Spannung

$$K J_1 \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2},$$

wo K eine von den Ankerdaten und der Umlaufzahl abhängige Konstante bedeutet.

Das von der Kurzschlußwicklung II—II' hervorgerufene Gegenfeld zu A erzeugt im Stromkreis J_1 die Spannung

$$-\frac{K J_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{\pi}{2}$$

und im Stromkreis J_2

$$-\frac{K J_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

Das Gegenfeld zu B erzeugt im Stromkreis J_1 die Spannung

$$+\frac{K J_1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

und im Stromkreis J_2

$$-\frac{K J_1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right)\frac{\pi}{2}.$$

Insgesamt geben also die von J_1 herrührenden Felder und Gegenfelder im Stromkreis J_1 die Spannung

$$-\frac{K J_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{\pi}{2} + \frac{K J_1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = K J_1 \frac{\varphi}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(\pi - \varphi)$$

und im Stromkreis J_2

$$K J_1 \frac{\pi^2}{4} - \frac{K J_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2 - \frac{K J_1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi\varphi - \varphi^2\right)\frac{\pi}{2} = K J_1 \frac{\varphi}{4}(\pi - \varphi).$$

Die vom Stromkreis J_2 herrührenden Felder und Gegenfelder erzeugen nun ganz analoge Spannungen in beiden Stromkreisen, aber sämtlich um 90^0 räumlich verschoben; es tritt also die Richtung J_2 anstelle von J_1, und $-J_1$ anstelle von J_2; man erhält somit für den Kreis J_2 die Spannung

$$K J_2 \frac{\varphi}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(\pi - \varphi)$$

Digitized by Google

und für den Kreis J_1 $\qquad -K J_2 \frac{\varphi}{4}(\pi - \varphi)$.

Ist nun W der Ohmsche Widerstand und L der Selbstinduktionskoeffizient jedes Stromkreises (der Koeffizient der gegenseitigen Induktion ist Null), so ergeben sich die Zustandsgleichungen:

$$K J_1 \frac{\varphi}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(\pi - \varphi) - K J_2 \frac{\varphi}{4}(\pi - \varphi) - W J_1 - L \frac{d J_1}{d t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$K J_2 \frac{\varphi}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(\pi - \varphi) + K J_1 \frac{\varphi}{4}(\pi - \varphi) - W J_2 - L \frac{d J_2}{d t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Der übereinstimmende Bau beider Gleichungen rührt von der Symmetrie nach beiden Statorachsen her.

Die Lösung lautet:

$$J_1 = i e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$J_2 = i e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

worin i, γ und δ Konstanten sind und α und β den Wert haben

$$\alpha = \frac{K \frac{\varphi}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)(\pi - \varphi) - W}{L}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$\beta = \frac{K \frac{\varphi}{4}(\pi - \varphi)}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Selbsterregung tritt ein, wenn α positiv ist; da der Faktor K mit der Umlaufszahl proportional wächst, der Widerstand W aber meist sehr klein ist, so hängt der Wert α hauptsächlich vom ersten Gliede ab; dieses ist Null für

$$\frac{\varphi}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \varphi &= 0 \\ \frac{\varphi}{2} &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$\left.\begin{aligned} \pi - \varphi &= 0 \\ \frac{\varphi}{2} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

also immer dann, wenn die Ankerachsen mit den Statorachsen zusammenfallen oder genau in der Mitte stehen, d. h. bei symmetrischer Lage der Bürsten zum Stator.

Der Koeffizient α ist positiv, es tritt also Selbsterregung ein, wenn der Verschiebungswinkel $\frac{\varphi}{2}$ zwischen Null und 45^0 liegt; dagegen negativ zwischen 45^0 und 90^0. ebenso zwischen Null und -45^0; hierbei ist also die Maschine von Selbsterregung frei.

In Wirklichkeit nimmt die Stromstärke nicht entsprechend dem Wert $e^{\alpha t}$ dauernd zu, der Vorgang spielt sich vielmehr, wie stets bei Selbsterregung, so ab, daß sich bei wachsendem Strom das Eisenblech magnetisch sättigt; K wird immer kleiner, bis α Null ist, es stellt sich dann ein Ruhezustand ein und die Phasenverschiebung zwischen beiden Strömen wird

$$\gamma - \delta = \frac{\pi}{2},$$

Digitized by Google

so daß sie ein Drehfeld geben, das im Drehsinn umläuft. Die Frequenz hängt nach Gl. 8) von der Bürstenstellung ab und wächst mit der Drehzahl, ist aber kleiner als synchron.

c) Ausgeprägte Pole im Statoreisen. Selbsterregung in Motorschaltung kann auch ohne Mitwirkung der Statorwicklung zustande kommen, wenn das Statoreisen ausgeprägte Pole besitzt. Bedingung ist auch hier Parallelwicklung im Anker und eine Polzahl über zwei. Die Erscheinung äußert sich dann ähnlich wie im vorigen Fall; stehen die Bürsten in der Neutralen oder um 45^0 dagegen verschoben, so tritt keine Selbsterregung auf, wohl aber in gewissen Zwischenbereichen; die Ströme in beiden Ankerachsen sind im Ruhezustande wieder um 90^0 phasenverschoben und geben ein Drehfeld.

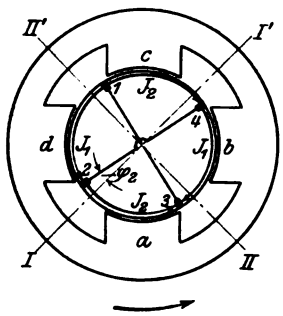


Fig. 13a.

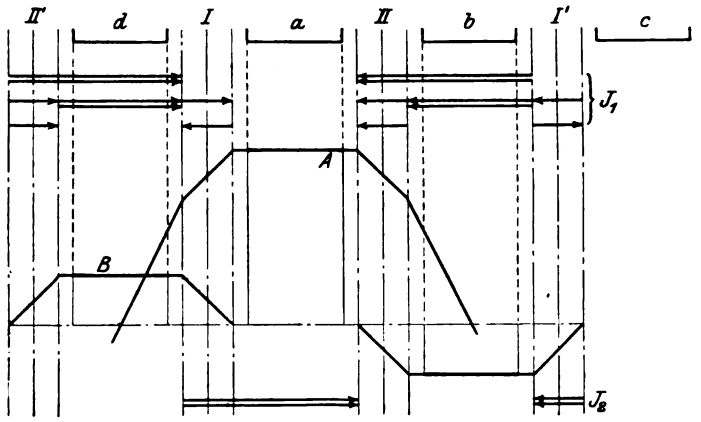


Fig. 13b.

Der Motor ist in Fig. 13a dargestellt. Die Bürsten sind aus der Neutralen gegen den Drehsinn um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ zurückgeschoben. Die Ströme seien wieder J_1 und J_2 wie im Fall Fig. 12a.

Denkt man sich zunächst ein Bürstenpaar entfernt, so wird die Maschine gleichwertig dem Schema 4. Werden die Bürsten aus der Neutralen gegen den Drehsinn zurückgezogen, so erregt der zweipolig kurzgeschlossene Anker sich selbst mit Gleichstrom; kommen die Bürsten unter Mitte Pol (45^0), so hört die Selbsterregung auf und erscheint erst wieder, wenn die Bürsten über die nächste Neutrale (90^0) hinausgeschoben werden.

Liegen beide Bürstenpaare auf, so bleibt der Bereich, innerhalb dessen Selbsterregung eintritt, derselbe, aber es entstehen jetzt in beiden Ankerachsen Ströme und zwar gegeneinander phasenverschobene Wechselströme.

In Fig. 13b sind die vom Ankerstrom J_1 erzeugten Amperewindungen dargestellt, und zwar oben unzerlegt, darunter die Komponenten in Richtung der Polachsen a und b. Diese rufen die Felder A und B hervor. Das gleiche Bild, nur um eine Polteilung verschoben, gibt der Strom J_2. Behält man die im vorigen Abschnitt benützte Bezeichnungsweise bei, so ergeben sich die Zustandsgleichungen:

$$(K\varphi - W)\,J_1 - K\frac{\pi}{2}\,J_2 - L\frac{dJ_1}{dt} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$(K\varphi - W)\,J_2 + K\frac{\pi}{2}\,J_1 - L\frac{dJ_2}{dt} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

gültig für Verschiebung innerhalb der neutralen Zone, also höchstens bis an die Polkanten.

Digitized by Google

Die Lösung ist wieder:

$$J_1 = i\, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma), \quad \ldots \quad 3)$$

$$J_2 = i\, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \quad \ldots \quad 4)$$

worin

$$\alpha = \frac{K\varphi - W}{L}, \quad \ldots \quad 5)$$

$$\beta = \frac{K\frac{\pi}{2}}{L}. \quad \ldots \quad 6)$$

Selbsterregung tritt ein, wenn der Exponent α positiven Wert hat, wenn also

$$K\varphi > W.$$

Bei positivem Verschiebungswinkel (gegen den Drehsinn) braucht also der Faktor K oder mit anderen Worten die Drehzahl nur genügend hoch getrieben zu werden; bei Verschiebung im Drehsinn dagegen tritt keine Selbsterregung ein.

Im Ruhezustand sind auch hier beide Ströme um 90^0 in der Phase gegeneinander verschoben und geben ein Drehfeld.

Der hier behandelte Fall liegt bei jedem normalen Gleichstrommotor mit Parallelwicklung im Anker vor, wenn dessen Bürsten gegen die Drehrichtung zurückgezogen sind. Allerdings haben solche Maschinen im allgemeinen einen verhältnismäßig schwachen Anker und überdies großen Luftspalt und (ausgenommen bei stark geschwächtem Feld) hoch gesättigtes Eisen, die Selbsterregnng ist also erschwert.

d) Höhere Polzahlen. In all den Fällen der Selbsterregung bei parallelen Stromzweigen waren vierpolige Maschinen vorausgesetzt.

Ist die Polzahl ein Vielfaches von vier, so bleibt die Erscheinung die gleiche; bei einer achtpoligen Maschine beispielsweise verläuft der Selbsterregungsstromkreis vierpolig.

Ist die Polzahl nicht durch vier teilbar, so bildet sich kein Zweiphasenstrom aus, sondern ein solcher von entsprechend höherer Phasenzahl, bei sechs Polen beispielsweise Dreiphasenstrom; doch wird die Wirkung um so schwächer, je höher die Phasenzahl ist.

5. Abhilfsmittel.[1])

In den Fällen, wo die Selbsterregung durch Zusammenwirken von Motor und Transformator zustande kommt, bleibt nichts weiter übrig, als die gefährlichen Schaltungen zu vermeiden, wenn man nicht zu den bekannten Hilfsmitteln, wie Ohmschem Widerstand, Eisensättigung usw. greifen will, was sich in der Praxis aber meist von selbst verbietet.

Bei parallelen Wicklungszweigen dagegen gibt es einige Mittel zur Beseitigung der Selbsterregung, die nachstehend erläutert werden mögen.

A. Zwei Statorzweige, Spulen abwechselnd geschaltet.

Sind im Stator zwei parallele Wicklungszweige vorhanden, so kann man sich in der Weise helfen, daß man die Spulen abwechselnd dem einen und anderen Zweig zuweist; sämtliche Nordpole gehören dann zu der einen, sämtliche Südpole zu der anderen Gruppe. Der selbsterregte Strom würde beide Zweige hintereinander durchlaufen, den einen also in umgekehrter Richtung, und somit entweder lauter Nord- oder lauter Südpole erzeugen, was nicht möglich ist.

Bei größerer Zahl der parallelen Zweige nutzt dies Mittel nichts.

[1]) Vgl. D.R.P. Nr. 283721 der Bergmann-Werke.

Digitized by Google

B. Auflösen der Verbindung zwischen gleichnamigen Bürsten.

Dies Mittel dürfte am leichtesten verständlich werden, wenn man sich den vierpoligen Motor von Fig. 10 in zwei einzelne Motoren mit je zwei Polen gemäß Fig. 14 zerlegt denkt. Die gleichnamigen Bürsten 1 und 3 sind unter sich verbunden, ebenso 2 und 4. Der von außen zugeführte Motorstrom durchfließt beide Maschinen parallel von oben nach unten; der Selbsterregungsstrom dagegen hat die in Fig. 14 durch Pfeile bezeichnete Richtung. Läßt man die Verbindungsleitung 1 bis 3 weg, so wird dem Selbsterregungsstrom der Weg abgeschnitten. Legt man nun beide Motoren wieder zu der vierpoligen Maschine von Fig. 10 zusammen, so braucht man nur die Verbindung zwischen den Bürsten 1 bis 3 zu öffnen und Bürste 1 an das Ende des einen, Bürste 2 an das Ende des anderen Statorzweiges anzuschließen. Hierdurch wird nicht nur die Selbsterregung verhindert, sondern gleichzeitig auch eine gleichmäßige Verteilung des von außen zugeführten Motorstromes auf die einzelnen Ankerzweige bewirkt (allerdings in Generatorschaltung gerade das Gegenteil).

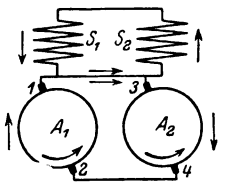


Fig. 14.

Sind im Stator vier parallele Zweige vorhanden, so löst man auch die Verbindung zwischen den Bürsten 2 und 4 und schließt diese an die Enden des dritten und vierten Statorzweiges an.

C. Kurzschlußwicklung für halbe Polzahl.

Sind im Stator in einer oder zwei Achsen Kurzschlußwicklungen vorhanden (Fig. 10 und 11), so wird, wie oben gezeigt, die Entstehung zweipoliger Felder nicht völlig verhindert, es bleiben vielmehr noch Restfelder bestehen, die zur Selbsterregung Anlaß geben.

Bringt man aber eine größere Zahl von Kurzschlußwicklungen über den Umfang verteilt an, so lassen sich auch die Restfelder beseitigen. Diese Wicklungen können im Stator oder im Anker liegen, sie können auch mit den vorhandenen Motorwicklungen vereinigt werden; jede Windung muß aber zwei Pole umfassen, um das normale vierpolige Motorfeld nicht zu stören.

Jede Kurzschlußwindung hat bekanntlich die Eigenschaft, den Gesamtwert des von ihr umschlossenen Wechselfeldes auf Null zu bringen.

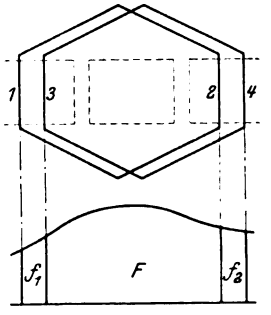


Fig. 15.

In Fig. 15 umschlingt die Kurzschlußwindung 1 bis 2 das Feld $F + f_1$, die Windung 3 bis 4 das Feld $F + f_2$; es muß also sein:

$$F + f_1 = 0$$

$$F + f_2 = 0,$$

somit

$$f_1 = f_2.$$

Es muß also an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen stets die gleiche Feldstärke bei gleicher Polarität herrschen, d. h. es kann sich keinerlei zweipoliges Feld ausbilden, weil hierbei die Polarität verschieden sein müßte.

Die Wirkung einer Kurzschlußwicklung ist um so vollkommener, je höher die Frequenz des sie durchsetzenden Wechselfeldes ist. Nun hat der selbsterregte Strom meist eine sehr viel niedrigere Frequenz, als dem Synchronismus entspricht; die Schlüpfungsfrequenz gegenüber dem Anker ist sehr viel größer, daher legt man die Kurzschlußwicklung besser in diesen statt in den Stator; man hat dabei noch den Vor-

Digitized by Google

teil, daß die einzelnen Windungen gegenüber jedem Punkt des Statorumfanges in jede beliebige Stellung kommen, also einer unendlich fein verteilten Kurzschlußwicklung entsprechen.

Die schon frühzeitig beobachtete günstige Wirkung solcher Wicklungen beruht also nur zum Teil auf der Eigenschaft, die Feldstärke der verschiedenen Pole auszugleichen; mindestens ebenso wichtig ist ihre Fähigkeit, Selbsterregung zu verhindern.

Zur Theorie des Heylandschen Dreiphasen-Repulsionsmotors.

Erster Teil.

Von

Otto Bloch, Bern.

Vorbemerkung.

Unter dem Titel „Drehstrom-Repulsionsmotor" hat A. Heyland in der Elektrotechnischen Zeitschrift[1]) über einen ihm durch D. R. P. Nr. 269307 geschützten Dreiphasen-Kollektor-Kurzschlußmotor berichtet, der später bei Versuchen die überraschende Eigenschaft zeigte, daß er unter gewissen Umständen mit im Primärkreis kompensierter Phasenverschiebung zu laufen imstande ist[2]). Heyland sagt:

„Es ist interessant, daß es sich hier wieder wie häufig um einen Fall handelt, in dem das praktische Ergebnis zu einem unerwarteten Resultate führt und der Theorie vorauseilt, trotzdem angesichts des vorliegenden Resultates die theoretische Erklärung sich dann auch findet."

Es soll im folgenden versucht werden, diese Erklärung zu geben. Dabei soll mehr Wert darauf gelegt werden, die physikalischen Zusammenhänge möglichst einfach und durchsichtig darzustellen, als darauf, die Theorie der Konstruktion der praktisch ausgeführten Maschine schon möglichst genau anzupassen.

Die Angaben über den konstruktiven Aufbau der Heylandschen Maschine sind überdies wenig eingehend. Um über das Wesentliche daran ins klare zu kommen, wollen wir von der Tatsache der beobachteten Phasenkompensation im Primärkreise ausgehen.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß dieses Phänomen bei einer gewöhnlichen Drehfeld-Induktionsmaschine nicht auftreten könnte. Vergegenwärtigen wir uns, wie bei einer solchen die Verhältnisse liegen würden, wenn wir sie mit einem Gleichstrom-Kollektorläufer versehen, auf dessen Kollektor ein Kurzschluß-Bürstensatz gemäß den Angaben von Heyland angebracht ist.

Zwischen zwei unter sich kurzgeschlossenen Bürsten liegt eine Anzahl Läuferwindungen. Nehmen wir der größeren Einfachheit halber an, es handle sich um einen Ringanker und die Bürsten seien so nahe aneinander, daß man den zwischen ihnen liegenden Ringsektor noch hinreichend genau als gerade Spule betrachten kann. Das Drehfeld, das diesen Ringsektor durchsetzt, kann dann in zwei Komponenten zerlegt werden: In eine in Richtung der Sehne des Sektors und in eine in Richtung seines mittleren Radius. Beide Komponenten stehen senkrecht aufeinander und sind, weil es sich nach unserer Voraussetzung um ein reines Drehfeld handelt, Sinusfunktionen der Zeit, die aber um eine Viertelsperiode gegeneinander phasenverschoben sind.

Um unsere Vorstellung von Anfang an genau zu fixieren, halten wir uns z. B. an die Fig. 1. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Drehfeldes (im zweipoligen Schema

[1]) ETZ 1914, S. 85.

[2]) ETZ 1914, S. 125. Heyland, Ein neuer Drehstrommotor mit dem Leistungsfaktor Eins.

Digitized by Google

die sogen. Kreisfrequenz) und Ω die Winkelgeschwindigkeit des Läufers. CA die positive Richtung für die Radialkomponente und CB diejenige für die Tangentialkomponente, so eilt die erstere der letzteren um 90^0 in der Phase zeitlich voraus. Gibt man außerdem den in den Läuferwicklungen auftretenden Größen (EMKe, Ströme) positives Vorzeichen, wenn sie im Sinn der in die Wicklung eingezeichneten Pfeile verlaufen, so steht die EMK der Rotation in Phase mit der radialen Feldkomponente, die EMK der Transformation, die durch die Tangentialkomponente erzeugt wird, eilt dieser um 90^0 in der Phase nach. Da nun die Tangentialkomponente gegenüber der Radialkomponente ebenfalls um 90^0 nacheilt, so stehen also die beiden EMKe unter sich in Gegenphase. Bekanntlich heben sie sich bei Synchronismus ($\Omega = \omega$) exakt auf, während bei Übersynchronismus die EMK der Rotation überwiegt, so daß die resultierende EMK ihr Vorzeichen ändert.

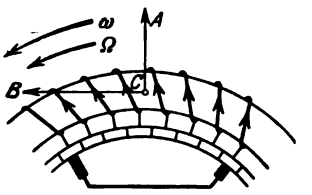


Fig. 1.

Verschwindet nun aber die resultierende EMK im Synchronismus, so ist der Läufer notwendig stromlos; das ganze Feld wird durch den Ständer erzeugt, der wie eine starke Selbstinduktion wirkt und somit unmöglich mit kompensierter Phase arbeiten kann.

Grundzüge der Theorie.

Es bestätigt sich also, daß ein reiner Drehfeldmotor die bei der Heylandschen Maschine festgestellte Kompensation niemals aufweisen kann. In der Tat ist der Motor von Heyland kein reiner Drehfeldmotor[1]), sondern „nach der Art der sogen. Scherbiusmotoren mit Sehnenschritt gewickelt". Es kommt nun darauf an, die das beobachtete Phänomen bedingenden Umstände klar herauszuarbeiten. Wir gehen daher vom Fall des reinen Drehfeldes gleich zum andern Extrem über, wo die Bildung des Drehfeldes vollständig unterbunden ist. Dies ist z. B. der Fall bei einer Maschine mit stark ausgeprägten Polen. Sie gestattet zugleich die klarste Schematisierung.

Nehmen wir wiederum an, der Läufer sei ein Ringanker. Dann haben wir schematisch das beistehende Bild des Eisenweges (Fig. 2). In den Polen I, II und III treten die Flüsse Φ_1, Φ_{II}, Φ_{III} auf, die unter sich die gleiche Amplitude und eine Phasenverschiebung von je 120^0 aufweisen. Ebenso treten drei Flüsse Φ_1, Φ_2, Φ_3, die unter sich in denselben Beziehungen stehen, in den Sektoren 1, 2, 3 des Ringläufers auf. Dasselbe gilt von den Eisenjochen 1′, 2′, 3′. Nehmen wir vereinfachend an, daß der Luftspalt zwischen Läufer und Polflächen verschwindend schmal sei gegenüber dem übrigen Interferrikum, so daß der Fluß gezwungen ist, lediglich längs des Eisenweges zu verlaufen. Die Flüsse stehen dann in der Beziehung des Knotenpunktsgesetzes, d. h.

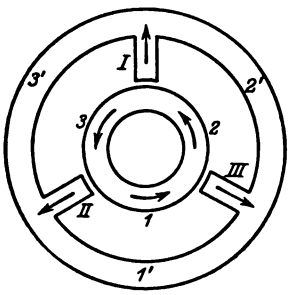


Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_2 - \Phi_3 \\ \Phi_{II} &= \Phi_3 - \Phi_1 \\ \Phi_{III} &= \Phi_1 - \Phi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Dies unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Flüsse in den durch die Pfeile angegebenen Richtungen positiv gezählt werden und daß von allen Streuungen abgesehen werden könne.

[1]) ETZ 1914, S. 85, Spalte 3, Zeile 5.

Digitized by Google

Zeichnen wir das zeitliche Vektordiagramm dieser als sinusförmig variierend vorausgesetzten Wechselflüsse in der Weise auf, daß die Zeitlinie sich mit dem Uhrzeiger bewegt, so erhalten wir aus den Beziehungen 1) die Fig. 3, wenn wir zudem voraussetzen, daß die Numerierung der einzelnen Flüsse zugleich ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge entspreche.

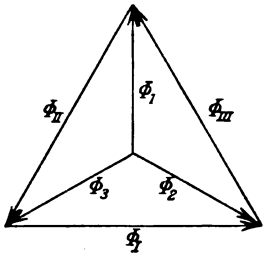


Fig. 3.

Denken wir uns nun auf die Läuferwicklung zwei Bürsten aufgesetzt, so kann je nach der relativen Lage der Bürsten zum Ständer und je nach ihrer gegenseitigen Entfernung einer der folgenden fünf Fälle eintreten:

1. Der durch sie abgegrenzte kleinere Sektor der Läuferwicklung kann ganz und ausschließlich im Bereich eines der Flüsse Φ_1, Φ_2, Φ_3 liegen. Dann wird in ihm nur eine EMK der Transformation erzeugt.

2. Er kann ganz und ausschließlich im Bereich eines der Flüsse Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III} liegen. Dann ist er ausschließlich Sitz einer EMK der Rotation.

Die Größe dieser beiden EMKe kann übrigens durch die gegenseitige Entfernung der beiden Bürsten innerhalb der gegebenen Grenzen reguliert werden.

3. Die betrachtete Läuferspule kann gleichzeitig im Gebiet eines Flusses Φ_1, Φ_2, Φ_3 und eines Flusses Φ_I, Φ_{II}, Φ_{III} stehen. In diesem Falle ist sie gleichzeitig der Sitz einer EMK der Transformation und einer EMK der Rotation.

4. Sie kann unter dem Einfluß eines der Flüsse einer Art und zweier Flüsse der andern Art stehen.

5. Sie kann unter dem Einfluß von zwei Flüssen jeder Art stehen.

Für unsere Betrachtung sind die Fälle 3., 4., 5. von besonderer Bedeutung. Beachten wir, daß z. B. im Fall 3 die beiden Flüsse, welche die EMKe der Transformation und der Rotation erzeugen, gegeneinander um einen von 90^0 verschiedenen Winkel in der Phase verschoben sind, so folgt daraus ohne weiteres, daß diese EMKe nicht in Gegenphase zueinander stehen und sich somit, im Gegensatz zu den zuerst betrachteten Verhältnissen im Drehfeldmotor, bei keiner Drehzahl aufheben. Kurz, die Bürsten können so eingestellt werden, daß der Läufer in keinem Falle, also auch nicht im Leerlauf, stromlos wird, während beim Drehfeldmotor der Leerlauf gerade durch die Stromlosigkeit des Läufers gekennzeichnet ist.

Sollte darin nicht die Möglichkeit eingeschlossen sein, daß dieser Läuferstrom genau der Magnetisierungsstrom der Maschine wird, so daß der Ständerstrom zur Magnetisierung nichts mehr beizutragen braucht und daher in Phase mit der Spannung fließen kann? Die Mannigfaltigkeit der möglichen Bürstenstellungen läßt eine bejahende Antwort von vornherein als wahrscheinlich erscheinen. Um die Bedingungen dieses Sonderfalles zu untersuchen, gehen wir daran, das Vektordiagramm der Maschine aufzustellen.

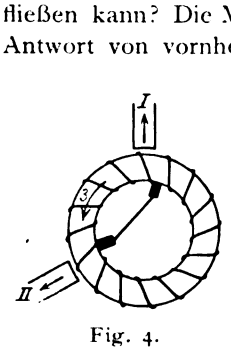


Fig. 4.

Wählen wir z. B. den Fall der Fig. 4, wo die Bürsten genau um eine Polteilung voneinander abstehen und gerade an den rechten Rand der Pole I und II herangerückt sind. Welche elektromotorischen Kräfte entstehen in dem kürzeren Ringsektor des Läufers, wenn dieser im positiven Sinn, d. h. entgegen dem Uhrzeiger drehen möge?

In den Windungen unter Pol I entsteht eine EMK der Rotation. Ist der Fluß Φ_I in seinem positiven Maximum, so ist die EMK ebenfalls in deren Maximalwert und in den äußeren Wicklungsstäben nach hinten gerichtet. In den übrigen Windungen der Spule erzeugt der Fluß Φ_3 eine EMK der Transformation, die dem Fluß um 90^0 in der Phase nacheilt. Φ_3 selbst aber eilt

Digitized by Google

gegenüber Φ_I um 150° nach (vgl. Fig. 3). Die EMK der Transformation eilt somit um 240° nach oder, was das gleiche ist, um 120° vor.

Nun ist aber die EMK der Transformation auch im Stillstand schon vorhanden, bei dem die Maschine als kurzgeschlossener Dreiphasentransformator aufgefaßt werden kann und somit im Primärkreis auf jeden Fall eine gewisse Phasenverschiebung aufweist. Durch Drehung des Läufers tritt nun eine EMK auf, welche um 120° gegenüber der vorhandenen nacheilt und somit den Sekundärstrom noch mehr nacheilend macht, und indirekt also auch den primären. Man sieht ohne weiteres ein, daß diese Bürstenstellung der Kompensation der primären Phasenverschiebung nicht günstig sein kann.

Wählen wir daher die Bürstenstellung gemäß Fig. 5, wo die Bürsten um die Polbreite im Umlaufsinn verdreht worden sind. Während die EMK der Transformation immer noch durch den Fluß Φ_3 erzeugt wird, wird die EMK der Rotation nun durch den Fluß Φ_{II} statt durch Φ_I hervorgerufen, dem er um 120° in der zeitlichen Phase nacheilt. War also vorhin die EMK der Rotation gegenüber derjenigen der Transformation um 120° in der Phase verspätet, so ist sie es jetzt um 240°. Mit andern Worten, sie eilt jetzt der EMK der Transformation um 120° voraus. Es tritt also mit wachsender Geschwindigkeit des Läufers eine mehr und mehr voreilende EMK in dessen Wicklung auf. Das ist die Bedingung, die eine Kompensation der primären Phasenverschiebung im Betrieb gestattet.

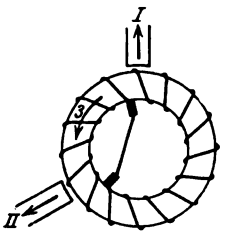


Fig. 5.

Denken wir uns die vollständige Maschine und auch hinter dem dritten Pol eine Bürste auf den Kollektor gelegt, die mit den beiden bereits betrachteten je wieder im Kurzschluß steht, so wird, was wir vorhin schilderten, in jedem Drittel der Maschine sich wiederholen. Wir sehen also, daß prinzipiell auch bei Maschinen mit einfachem Bürstensatz primäre Phasenkompensation erwartet werden darf, wenn nur die Bürsten in die richtige Lage gegenüber den Polen gebracht werden.

Wir haben zwei Lagen des Bürstensatzes betrachtet, die offenbar Extreme darstellen, zwischen welchen auf zweierlei Art der Übergang gefunden werden kann: Entweder wir bewegen die Bürsten von einem Pol zum nächsten oder aber wir verschieben sie bloß von der einen zur andern Kante ein und desselben Poles. Im ersten Falle bleibt für die Spule zwischen zwei ins Auge gefaßten Bürsten der die EMK der Rotation erzeugende Fluß derselbe und die EMK der Transformation wird mehr und mehr von einem andern Fluß übernommen; im zweiten Fall ist der die EMK der Transformation erzeugende Fluß beständig und der Wechsel tritt in dem die EMK der Rotation erzeugenden Flusse ein.

Ein besonderes Interesse bieten die beiden Zwischenfälle, wo die Bürsten gerade in der Achse der Pole oder aber gerade in der Mitte zwischen den Polen stehen. Aus den Fig. 2 und 3 ergibt sich in einfacher Weise, daß in diesen Fällen die resultierenden Flüsse zur Erzeugung der EMKe der Rotation bzw. der Transformation unter sich um 90° phasenverschoben sind, wie im Falle der reinen Drehfeldmaschine. Die EMKe selbst sind also unter sich in Gegenphase, und bei einer gewissen Drehzahl wird der Läufer stromlos. Eine primäre Phasenkompensation ist überhaupt nicht mehr denkbar.

Nach diesem allgemeinen Überblick über den einfacheren Fall der Maschine, nämlich mit einem einfachen Bürstensatz von drei unter sich kurzgeschlossenen Bürsten, wollen wir zu den etwas verwickelteren Verhältnissen der von Heyland beschriebenen Bürstenanordnung übergehen und sie gleichzeitig auch etwas exakter behandeln.

Digitized by Google

Der streuungslose Motor.

Heyland verwendet einen doppelten Bürstensatz, dessen Kurzschlüsse sich gegenseitig überkreuzen (vgl. Fig. 6). Um eine klare Vorstellung von den Vorgängen in der Maschine zu erhalten, wird es notwendig sein, daß wir uns zuerst über die Eigenschaften des Läuferstromnetzes klar werden, das durch diese sich überkreuzenden Kurzschlüsse entsteht.

Zwischen 6 Knotenpunkten liegen 9 Stromzweige A, B, C; a, b, c; α, β, γ, von denen je 3 unter sich gleichartig sind. Während in allen Stromzweigen Widerstände auftreten (R, r, ϱ), wollen wir annehmen, daß nur in den Stromzweigen A, B, C und a, b, c EMKe auftreten. Von Streuungs-EMKen soll zunächst gänzlich abgesehen werden. Ströme und EMKe seien positiv zu zählen, wenn sie die Richtung der eingezeichneten Pfeile haben. Da es sich um eine Drehstrommaschine handelt, so sind aus Symmetriegründen die Ströme in den Zweigen A, B, C bzw. a, b, c bzw. α, β, γ unter sich von gleicher Amplitude und in der gewählten Reihenfolge je um 120^0 in der Phase verspätet. Es ist z. B. mit Anwendung der komplexen Schreibweise, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und j die imaginäre Einheit bedeuten[1]):

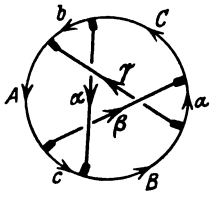
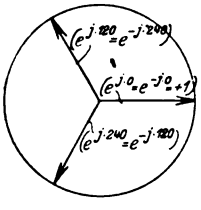


Fig. 6.

$$\left.\begin{aligned} I_C &= I_B \cdot e^{-j\cdot 120} = I_A \cdot e^{-j\cdot 240} \\ E_C &= E_B \cdot e^{-j\cdot 120} = E_A \cdot e^{-j\cdot 240} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2)$$

usw.

Berücksichtigen wir diese Gleichungen, so bleiben uns nur noch drei unbekannte Ströme, z. B. I_A, I_a, I_α nach Größe und Phase zu berechnen. Dazu bedürfen wir dreier voneinander unabhängiger Gleichungen, die sich bekanntlich aus den Kirchhoffschen Regeln ergeben. Wählen wir z. B. die geschlossene Strombahn (b, A, c, $-\alpha$), so ergibt die erste Kirchhoffsche Regel für die beiden Knotenpunkte des Zweiges α die beiden unabhängigen Gleichungen:



$$I_C - I_b - I_\alpha = 0$$
$$I_B - I_c - I_\alpha = 0,$$

die zweite Kirchhoffsche Regel ergibt:

$$E_A + E_b + E_c - I_A R - (I_b + I_c) r + I_\alpha \varrho = 0.$$

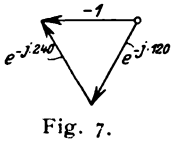


Fig. 7.

Dabei umfassen die einzelnen EMKe E sowohl die durch Rotation als die durch Transformation entstehenden Komponenten.

Beachtet man das Gleichungssystem 2), so lassen sich obige drei Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} I_A e^{-j\cdot 240} - I_a e^{-j\cdot 120} - I_\alpha &= 0 \\ I_A e^{-j\cdot 120} - I_a e^{-j\cdot 240} - I_\alpha &= 0 \\ I_A R + I_a (e^{-j\cdot 120} + e^{-j\cdot 240}) r - I_\alpha \cdot \varrho &= E_A + E_a (e^{-j\cdot 120} + e^{-j\cdot 240}) \end{aligned}\right\} \quad . \ 3)$$

Nun ist, wie die Anschauung mit Hilfe der komplexen (Gausschen) Zahlenebene ohne weiteres ergibt, $e^{-j\cdot 120} + e^{-j\cdot 240} = -1$ (vgl. Fig. 7), und es läßt sich mittels Determinanten in einfacher Weise jeder der einzelnen Ströme berechnen. Setzen wir die Determinante des Nenners:

[1]) Wir gestatten uns hier die Schreibweise $e^{j\cdot 120}$ statt der korrekten $e^{j\cdot\frac{2}{3}\pi}$ usw., weil die Gewohnheit, die Phasenwinkel in Graden statt in Bogenmaß anzugeben, vorherrscht, so daß sich bei der obigen Schreibweise Schrift und Sprache genauer entsprechen.

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} e^{-j\cdot 240} - e^{-j\cdot 120} - 1 \\ e^{-j\cdot 120} - e^{-j\cdot 240} - 1 \\ R \quad - r \quad - \varrho \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

und benennen die Zählerdeterminanten der drei Ströme I_A, I_a, I_α mit Γ_A, Γ_a, Γ_α, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= (R + r + \varrho)(e^{-j\cdot 120} - e^{-j\cdot 240}) \\ \Gamma_A &= (E_A - E_a)(e^{-j\cdot 120} - e^{-j\cdot 240}) \\ \Gamma_a &= (E_A - E_a)(e^{-j\cdot 240} - e^{-j\cdot 120}) \\ \Gamma_\alpha &= (E_A - E_a)(e^{-j\cdot 240} - e^{-j\cdot 120}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 4)$$

Wie wir bemerken, ist $\Gamma_\alpha = \Gamma_a = -\Gamma_A$ und somit $\left(\text{weil } I = \frac{\Gamma}{\Delta}\right)$ $I_\alpha = I_a = -I_A$.

Es zeigt sich also das überraschende Resultat, daß sämtliche Ströme des Läufers unter sich die gleiche Amplitude aufweisen, und daß entsprechende Ströme (z. B. I_A, I_a, I_α) in Phase oder Gegenphase miteinander stehen.

Dieses unter der Voraussetzung der vollkommenen räumlichen und zeitlichen Symmetrie abgeleitete Resultat ist von der Größe der Bürstendistanz und der vorhandenen Widerstände vollständig unabhängig und lediglich durch die besondere Art der Stromverzweigung im Dreiphasensystem gegeben. Es läßt sich nun auch leicht der Übergang zu andern Bürstenstellungen finden. Wird die Bürstendistanz zweier kurzgeschlossener Bürsten gerade 120^0 (Fig. 8), so ergibt sich das Äquivalent eines einfachen Bürstensatzes. Die Ströme I_a, I_b, I_c verschwinden dann, weil ihre Strombahnen in sich zusammensinken, und es verbleiben nur noch drei Stromkreise (A, α), (B, β), (C, γ). Wie aus dem Gleichungssystem 4) ersichtlich ist, bilden sich dann drei völlig getrennte, unabhängige Stromsysteme aus, die jeweilen den Kurzschluß und den von diesem kurzgeschlossenen Teil der Läuferwicklung umfassen. Wird der Winkel zwischen den Kurzschlußbürsten noch enger gewählt, so daß sich die Kurzschlüsse nicht mehr überkreuzen, so bleiben die zwischen zwei Kurzschlüssen gelegenen Spulen stromlos (Fig. 9). Das ist die ursprünglich von Heyland im D. R. P. 269307 beanspruchte Bürstenstellung.

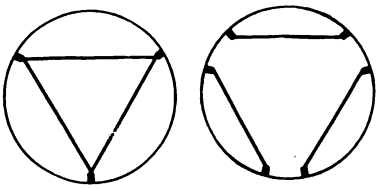


Fig. 8. Fig. 9.

Gehen wir nun dazu über, das Diagramm der Maschine zu entwerfen und im besondern den Zusammenhang zwischen den primären Strömen des Ständers und den soeben besprochenen sekundären Strömen des Läufers darzustellen. Dieser Zusammenhang wird durch die in der Maschine wirksamen Magnetfelder hergestellt und hängt daher ab von der besonderen Stellung der Bürsten unter sich und relativ zum Ständer.

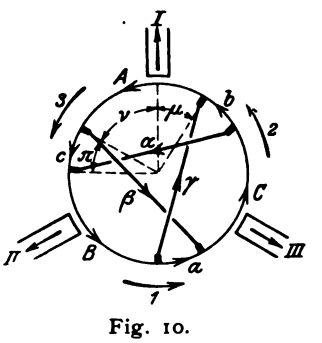


Fig. 10.

Es lassen sich vier Fälle unterscheiden: Entweder stehen die Pole über den Läuferabschnitten A, B, C oder über den Läuferabschnitten a, b, c; entweder über den Bürsten, auf welche die Zählpfeile der Kurzschlüsse α, β, γ hindeuten, oder über jenen, von denen sie ausgehen. Diese vier Fälle lassen sich wegen der Unstetigkeit an den Bürsten nicht einheitlich mathematisch darstellen. Wir wählen als Beispiel den besonders interessanten ersterwähnten Fall, wo die Pole über den Abschnitten A, B, C liegen. Die andern drei Fälle gestatten eine durchaus analoge Behandlung.

Wir nehmen an, daß der Winkel zwischen zwei einem Pol benachbarten Bürsten

Digitized by Google

durch dessen Achse im Verhältnis m : n geteilt werde, wie dies in Fig. 10 dargestellt ist, so daß $m = \frac{\mu}{\mu + \nu + \pi}$ und $n = \frac{\nu}{\mu + \nu + \pi}$; wobei stets $(\mu + \nu + \pi) = 120^0$.

E_A setzt sich in diesem Falle aus drei verschiedenen Komponenten zusammen. Erstens aus einer EMK der Transformation durch Φ_2; zweitens aus einer EMK der Transformation durch Φ_3 und drittens aus einer EMK der Rotation durch Φ_I erzeugt. E_a ist ausschließlich eine EMK der Transformation, die durch Φ_1 erzeugt wird.

Nun gilt in entsprechender Weise:

$$\Phi_{III} = \Phi_{II}\, e^{-j\cdot 120} = \Phi_I\, e^{-j\cdot 240}$$
$$\Phi_3 = \Phi_2\, e^{-j\cdot 120} = \Phi_1\, e^{-j\cdot 240}.$$

Ferner ist nach Gesagtem:

$$E_A = -j\cdot\omega\cdot k\cdot N\,\Phi_1\,(m\cdot e^{-j\cdot 120} + n\cdot e^{-j\cdot 240}) + \Omega\, l\, N\,\Phi_I$$
$$E_a = -j\cdot\omega\cdot k\cdot N\,\Phi_1\cdot p.$$

Dabei ist N die Zahl der Läuferwindungen; $p = \frac{\pi}{\mu + \nu + \pi}$, und k und l sind gewisse Zahlenkoeffizienten. Da außerdem $\Phi_I = -j\cdot\sqrt{3}\,\Phi_1$ (vgl. Fig. 3), so läßt sich schreiben:

$$(E_A - E_a) = -j\cdot\omega\, N\,\Phi_1\left[k\,(m\, e^{-j\cdot 120} + n\, e^{-j\cdot 240} - p) + \frac{\Omega}{\omega}\sqrt{3}\, l\right] \quad \ldots \quad 5)$$

Weil aber $$I_A = -I_a = -I_\alpha = \frac{E_A - E_a}{R + r + \varrho},$$

so sind nun auch die Beziehungen zwischen den Strömen und den resultierenden Flüssen bekannt.

Diese letzteren werden durch zwei Komponenten gebildet. Erstens aus denjenigen Flüssen, die in den verschiedenen Eisenwegen auftreten, wenn bloß die primären Ströme, d. h. die Ständerströme flössen. Wir werden sie mit Φ' bezeichnen. Zweitens aus denjenigen Flüssen, die entstünden, wenn bloß die Läuferströme, das sind die sekundären Ströme, flössen. Wir bezeichnen sie mit Φ''. Sowohl die Flüsse Φ' als auch die Flüsse Φ'' stehen unter sich in denselben Beziehungen wie die Flüsse Φ; in den Beziehungen, die in Fig. 3 dargestellt sind.

Da wir von Hysterese absehen, so sind die Flüsse in Phase mit den sie erzeugenden Stromwindungen. Die Flüsse Φ'' sind also ohne weiteres aus den sekundären Strömen herzuleiten. Es ist z. B.

$$\Phi_1'' = q\,(n I_B + m I_C + p I_a)\, N$$
$$\Phi_1'' = [q\,(\underset{④}{n\cdot e^{-j\cdot 120}} + \underset{⑤}{m\cdot e^{-j\cdot 240}} - \underset{⑥}{p})]\, I_A N \quad \ldots \quad 6)$$

Außerdem ist je nach der Konstruktion des Ständers auch der Zusammenhang zwischen den primären Flüssen und Strömen gegeben. Sind z. B. die Pole bewickelt und unter sich im Stern geschaltet, so sind mit den Polströmen auch die Polflüsse $\Phi_I'\ \Phi_{II}'\ \Phi_{III}'$ in Phase. Mit diesen Flüssen stehen die Flüsse $\Phi_1'\ \Phi_2'\ \Phi_3'$ in der Beziehung der Fig. 3, nämlich z. B.: $\Phi_I' = -j\cdot\sqrt{3}\,\Phi_1'$.

Nun ist aber $\Phi_1' = \Phi_1 - \Phi_1''$; und da die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung vollständig bekannt sind, so läßt sich auch Φ_1' und rückwärts daraus der Primärstrom berechnen, oder, was noch einfacher ist, konstruieren. Dabei können die komplexen Klammerausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l}(m\cdot e^{-j\cdot 120} + n\, e^{-j\cdot 240} - p)\\ (n\cdot e^{-j\cdot 120} + m\, e^{-j\cdot 240} - p)\end{array}\right\} \quad \ldots \quad 7)$$

Glied für Glied ohne weiteres aufgetragen werden, nach den Grundsätzen, die in einem Beispiel durch Fig. 7 erläutert worden sind.

Digitized by Google

Wir betrachten die Maschine vorerst im Stillstand. Dann ist $\frac{\Omega}{\omega} = 0$ und:

$$I_A = [-j(m\,e^{-j\cdot 120} + n\,e^{-j\cdot 240} - p)]\,K\,\Phi_1$$
$$= [\underset{①}{j\cdot p} - \underset{②}{j\cdot e^{-j\cdot 120}\cdot m} - \underset{③}{j\cdot e^{-j\cdot 240}\cdot n}]\,K\,\Phi_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

wobei $K = \frac{\omega N k}{R + r + \varrho}$ eine Konstante bedeutet.

Wählen wir Φ_1 nach Größe und Richtung willkürlich in der positiven reellen Richtung der komplexen Zahlenebene (Fig. 11), so ist also I_A durch Gl. 8) gegeben. Weil bei gegebener Konfiguration der Bürsten $m + n = \text{const.} = s$, so wandert je nach der Stellung der Bürsten gegenüber dem Ständer das Ende des durch die eckige Klammer gegebenen Ausdrucks auf der horizontalen Linie AB. In gleicher Weise läßt sich von I_A ausgehend nach Gl. 6) Φ_1'' konstruieren. Die Linienzüge tragen immer die Nummern des entsprechenden Gliedes in den Gl. 6) und 8). Beachtet man aber, daß das Produkt der unter 7) gegebenen Klammerwerte eine positive reelle Zahl ist, so sieht man auch ohne Konstruktion ein, daß für Stillstand Φ_1'' immer in die Vertikale, nämlich in die negative imaginäre Achse fällt.

Aus Fig. 11 läßt sich nun Sinn und Größe des Anlaufdrehmomentes entnehmen. Es wird erzeugt durch die elektro-dynamische Wirkung zwischen Polfeld und dem darunter fließenden Läuferstrom. Z. B. zwischen Φ_I und I_A. Gemäß dem Diagramm Fig. 3 eilt Φ_I gegenüber Φ_1 um 90^0 in der Phase nach, es ist also gemäß Fig. 11 wesentlich in Gegenphase zu I_A, d. h. wenn Φ_I sein positives Maximum erreicht hat, so fließt I_A in den Ankerstäben gegen den Beschauer der Fig. 10, der Drehsinn ist also, wie zu erwarten stand, derjenige der zeitlichen Aufeinanderfolge der Pole[1]).

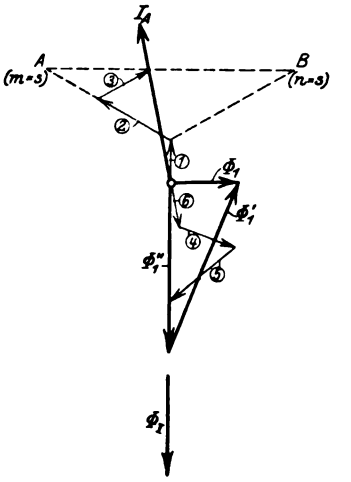


Fig. 11. Bürstenstellung $m > n$. Stillstand.

Wir können nun I_A auch für ein beliebiges Verhältnis von $\frac{\Omega}{\omega}$ angeben. Da vor dem Klammerwert der Gl. 5) ein Faktor mit $(-j)$ steht, so addiert sich zum Vektor des Stromes I_A für Stillstand ein Stromvektor von der Richtung $(-j)$, d. h. vertikal nach unten.

Die Größen- und Winkelbeziehungen zwischen I_A und Φ_1'' sind, in Übereinstimmung mit der Anschauung, gemäß Gl. 6) von der Umlaufszahl unabhängig. Die Werte I_A für verschiedene Umlaufszahlen und die entsprechenden Werte Φ_1'' bestimmen daher ähnliche Dreiecke. So lange $m > n$ verdreht sich I_A bei wachsender Umlaufszahl im positiven Sinne und damit auch Φ_1''. Da nun $\Phi_1'' + \Phi_1' = \Phi_1$, so ergibt sich aus dem Diagramm ohne weiteres für jede Umlaufszahl auch Φ_1' und somit der Primärstrom. Der größeren Einfachheit wegen ist in Fig. 12 $m = s$, $n = 0$ gewählt. Wir haben für die drei Betriebszustände Stillstand, primäre Phasenkompensation und

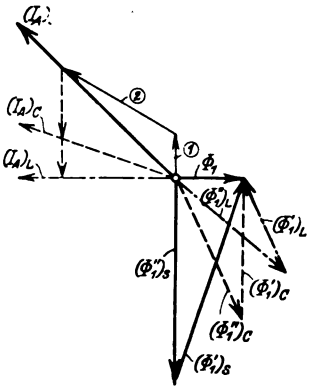


Fig. 12. Bürstenstellung $m = s$; Stillstand, Kompensation und Leerlauf.

[1]) Da kein Drehfeld auftritt, kann man nicht sagen, der Läufer drehe sich im Sinne des Drehfeldes. Dagegen läßt sich sagen, daß die Winkelgeschwindigkeit Ω des Läufers das gleiche Vorzeichen hat, wie die elektrische Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω, der wir das positive Vorzeichen beigelegt haben, indem wir die Reihenfolge der Pole im positiven Drehsinn, d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn festgesetzt haben.

Digitized by Google

Leerlauf die Indices S, C und L gewählt. Phasenkompensation tritt ein, wenn Φ_1' senkrecht zum resultierenden Φ_1 steht. Dann steht nämlich auch, kraft der Beziehungen von Diagramm Fig. 3, Φ_I' senkrecht zu Φ_I. Ist dies der Fall, so steht der Primärstrom, der in Phase mit Φ_I' steht, in Quadratur mit dem resultierenden Φ_I und somit in Gegenphase mit der EMK der Induktion, die durch Φ_I in der Bewicklung von Pol I erzeugt wird. Ist der Ohmsche Verlust in der Primärspule zu vernachlässigen, so hält diese EMK der Sternspannung des Netzes allein das Gleichgewicht, d. h. Strom und Spannung sind dann wirklich in Phase. Leerlauf tritt ein, wenn I_A mit Φ_I in Quadratur steht. Da Φ_I gegenüber Φ_1 um 90^0 in der Phase nacheilt (Fig. 3), so tritt im gewählten Beispiel Fig. 12, wie es praktisch erforderlich ist, der Leerlauf erst nach der primären Phasenkompensation auf.

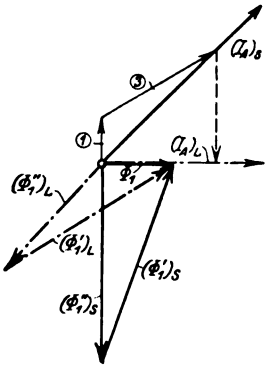


Fig. 13. Bürstenstellung $n=s$. Stillstand und Leerlauf.

Verstellt man die Bürsten, so daß $m=0$, $n=s$, so gilt das Diagramm Fig. 13. Dieses gestattet mit Fig. 12 zusammen leicht, auch für die Zwischenwerte von m und n sich die Verhältnisse vorzustellen. Fig. 13 zeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen sich durch die Bürstenstellung weder Sinn noch Größe des Anlaufmomentes geändert haben, daß aber mit wachsender Umlaufzahl der Winkel zwischen Φ_1' und Φ_1 immer spitzer wird, d. h. im Primärkreis wird der $\cos\varphi$ immer schlechter. Eine Phasenkompensation im Primärkreis ist also bei dieser Bürstenstellung nicht zu erreichen, denn der Läuferstrom trägt zur Magnetisierung nicht nur nichts bei, sondern er wirkt ihr sogar direkt entgegen.

Wählt man nun $m=n=\frac{1}{2}s$, so fällt im Stillstand I_A in Gegenphase mit Φ_1''. Mit wachsender Umlaufzahl ändern weder I_A noch Φ_1'' ihre Phase, wohl aber werden sie kleiner und kleiner. Wie bei der Drehfeldmaschine sind die EMKe der Rotation und der Transformation miteinander in Gegenphase, und wie dort wird die Magnetisierung unter allen Umständen vollständig vom Ständerstrom geliefert. Der Leerlauf tritt ein, wenn mit steigender Umlaufzahl der Läuferstrom verschwindet und Φ_1' mit Φ_1 identisch wird. Alles in direkter Analogie mit den Verhältnissen im Drehstrominduktionsmotor.

Nachdem die Verhältnisse hier in einer von den vier möglichen Arten der Bürstenstellung ausführlich behandelt wurden, dürfte es gestattet sein, die eingehende Besprechung der drei übrigen Fälle, die sich jeder Leser selbst diagrammatisch vergegenwärtigen kann, an dieser Stelle zu unterlassen, und dafür zu den Folgerungen überzugehen, die sich aus dieser Theorie für die Eigenschaften der Maschine ergeben, stets unter der Voraussetzung, daß die Widerstände im Primärkreis so klein seien, daß an Stelle der Voraussetzung konstanter Primärspannung diejenige eines konstanten Maschinenfeldes gesetzt werden kann.

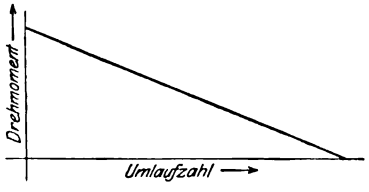


Fig. 14.

Unter dieser Voraussetzung ist das Drehmoment, das proportional dem Skalarprodukt aus Φ_I und I_A ist, proportional der Projektion von I_A auf die vertikale Achse, die im besondern Fall die Richtung des Vektors Φ_I ist. Da nun gemäß Konstruktion und Gl. 5) und 6) die Spitze des Vektors I_A sich proportional zur Drehzahl auf einer Vertikalen verschiebt, so ist das Drehmoment eine lineare Funktion der Umlaufszahl (vgl. Fig. 14).

Der Faktor 1 in Gl. 5) ist innerhalb der Gültigkeitsgrenzen unseres Gleichungssystems von der Bürstenstellung unabhängig. Wenn wir dies beachten, läßt sich aus den Diagrammen auch ein Urteil über den Einfluß des Öffnungswinkels der Kurzschlußbürsten gewinnen.

Digitized by Google

Bedingung ist, daß stets die Winkelsumme $(\pi + \mu + \nu) = 120^0$ sei (vgl. Fig. 10). Daraus geht hervor, daß die Länge des Linienzuges ① — ② — ③ in Fig. 11 für verschiedene Öffnungswinkel konstant ist. Ist z. B. der Bürstenwinkel 120^0, so fällt das Linienstück ① in sich zusammen und die Abweichung des Vektors I_A von der Vertikalen wird größer als bei dem gleichen Wert von $\frac{m}{n}$ bei größerem Öffnungswinkel. Bei gleichem $\frac{\Omega}{\omega}$ ist also die Verdrehung des Vektors I_A gegenüber seiner Lage im Stillstand größer und somit auch die Verdrehung von Φ_1'' und Φ_1'. Die Spitze des Vektors I_A bei Stillstand ist dabei näher der horizontalen Achse, d. h. der Leerlauf (wobei I_A selbst in diese Horizontale fällt) tritt bereits bei einer geringeren Umlaufszahl auf. Ebenso die Kompensation der primären Phasenverschiebung. Dabei verkleinert sich das Anlaufmoment. Alle diese Verhältnisse lassen sich sehr leicht an Hand der Diagramme studieren. Sie sollen später in einem zweiten Teil im Zusammenhang besonders dargestellt werden. Schon außerhalb dieses Zusammenhangs erkennt man, daß die Leerlauftourenzahl der Maschine bei genügend schmalen Polflächen sich in ganz beträchtlichen Grenzen ändern läßt, daß aber Drehmoment und Phasenkompensation nicht unabhängig davon reguliert werden können.

Einfluß der Streuung.

Die bisherigen Betrachtungen stehen ganz unter der Voraussetzung, daß die Maschine völlig streuungslos arbeite. In Wirklichkeit ist aber immer Streuung vorhanden. Es ist zu untersuchen, in welchem Sinne diese auf das Verhalten der Maschine einwirkt.

Die einfachen Beziehungen des Gleichungssystems 1) und der Fig. 3 gelten nur, solange die Maschinenflüsse streuungslos verlaufen. Um die daraus sich ergebenden Vereinfachungen auch in der folgenden Betrachtung beibehalten zu können, sei angenommen, daß die gesamte Streuung in den Kurzschlußverbindungen der Bürsten ihren Sitz habe; eine Einschränkung, die qualitativ auf die Ergebnisse keinen Einfluß hat. Die ganze Änderung, die sich in den Gleichungen ergibt, ist also die, daß der Widerstand ϱ durch den komplexen Widerstand $(\varrho + j \cdot \omega \lambda)$ zu ersetzen ist, wobei λ der Selbstinduktionskoeffizient einer Kurzschlußverbindung ist. Als Ausdruck der Ströme erhalten wir

$$I_A = -I_a = -I_\alpha = \frac{E_A - E_a}{(R + r + \varrho) + j \cdot \omega \lambda}.$$

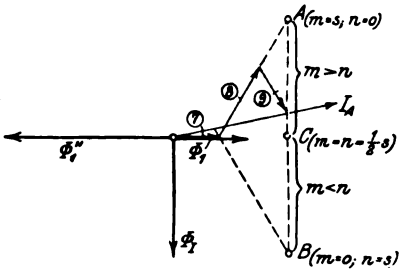


Fig. 15. Bürstenstellung $m > n$. Stillstand.

Um den Einfluß der Streuung grell zu beleuchten, nehmen wir sofort an, λ sei so groß, daß daneben die Ohmschen Widerstände vernachlässigbar sind. Unter Berücksichtigung von Gl. 5) erhalten wir dann den expliziten Ausdruck

$$I_A = \frac{N \Phi_1}{\lambda} [k (\underbrace{p}_{(7)} - \underbrace{m e^{-j \cdot 120}}_{(8)} - \underbrace{n e^{-j \cdot 240}}_{(9)}) - \frac{\Omega}{\omega} \underbrace{\sqrt{3} 1}_{(10)}] \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

Die Phase von I_A gegenüber Φ_1 erscheint also, verglichen mit dem streuungslosen Motor, um 90^0 verspätet. Fig. 15 deutet die Verhältnisse für Stillstand an für eine Stellung des Bürstensatzes wo $m > n$.

Als Ergebnis der neuen Sachlage fällt zuerst auf, daß für Stillstand der Strom I_A nicht mehr für jeden Wert des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ wesentlich in Gegenphase mit Φ_I steht, daß also das Anlaufmoment des Motors nicht mehr für jede Stellung des Bürstensatzes den gleichen Drehsinn hat. Positiver Drehsinn, wie beim

Digitized by Google

streuungsfreien Motor, tritt nur auf, solange $m > n$. Für $m < n$ tritt I_A wesentlich in Phase mit Φ_I und der Drehsinn wird negativ. In der Mittelstellung $m = n = \frac{1}{2}s$ steht I_A in Quadratur zu Φ_I; ein Anlaufmoment ist somit nicht vorhanden. Aus dem Folgenden ergibt sich ferner unmittelbar, daß auch, wenn der Motor angetrieben wird, er bei dieser Bürstenstellung immer kraftlos bleibt. Man kann hier also beim reinen „Streuungsmotor" wirklich in Analogie mit dem Einphasenrepulsionsmotor von einer „Nullstellung" der Bürsten sprechen.

Überläßt man den Motor seinem Drehmoment, so nimmt im Lauf das Glied (10) der Gl. 9) mit wachsender Drehzahl größere und größere absolute Werte an; negative Werte bei positivem Drehsinn ($m > n$); positive Werte bei negativem Drehsinn ($m < n$). Dabei bewegen sich die Enden der Vektoren I_A auf Senkrechten zum Vektor Φ_I (Fig. 16); im ersten Fall nach links, im zweiten Fall nach rechts.

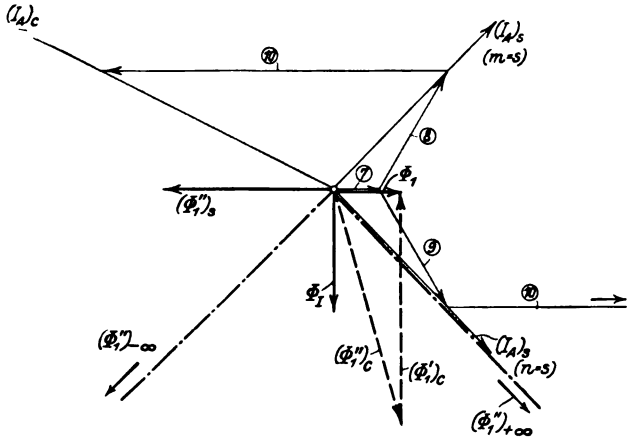


Fig. 16. Bürstenstellungen: $m = s$ und $n = s$. Stillstand und Kompensation.

Daraus ergibt sich zunächst die merkwürdige Eigenschaft, daß der reine Streuungsmotor für eine gegebene Bürstenstellung bei jeder Drehzahl dasselbe Drehmoment entwickelt. Ein Leerlauf tritt also nicht ein. In den ausführbaren Maschinen, wo Widerstand und Streuung gleichzeitig auftreten, wird die letztere also eine Steigerung der Leerlaufdrehzahl bewirken. Immer aber bleibt die Drehmomentkurve eine Gerade.

Die Eigenschaften des von Ohmschen Widerständen freien Motors nähern sich also gegenüber dem streuungsfreien Motor in manchen Punkten dem Verhalten des Einphasenrepulsionsmotors. Die Symmetrie bezüglich der beiden Umlaufsinne freilich ist verloren, wie dies aus Fig. 16 klar hervorgeht. Dort sind die Verhältnisse für die beiden Grenzlagen des Bürstensatzes $m = s$ und $n = s$ eingezeichnet.

Man sieht, für die Bürstenstellungen $m > n$ nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit die Größe des Vektors I_A ab, bis er ganz in Gegenphase zu Φ_I steht, was die günstigste Bedingung für das Drehmoment ist. Mit wachsender Winkelgeschwindigkeit Ω verdreht sich der Vektor I_A im positiven Sinn und im selben Maße gleichzeitig der Vektor Φ_1'', der gemäß Gl. 6) mit I_A verknüpft ist. Die Grenzlage für $\Omega = +\infty$ ist als $(\Phi_1'')_{+\infty}$ eingetragen. Ebenso die Lage, für welche Kompensation eintritt. $(I_A)_c$ bzw. $(\Phi_1'')_c$. $(\Phi_1')_c$ steht in Quadratur mit Φ_1.

Für Bürstenstellungen $m < n$ dreht sich, wie man aus Fig. 16) erkennt, mit zunehmender Umlaufszahl I_A wieder im positiven Sinn, tritt aber von Anfang an in immer ungünstigere Phasen zum Vektor Φ_I. Dabei dreht sich der Vektor Φ_1'' wieder im gleichen Maße wie I_A, erreicht aber für $\Omega = -\infty$ nur die Grenzlage, die in Fig. 16 mit $(\Phi_1'')_{-\infty}$ eingezeichnet ist. Man sieht, die Verdrehung bleibt unter dem Wert, der für die Phasenkompensation im Primärkreis erforderlich ist. Bei dieser Bürstenstellung ist also Kompensation im Motorgang ausgeschlossen.

Die Überlegenheit der Bürstenstellungen $m > n$, die wir schon bei der streuungsfreien Maschine feststellen konnten, finden wir also auch bei der reinen „Streuungsmaschine" wieder. Beachten wir außerdem, daß für die Bürstenstellungen $m < n$ die Drehmomente der „Widerstandsmaschine" und der „Streuungsmaschine" entgegengesetztes Vorzeichen haben, so erkennen wir darin einen neuen Grund, weshalb bei praktisch ausführbaren Maschinen, die gleichzeitig Widerstand und Streuung aufweisen,

Digitized by Google

diese Bürstenlagen unbrauchbar sein müssen. Auf diesem Gebiet arbeiten sich das „Drehmoment auf Grund des Widerstandes" und das „Drehmoment auf Grund der Streuung" entgegen. Ist das Verhältnis von Widerstand zu Streuung entsprechend klein, so gibt es eine Bürstenstellung im Gebiet $m < n$, bei der sich die beiden Drehmomente gegenseitig aufheben und bei der sich der Drehsinn des Motors umkehrt. Dies ist dann die „Nullstellung" des Bürstensatzes. Sie weicht von der Nullstellung der reinen Streuungsmaschine um so mehr ab, je größer im Verhältnis zur Streuung der Ohmsche Widerstand ist.

Vergleich und Kritik.

Wir haben uns, ausgehend von dem beobachteten Phänomen der primären Phasenkompensation durch theoretische Überlegung zu einem Maschinenschema führen lassen, das, wie wir sehen, Eigenschaften aufweist, die tatsächlich eine solche Phasenkompensation zur Folge haben. Es wird nun von Interesse sein, an Hand der übrigen Aussagen und Beobachtungen Heylands zu prüfen, in welchem Maße darüber hinaus dieses Schema die Verhältnisse der Heylandschen Maschine wirklich wiedergibt. Dabei werden wir zu unterscheiden haben zwischen den Tatsachen der Beobachtung und den theoretischen Vorstellungen, die sich der Verfasser jener Veröffentlichungen von der Maschine macht. Es ist klar, daß ein Schema, wie das unsrige, das gegenüber einer wirklich ausgeführten Maschine den Vorzug des „reinen Falles" hat, den Einfluß der einzelnen Elemente klarer übersehen läßt und daher eine durchsichtigere Theorie ermöglicht.

Vor allem ist zu betonen, daß wir im Gegensatz zu Heyland dazu geführt wurden, das dreiphasige Wechselfeld (im Gegensatz zum Drehfeld) zusammen mit dem dreiphasigen Bürstenkurzschluß als die wesentlichen Kennzeichen der Maschine zu betrachten. Sowohl darin, daß Heyland einen besonderen Winkelabstand der Kurzschlußbürsten, der kleiner ist als 120^0, für seine Maschine als charakteristisch auffaßt[1]), wie darin, daß er jede bekannte Ständerwicklung als brauchbar annimmt[2]), glauben wir theoretische Irrtümer des Erfinders zu erkennen. Freilich ist es selbstverständlich nicht notwendig, daß die Heylandsche Maschine ausgeprägte Pole aufweise, wenn sie nur das Auftreten eines reinen Drehfeldes nicht zuläßt. Dies wäre, wenn auch voraussichtlich nicht in hinreichender Weise, schon durch den dreiphasigen Bürstenkurzschluß allein zu erreichen.

Wir haben gesehen, daß in dem Falle, wo die Bürsten eines Kurzschlusses um weniger als 120^0 voneinander abstehen (Fig. 9), die Kurzschlüsse mit den überbrückten Läuferwindungen drei voneinander völlig unabhängige Stromkreise bilden, und daß zwischen Bürsten verschiedener Kurzschlüsse keine Ströme fließen. Es ist ohne weiteres zu übersehen, daß für diese Bürstenstellung dieselbe Theorie gilt, wie für die Bürstenstellung nach Fig. 8, die der Erfinder glaubte verwerfen zu müssen. Außerdem hat letztere den Vorteil, die ganze Läuferwicklung auszunützen. Überdies ist Heyland ja selbst über diese Beschränkung hinausgegangen, indem er die Kurzschlüsse sich überkreuzen ließ, bei welcher Gelegenheit er die Erscheinung der automatischen Kompensation entdeckte. Das letztere Phänomen ist prinzipiell, wie die Theorie zeigt, keineswegs an die Überkreuzung der Bürstenkurzschlüsse gebunden, sondern kann auch bei Bürstenstellungen gemäß Fig. 8 und 9 auftreten. Freilich ist es möglich, daß speziell bei der ausgeführten Maschine bei diesen Lagen der Leerlauf vor dem Eintritt der Kompensation erreicht wird, lediglich als Folge der zufällig gewählten Windungszahl auf Ständer und Läufer.

Eine wesentliche Korrektur der bestehenden Auffassung bringt die Theorie auch in bezug auf das Auftreten eines Drehfeldes im Lauf, das Heyland in Analogie zum Einphasen-Repulsionsmotor zur Erklärung seiner Maschine herbeizieht[3]). Die Theorie zeigt

[1]) D. R. P. 269307. S. 1, Z. 66; S. 2, Z. 80 und ETZ 1914, S. 85.
[2]) D. R. P. 269307. S. 2, Z. 110.
[3]) ETZ 1914, S. 86.

Digitized by Google

daß gerade auch im Lauf, wo die Kompensation der Phasenverschiebung erwartet und erzielt wird, ein Drehfeld nicht auftreten darf, weil ja diese Kompensation, wie schon einleitend dargelegt wurde, gerade darauf zurückzuführen ist, daß elektromotorische Kräfte der Rotation und der Transformation entstehen, die zueinander nicht in Gegenphase stehen und die daher die zur Magnetisierung erforderliche Resultierende ergeben können.[1])

Neben diesen wesentlichen Verschiedenheiten in den theoretischen Auffassungen steht aber eine Reihe ebenso schöner Übereinstimmungen zwischen den Ergebnissen obiger Theorie und den Versuchsergebnissen von Heyland. Auf S. 725 der ETZ 1914 erwähnt er, daß durch Veränderung auch der festen Bürsten sich die Kompensierung verbessern und regeln lasse, so daß der Leistungsfaktor bei bereits relativ niederer Belastung des Motors sein Maximum erreicht. Gleichzeitig wird erwähnt, daß mit dieser Regelung der Kompensation eine Veränderung der Leerlauftourenzahl einhergeht, die sich aber praktisch nicht sehr weit über den Synchronismus steigern läßt. Alle diese Beobachtungen sind vollkommen im Einklang mit den Folgerungen, die wir bereits weiter oben direkt aus dem Diagramm hergeleitet haben. Eine besonders schöne Bestätigung der Theorie aber zeigt sich schließlich in der Beobachtung[2]), daß die beste Kompensation dann erreicht wird, wenn bei Umschaltung der Drehrichtung des Motors die beweglichen Bürsten entgegen dem neuen Drehrichtungssinn verstellt werden, während die festen Bürsten etwas im Sinn der Drehrichtung verstellt werden. Dies ist in unserer Sprache nämlich nichts anderes als die Bedingung, daß in beiden Fällen $m = s$, $n = 0$ gemacht werde, wobei die „festen" Bürsten dann über die „Polbreite" verschoben werden müssen. Auch für den einfacheren Fall bloß dreier unter sich kurzgeschlossener Bürsten fanden wir schon einleitend bei Besprechung der Fig. 5 diese Regel bestätigt. Gerade diese Bürstenstellung hat auch Heyland untersucht und das Ergebnis in einer Kurve (b)[3]) dargestellt. Aus der soeben erwähnten Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie und der Beobachtung glauben wir schließen zu dürfen, dass die Deutung, die dem Versuchsergebnis a. a. O. gegeben wurde, irrtümlich ist. Der Grund der auftretenden Verbesserung des $\cos \varphi$ dürfte, im Gegensatz zu der dort geäußerten Vermutung, kein anderer sein als bei den Kurven (c) und (d). Daß aber die beobachtete Verbesserung so geringfügig blieb, das läßt darauf schließen, daß die festen Bürsten nicht in zweckmäßiger Stellung sich befanden.

Kurz, in allen Punkten der direkten Beobachtung, soweit wir solche aus den Veröffentlichungen Heylands entnehmen können, sehen wir eine schöne Bestätigung unserer Theorie, so daß wir annehmen dürfen, daß diese einen wesentlichen Tatsachengehalt in sich schließe und die Grundzüge der physikalischen Zusammenhänge wiedergebe. Immerhin ist die ihr zugrunde gelegte Maschine in einem solchen Maße schematisch, daß direkte quantitative Schlüsse zu ziehen nicht ratsam wäre. Erst wenn genauere Konstruktionsangaben der ausgeführten Maschine bekannt sind, wird es möglich sein, die Theorie im Hinblick auf diese auszubauen und in der notwendigen Weise zu modifizieren. Andererseits liefert natürlich die Theorie auch neue Gesichtspunkte für die Konstruktion, da sie den Einfluß der einzelnen Konstruktionselemente klarer zu überblicken gestattet.

[1]) Darin zeigt sich auch, wie wenig Berechtigung die Analogie mit dem Einphasen-Repulsionsmotor besitzt, und man sieht sich bestärkt in den Zweifeln gegenüber den zahlreichen Analogien, die in der erwähnten Patentschrift mit Einphasenmotoren ähnlicher Art herbeigezogen werden. Gegen solche Analogien a priori sollte schon der Umstand, daß im Heylandschen Motor notwendig ein Leerlauf auftritt, eine eindringliche Warnung sein. Zu wie weitgehenden Trugschlüssen sie zu führen vermögen, zeigt sich besonders klar in einer Behauptung auf S. 2, Z. 48 des fraglichen Patentes, wo angenommen wird, daß bei der Bürstenstellung $m = n = \frac{1}{2} s$ (gemäß der von uns gewählten Ausdrucksweise) im Stillstand überhaupt kein Ankerfeld auftreten könne. Eine Auffassung, die sich nicht nur an Hand der Theorie, sondern auch auf Grund der direkten Überlegung als unhaltbar erwiesen hätte.

[2]) ETZ S. 725, Spalte 3, Z. 21 von unten.

[3]) ETZ 1914, S. 725.

Digitized by Google

Berichtigung.

Herr Gewecke macht darauf aufmerksam, daß in der Arbeit von Herrn Linke über Schaltvorgänge bei elektrischen Maschinen (Arch. Bd. I) folgende Versehen enthalten sind:

In der letzten Gleichung auf Seite 25 muß es in der Klammer $\mp$ anstatt $\pm$ heißen, entsprechend kehren sich die Vorzeichen von M im Nenner von Gl. 11) und 11a) um. In der ersten Gleichung für i_{2f} ist $_1$ und $_2$ mit richtigen Vorzeichen, also abweichend von den Werten der Gl. 11) und 11a) eingesetzt.

Ferner muß Gl. 15a für C_2 heißen:

$$-\frac{i_{k10}}{2}+i_{k20}=C_2.$$

In Gl. 16) und 17) ist das Zeichen von M im Exponenten umzukehren, C_2 ist mit seinem richtigen Wert, also abweichend von Gl. 15a) eingesetzt.

Berücksichtigt man die Lage der Vektoren im Diagramm, so ist

$$i_{k10}+i_{k20}=i_{mf}$$

$$\frac{i_{k10}}{2}-i_{k20}=i_{k0}.$$

Gl. 18) und 19) müssen dann heißen:

$$i_{1f}=-\frac{i_{mf}}{2}e^{-\frac{r}{L}+M t}-i_{k0}e^{-\frac{r}{L}-M t}$$

$$i_{2f}=-\frac{i_{mf}}{2}e^{-\frac{r}{L}+M t}+i_{k0}e^{-\frac{r}{L}-M t}$$

Die Erörterung der beiden Schlußgleichungen müßte eine entsprechende Änderung erfahren.

Digitized by Google

Digitized by Google

621.05
AR

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

Archiv
für
Elektrotechnik

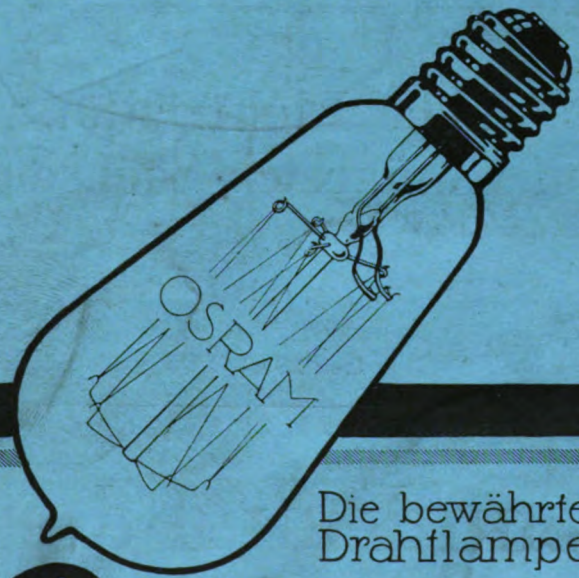
Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Dr.-Ing. W. Rogowski, Charlottenburg
Schriftleitung: i. V. Prof. Dr. E. Orlich, Charlottenburg
Verlag von Julius Springer in Berlin

4. Band | 1916 | 12. Heft

Inhaltsverzeichnis.

Seite

P. Müller, Einige Selbsterregungserscheinungen bei einphasigen Kollektormotoren . . . 373
O. Bloch, Zur Theorie des Heylandschen Dreiphasen-Repulsionsmotors 394



Die bewährte
Drahtlampe
Osram

Digitized by Google

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden während der Einberufung des Herrn Dr. Rogowski zum Heeresdienst erbeten unter der Adresse: Prof. Dr. E. Orlich, Technische Hochschule, Charlottenburg.

Das **Archiv für Elektrotechnik** erscheint in Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis des Bandes beträgt M. 24,—, für Abonnenten der „Elektrotechnischen Zeitschrift" sowie Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins M. 18,—. Der Bezug kann durch jede Buchhandlung sowie durch unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer
Berlin W. 9, Linkstraße 23/24.

Verlag von Julius Springer in Berlin

Vor kurzem erschien:

Die geplante staatliche Elektrizitätsversorgung im Königreich Sachsen

Von

Dr. Dr.-Ing. e. h. **Beutler**
Dresden

Preis M. 1,—

Vor kurzem erschien:

Die Technik und der Krieg

Zwei Vorträge gehalten in der Aula der Königl. Techn. Hochschule zu Danzig

von

Dr. G. Roessler
Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Danzig

(Sonderabdruck aus den Monatsblättern des Berliner Bezirksvereins deutscher Ingenieure)

Preis M. 1,—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google

Verlag von Julius Springer in Berlin

Erläuterungen

zu den

Normalien für isolierte Leitungen in Starkstromanlagen, den Normalien für isolierte Leitungen in Fernmeldeanlagen sowie den Kupfernormalien

Im Auftrage des Verbandes Deutscher Elektrotechniker

herausgegeben von

Dr. Richard Apt

In Leinwand gebunden Preis M. 3,—

Grundzüge des Überspannungsschutzes

in Theorie und Praxis

Erweiterte Wiedergabe eines Vortrages

gehalten in der 2. Sitzung der Kommission für Überspannungsschutz des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke am 17. Januar 1914

Von

Dr.-Ing. Karl Kuhlmann

Professor für theoretische Elektrotechnik und Elektromaschinenbau
Direktor der elektrotechnischen Laboratorien der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich

Mit 47 Textfiguren. — Kartoniert Preis M. 2,—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google

Verlag von Julius Springer in Berlin

Elektrische Strassenbahnen und strassenbahnähnliche Vorort- und Überlandbahnen

Vorarbeiten, Kostenanschläge und Bauausführungen von Gleis-, Leitungs-, Kraftwerks- und sonstigen Betriebsanlagen

Von

Oberingenieur **Karl Trautvetter**
Beuthen (O.-S.)

Mit 334 Textfiguren

Preis M. 8,—; in Leinwand gebunden M. 8,80

Vor kurzem erschien:

Die Maschinenlehre der elektrischen Zugförderung

Eine Einführung für Studierende und Ingenieure

Von

Dr. W. Kummer
Ingenieur, Professor an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich

Mit 108 Abbildungen im Text

In Leinwand gebunden Preis M. 6,80

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
621.305AR C001
ARCHIV FUR ELEKTROTECHNIK$BER
4 1915
3 0112 007995787

Digitized by Google